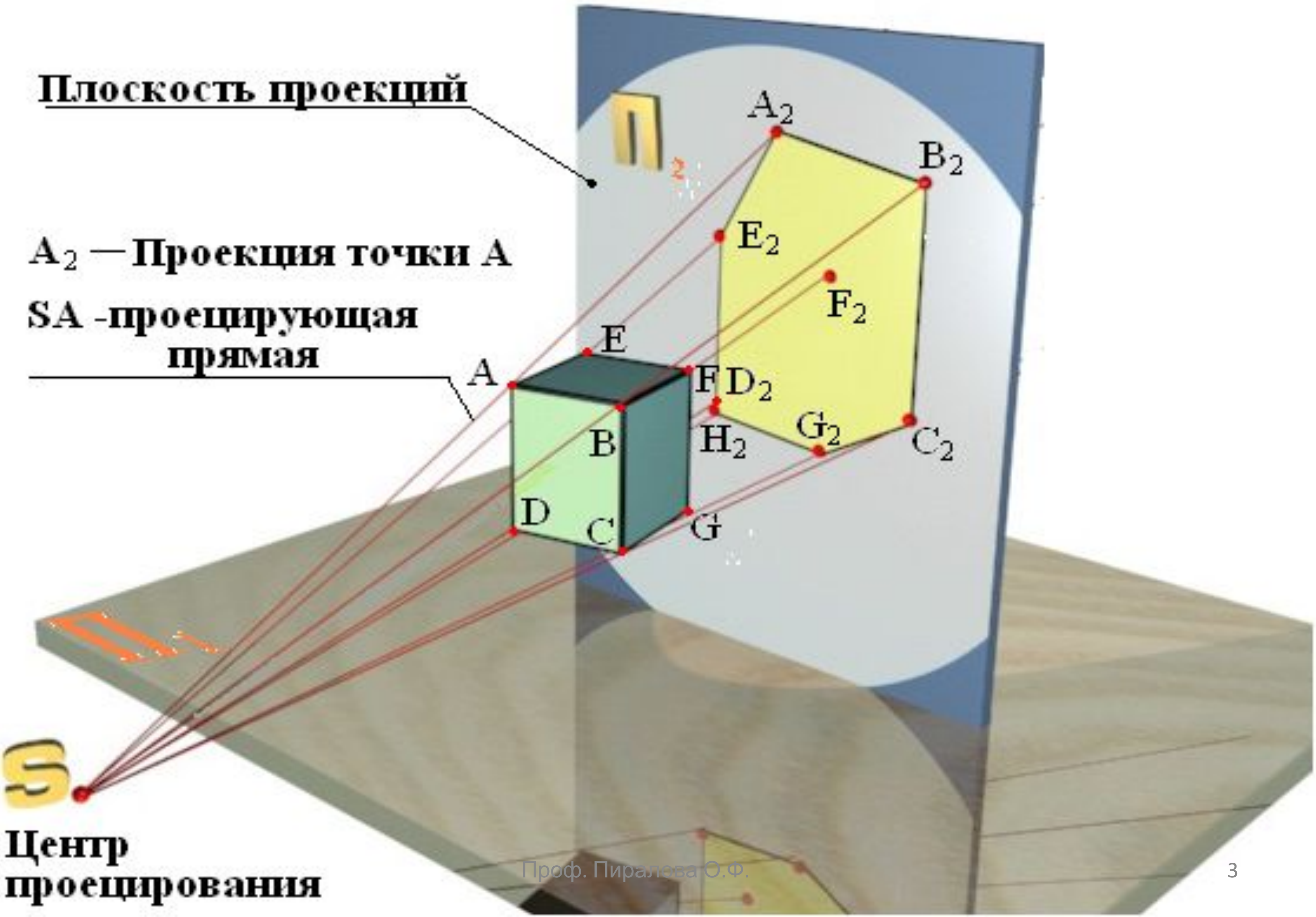
Лекция № 1

Точка, прямая и плоскость на комплексном чертеже

Метод проецирования

- В начертательной геометрии изображения получают методом проецирования (от латинского projectio – бросание вперед). Проекция – это отображение образа (предмета) на плоскость проекций. Идею метода можно рассмотреть на примере проецирования любого образа. Спроецируем призму. Методы проецирования подразделяют на центральное и параллельное.

ПРОЕКЦИЯ ПРИЗМЫ



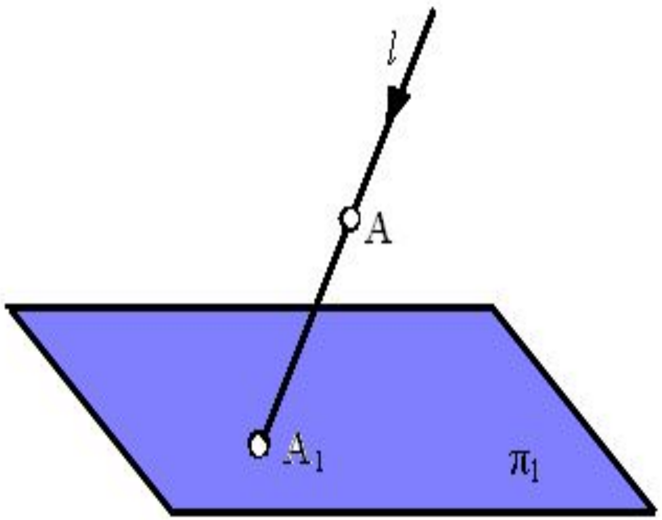
Метод центрального проецирования

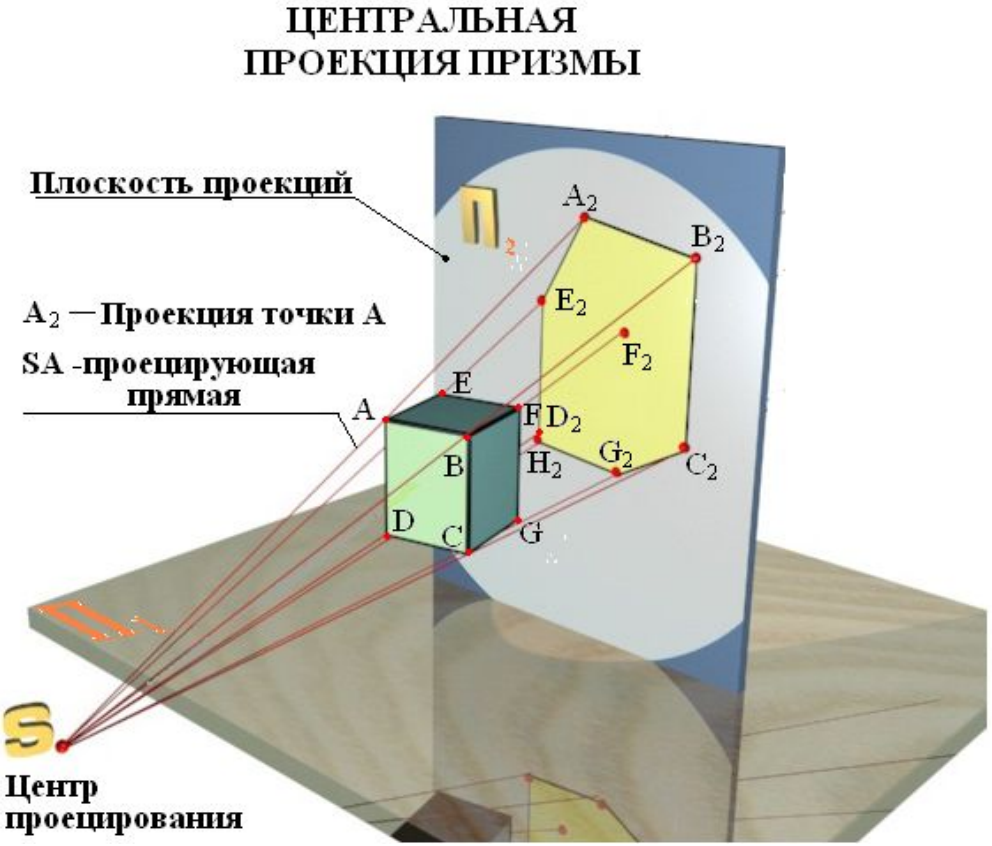
- Сущность центрального проецирования заключается в том, что при этом методе должен быть центр проецирования S и плоскость проекций $П_1$.
- Свойства центрального проецирования:

1. Проекция точки– точка.
2. Проекция прямой – прямая.
3. Сохраняется взаимная принадлежность образов и их проекций.

- В машиностроительном черчении не применяется т. к. размеры оригинала не соответствуют размерам изображения.

Примеры центрального проецирования





Метод параллельного проецирования

Является частным случаем центрального проецирования в котором центр проецирования S удален в бесконечность и проецирующие прямые в этом случае принимаются за параллельные.

Подразделяется на :

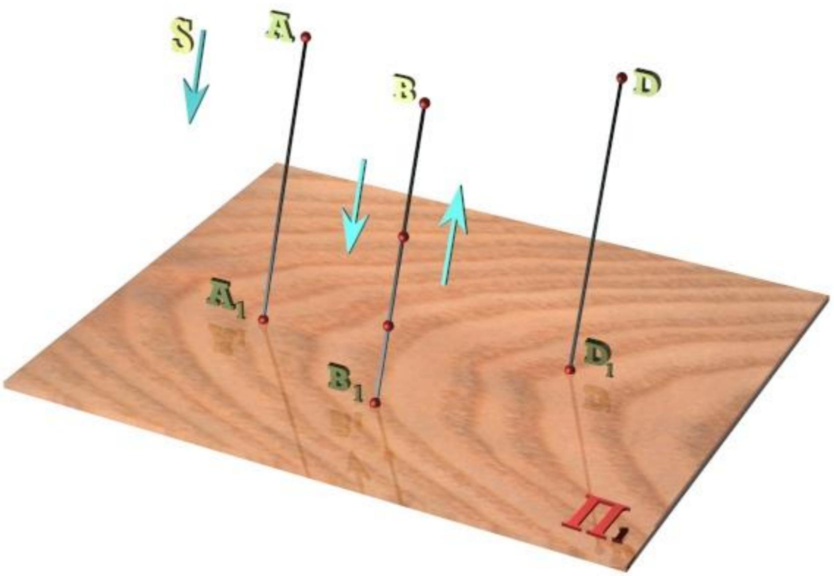
1. Косоугольное;
2. Прямоугольное (ортогональное)

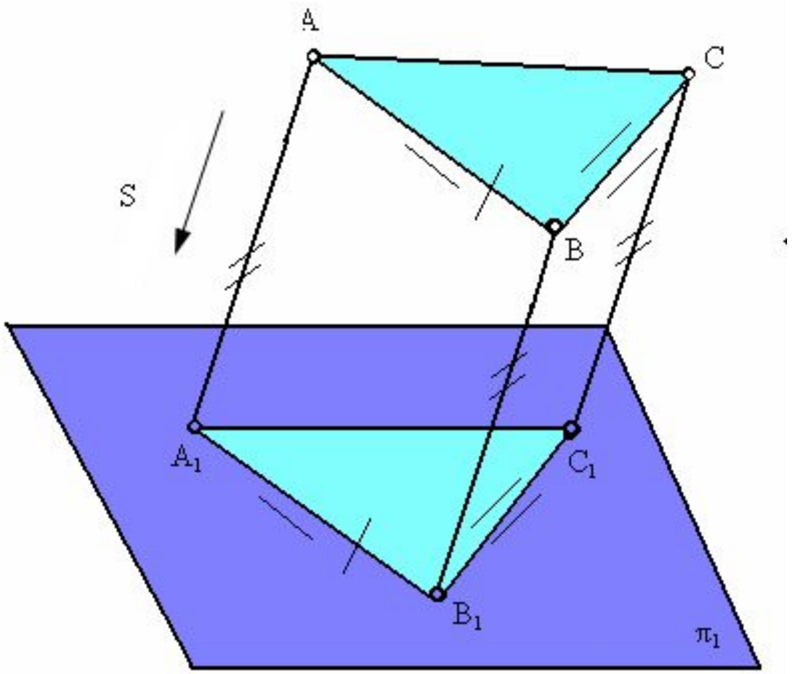
Свойства параллельного проецирования

При параллельном проецировании сохраняются следующие свойства:

1. Проекция точки есть точка.
2. Проекция прямой есть прямая.
3. Сохраняется взаимная принадлежность образов и их проекций (если точка принадлежит линии, то ее ортогональные проекции принадлежат соответствующим проекциям линии).
4. Сохраняется простое отношение трех точек.

Примеры параллельного проецирования точки и плоскости

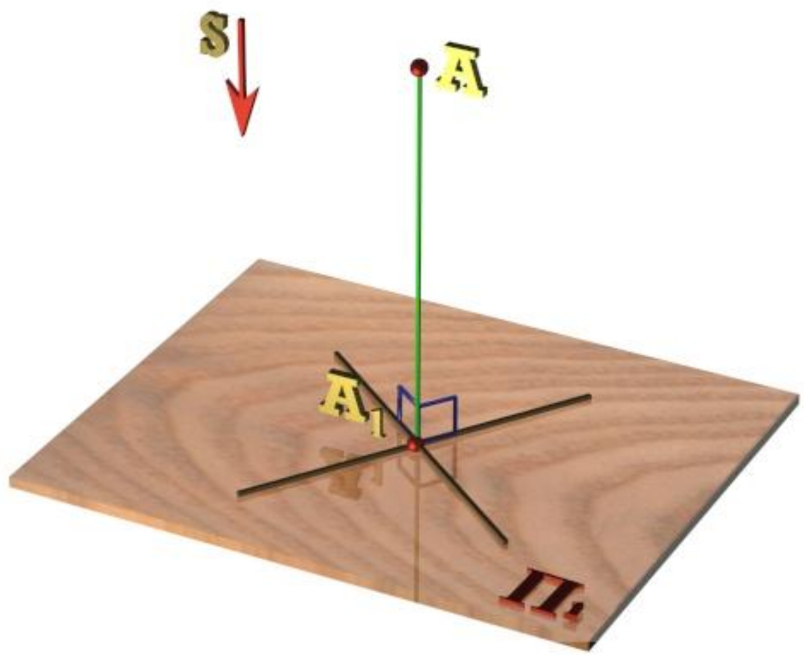




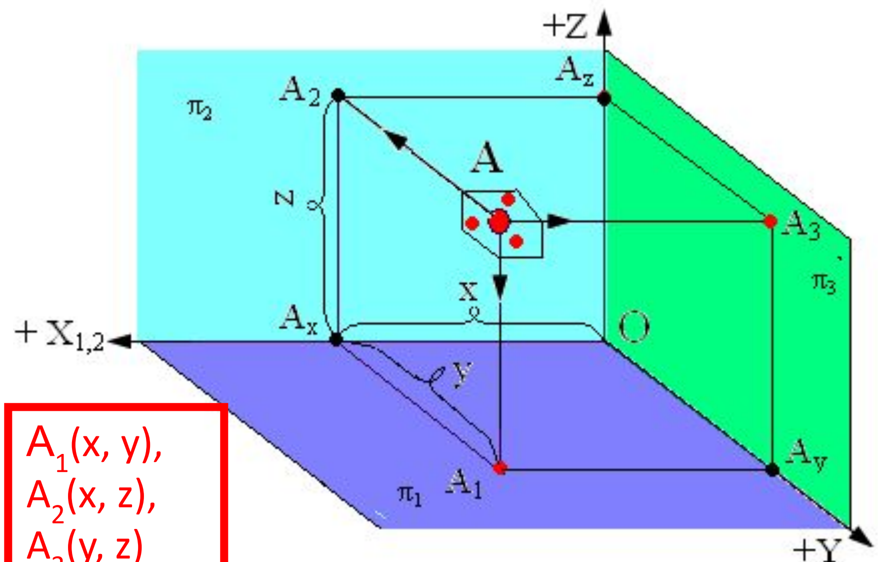
Метод ортогонального проецирования

- Широко применяется в инженерной практике.
- Сущность этого метода в том, что направление проецирования перпендикулярно плоскостям проекций.

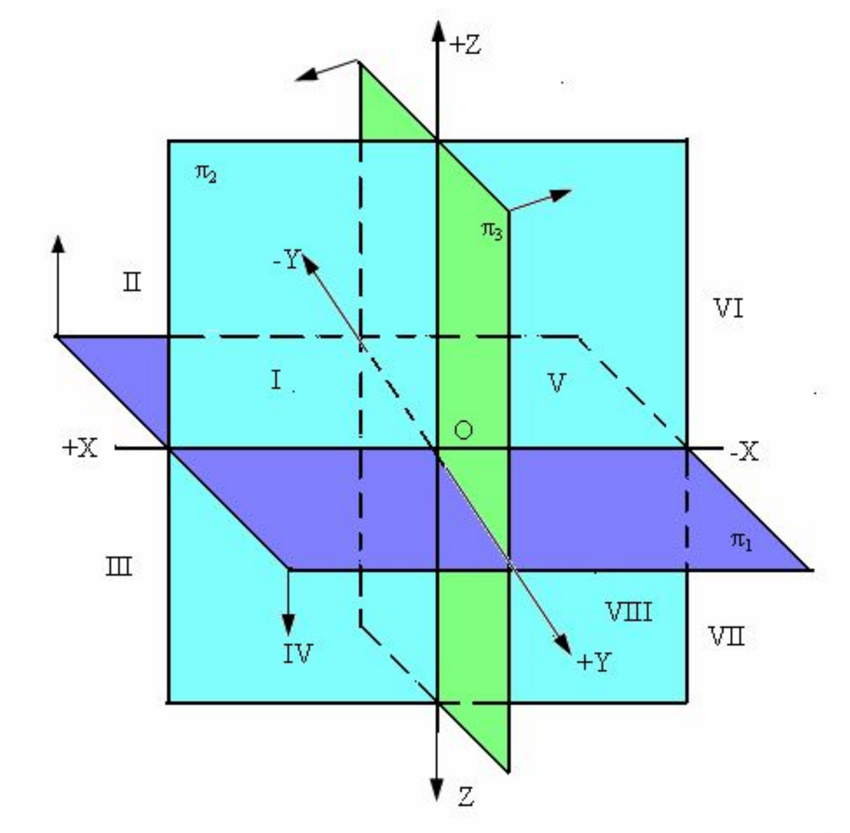
Пример ортогонального проецирования

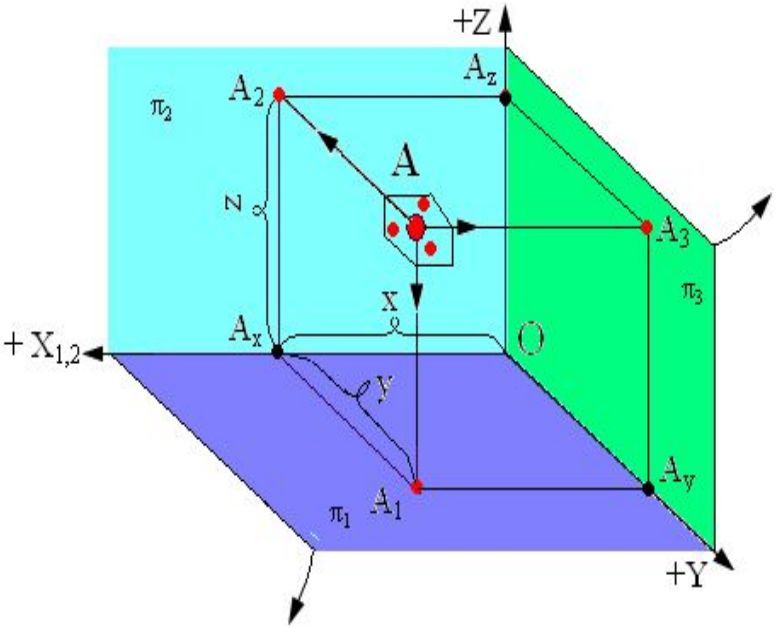


Ортогональные проекции точки



$A_1(x, y)$,
$A_2(x, z)$,
$A_3(y, z)$





$A(x, y, z)$

Координата - кратчайшее расстояние от точки до плоскости проекций

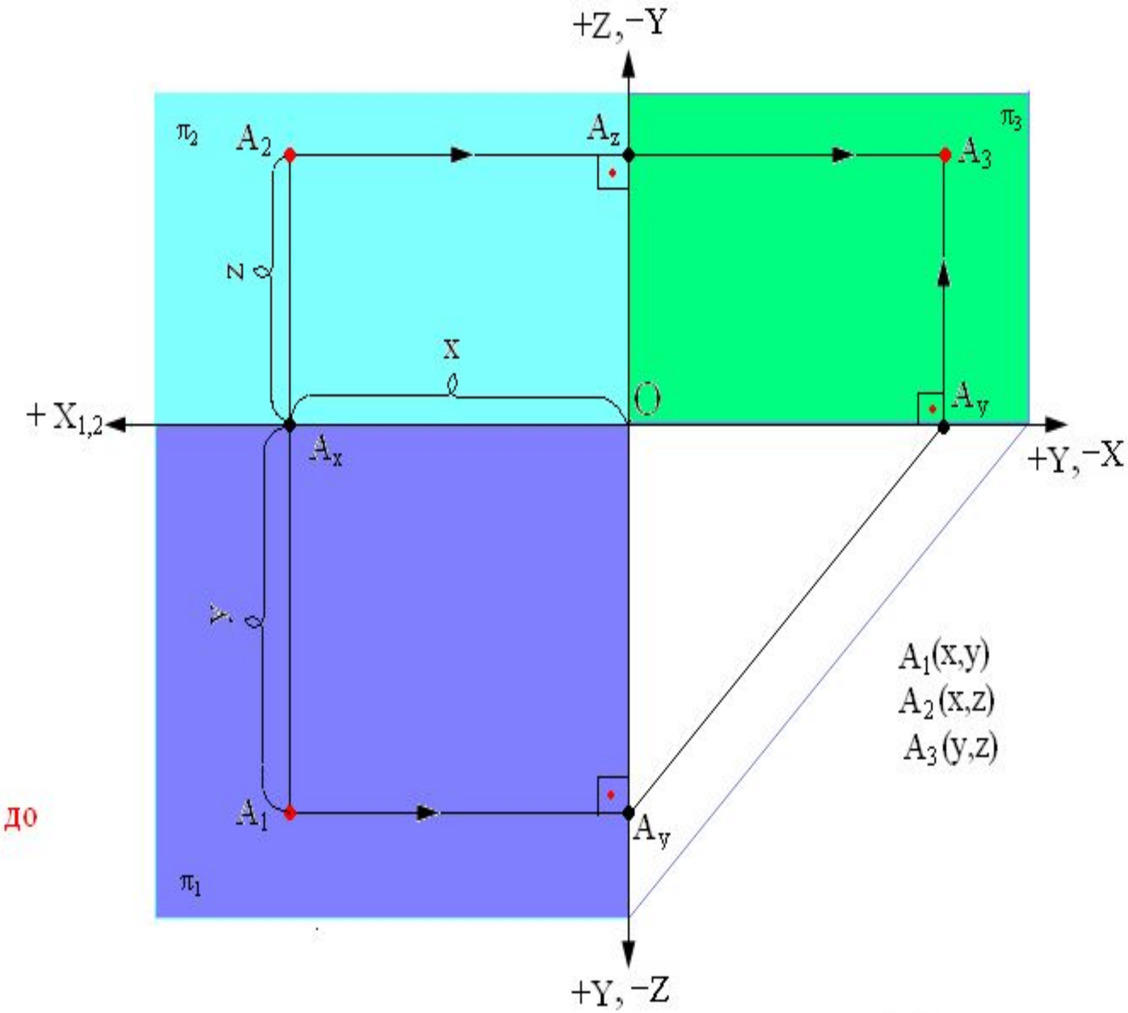


Таблица знаков координат в октантах

Октант	Знак координаты			Октант	Знак координаты		
	x	y	z		x	y	z
I	+	+	+	V	–	+	+
II	+	–	+	VI	–	–	+
III	+	–	–	VII	–	–	–
IV	+	+	–	VIII	–	+	–

Чертеж

- Проекционным чертежом называют такое графическое изображение предмета, которое построено по законам метода проецирования и отвечает требованию обратимости. Обратимость изображения дает возможность восстановить (реконструировать предмет в пространстве) с точностью до всех его позиционных и метрических свойств. К позиционным относят свойства, которые связаны с вопросами относительного расположения. Метрическими считаются свойства фигур, связанные с вопросами измерения длин, расстояний, углов, площадей и т.д.. Чертеж должен быть наглядным.

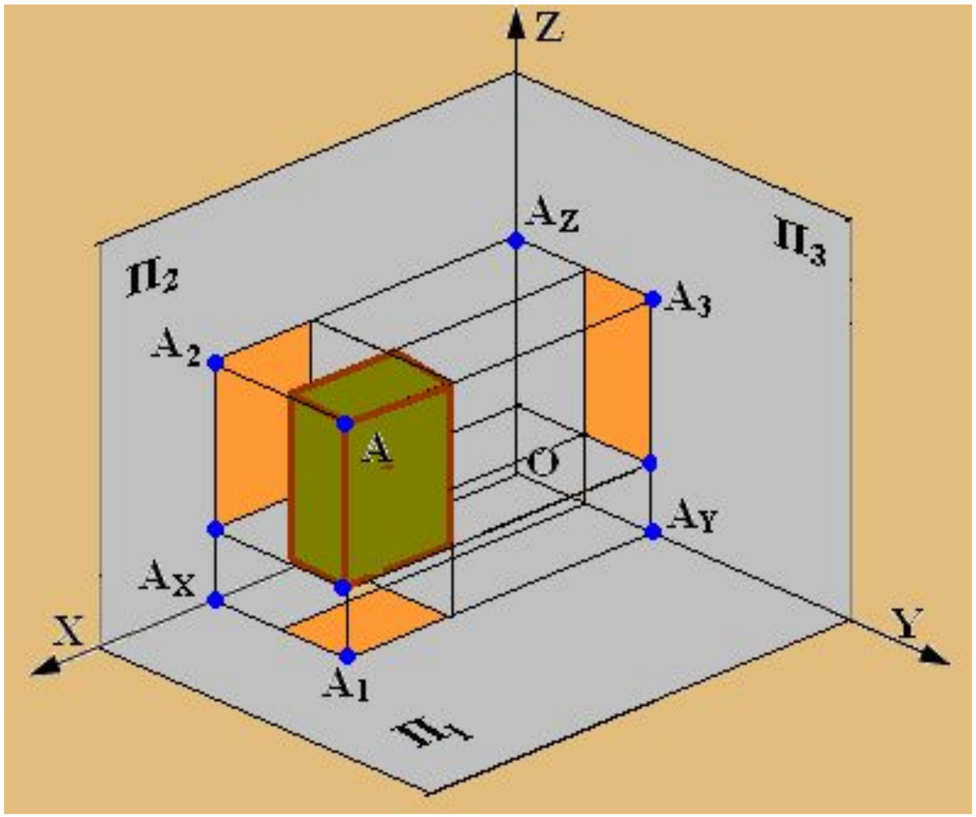
Преобразование пространственного чертежа в плоский

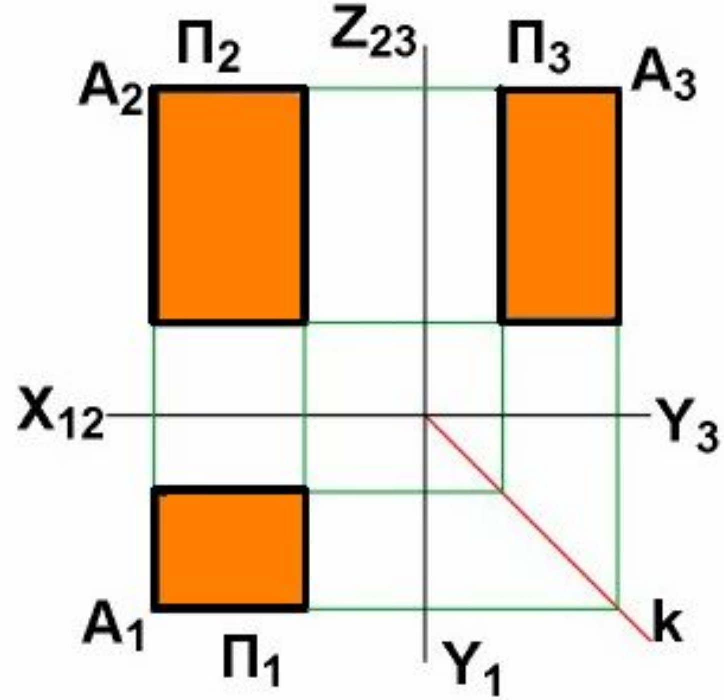
- Осуществляется путем совмещения горизонтальной $П_1$ и профильной $П_3$ плоскостей проекций с фронтальной $П_2$. Для этого $П_1$ поворачиваем на 90 градусов вокруг оси X в направлении движения часовой стрелки, а $П_3$ вправо вокруг оси Z.

Комплексный чертеж

- КЧ – это ортогональное отображение предмета на 2 или 3 взаимно перпендикулярные плоскости проекций, развернутые до плоскости чертежа($П_2$).

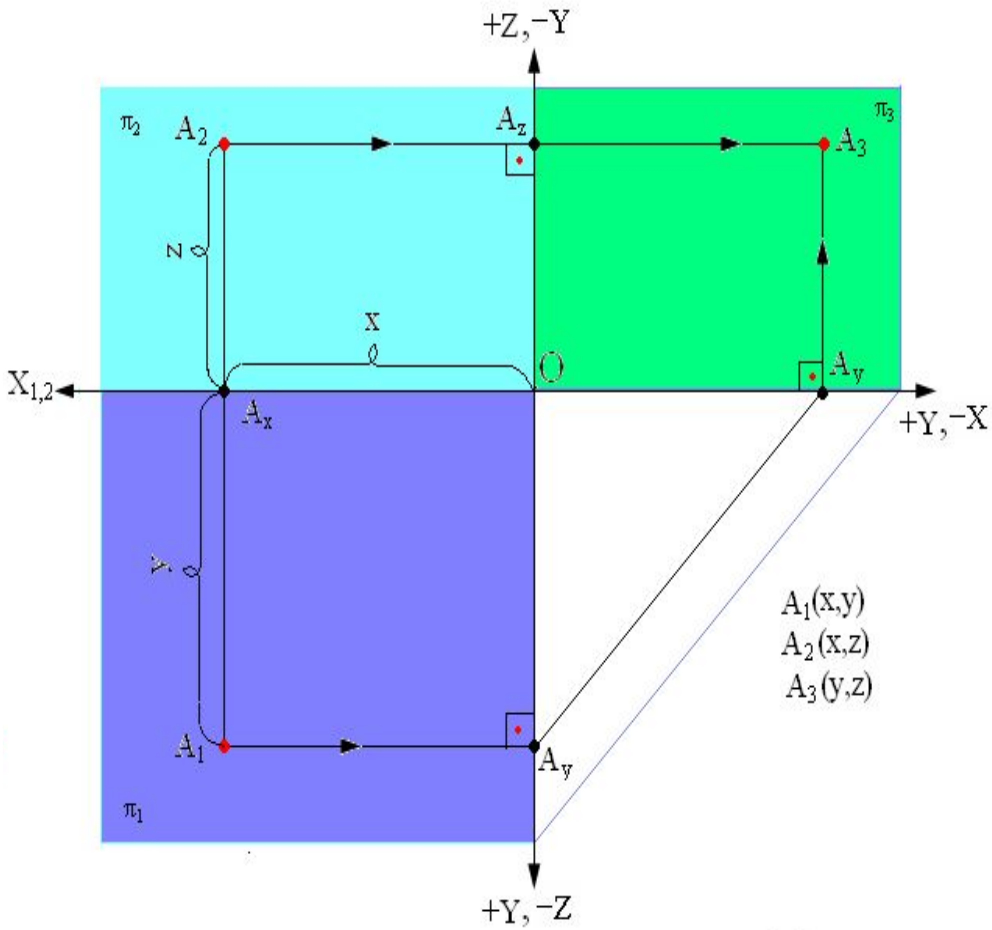
Комплексный чертеж призмы

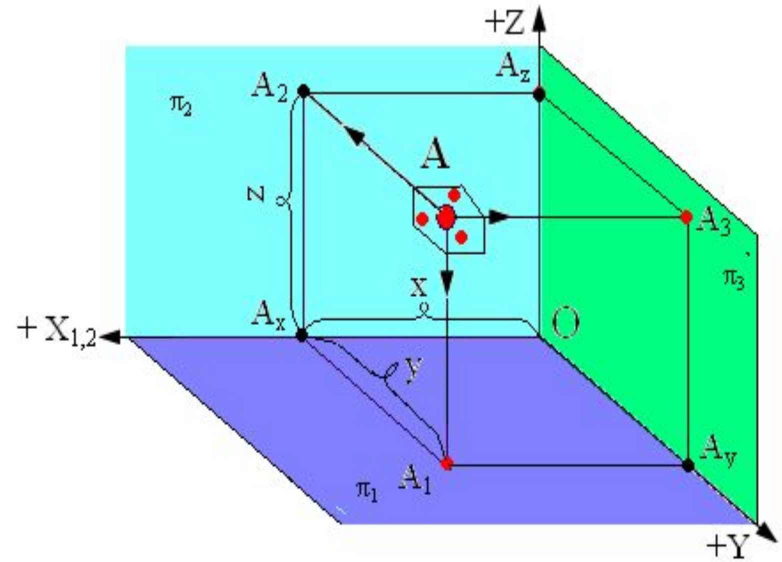




Точка

- Точка. как математическое понятие не имеет размеров. Очевидно, если объект проецирования является нульмерным образом, то говорить о его проецировании бессмысленно.
- В геометрии под точкой целесообразно понимать физический объект, имеющий линейные измерения. Условно за точку будем принимать шарик с бесконечно малым радиусом. При такой трактовке понятия точки можно говорить о ее проекциях.


+Z, −Y
π2
A2
Az
π3
A3
z
x
O
Ay
X1,2
+Y, −X
Ax
y
A1(x,y)
A2(x,z)
A3(y,z)
A1
Ay
π1
+Y, −Z


+Z
Az
A2
π2
A
z
A3
π3
x
Ax
+ X1,2
O
y
Ay
π1
A1
+Y

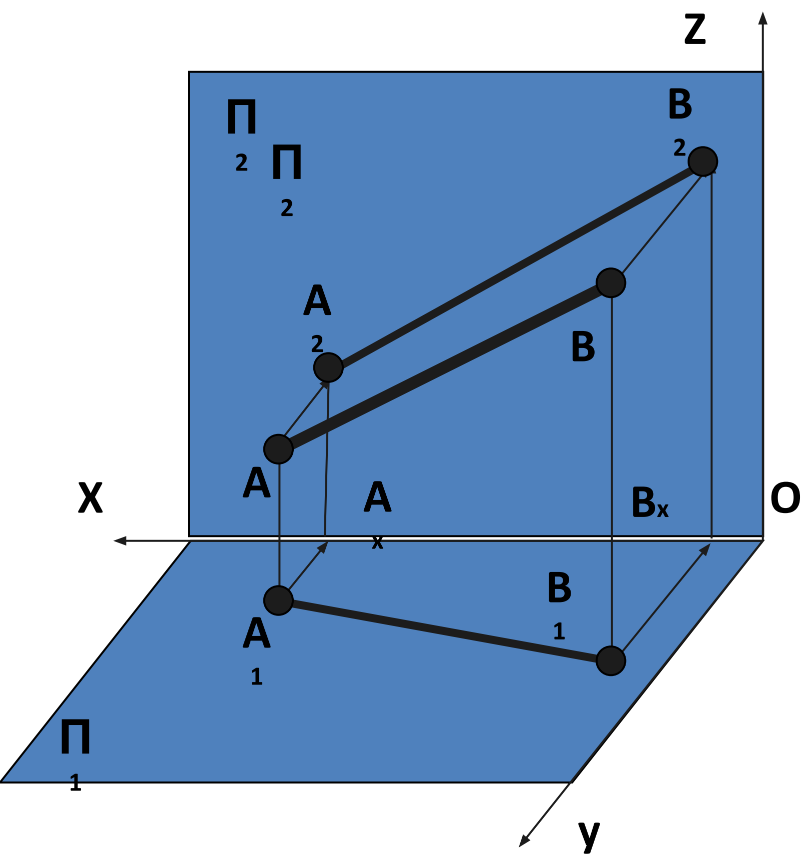
Эпюр прямой

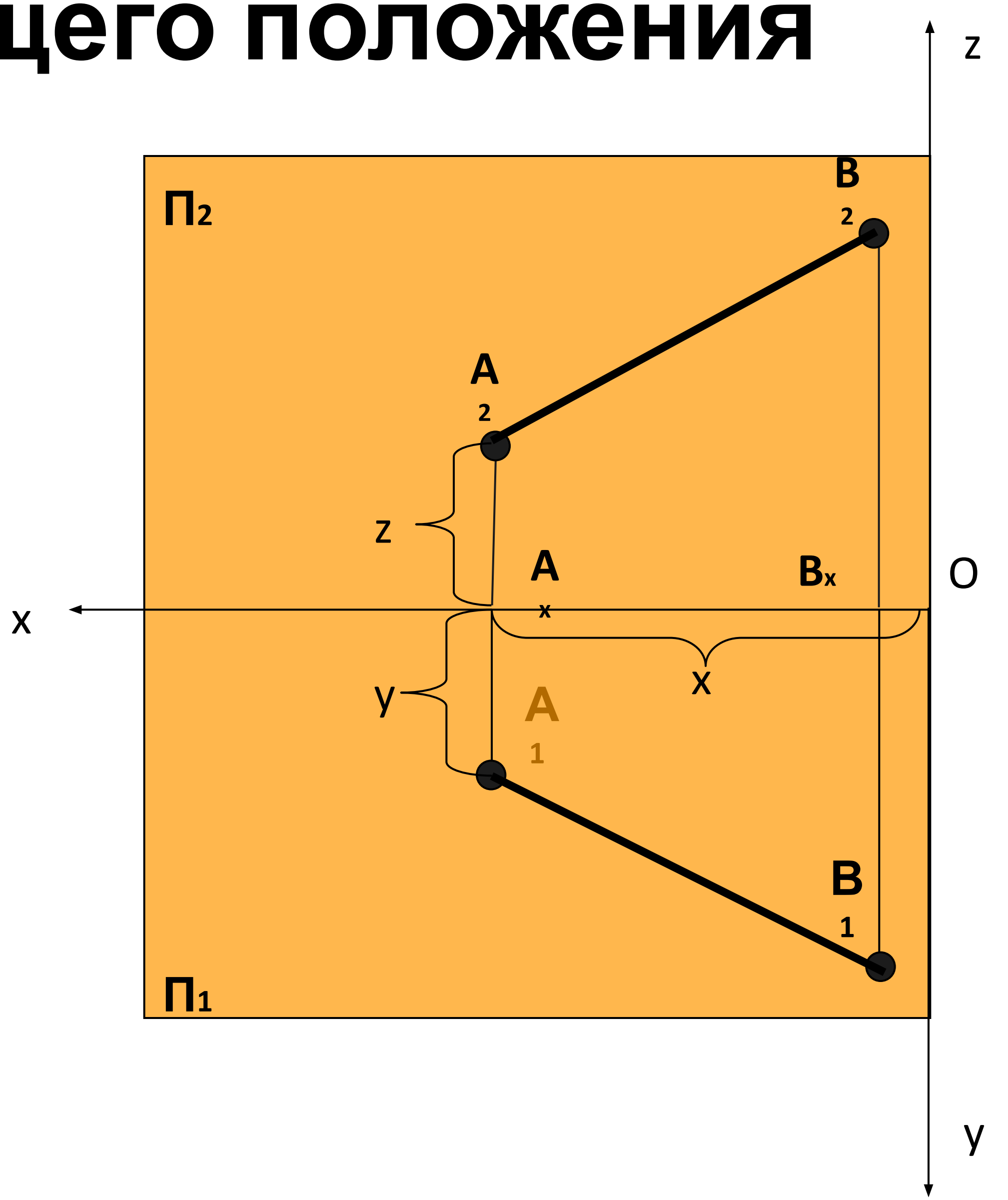
Положение прямой линии однозначно в пространстве определяется заданием двух ее точек.

Комплексный чертеж прямой может быть представлен двумя проекциями прямой.

Если прямая не параллельна ни одной плоскости проекций, ее называют прямой общего положения. Такая прямая изображена на рисунке.

Ортогональные проекции прямой общего положения





Частные случаи расположения прямой

Кроме общего случая существуют **частные** случаи расположения прямой по отношению к заданной системе плоскостей проекций:

А. Прямая **параллельна** плоскости проекции.

Б. Прямая **перпендикулярна** плоскости проекции.

В. Прямая **принадлежит** плоскости проекции (частный случай параллельности).

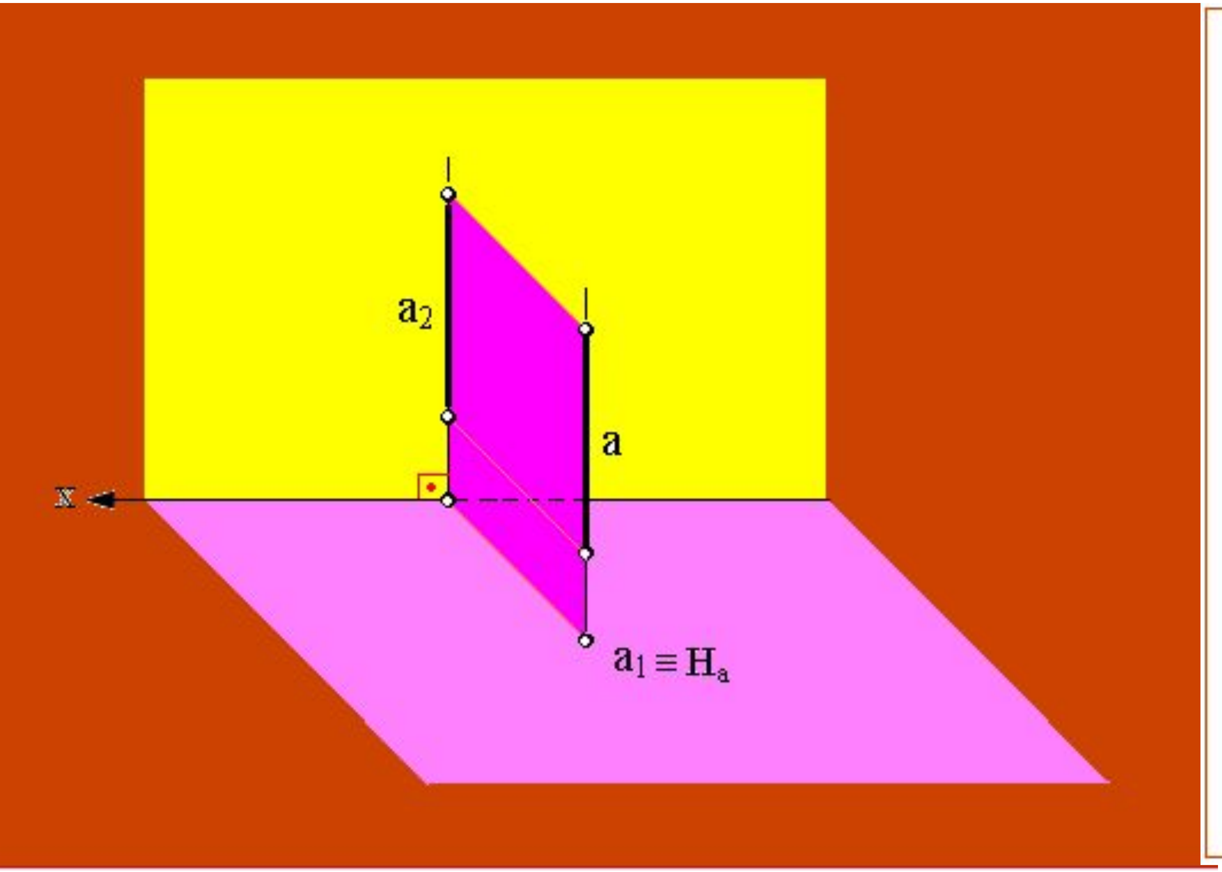
Проецирующие прямые

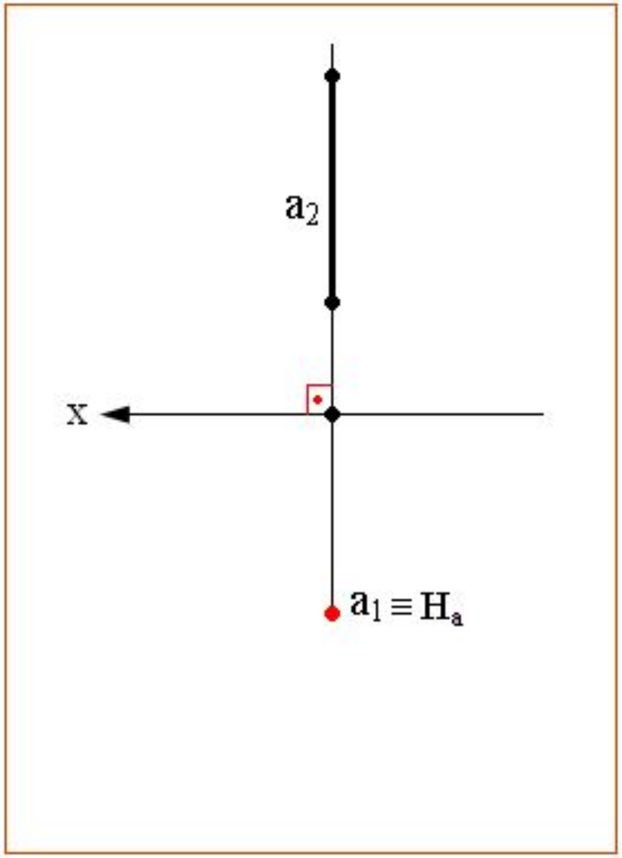
Это прямые, **перпендикулярные** к плоскостям проекций.

Горизонтально-проецирующая – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекции.

Такая прямая **проецируется** на плоскость π_1 **в точку**; ее фронтальная проекция перпендикулярна оси x.

Иллюстрация горизонтально-проецирующей прямой

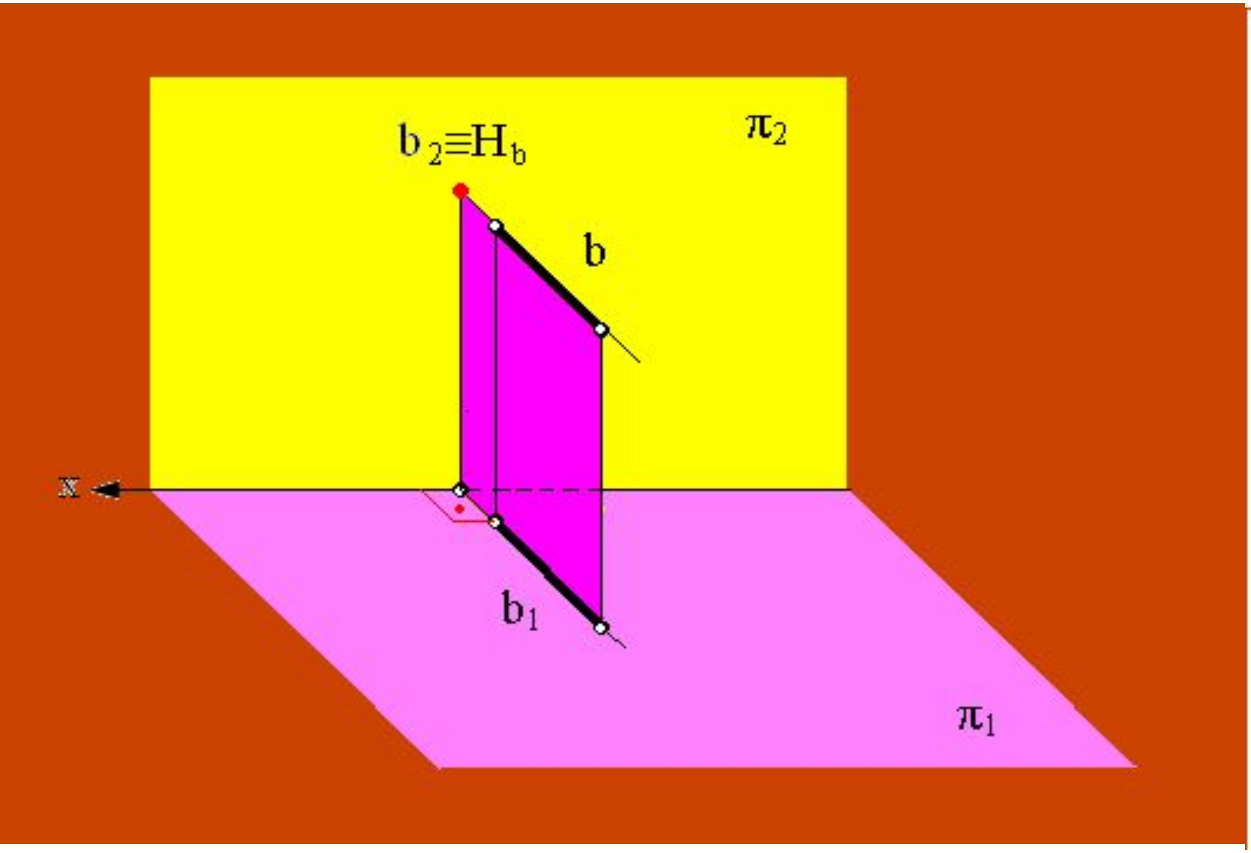


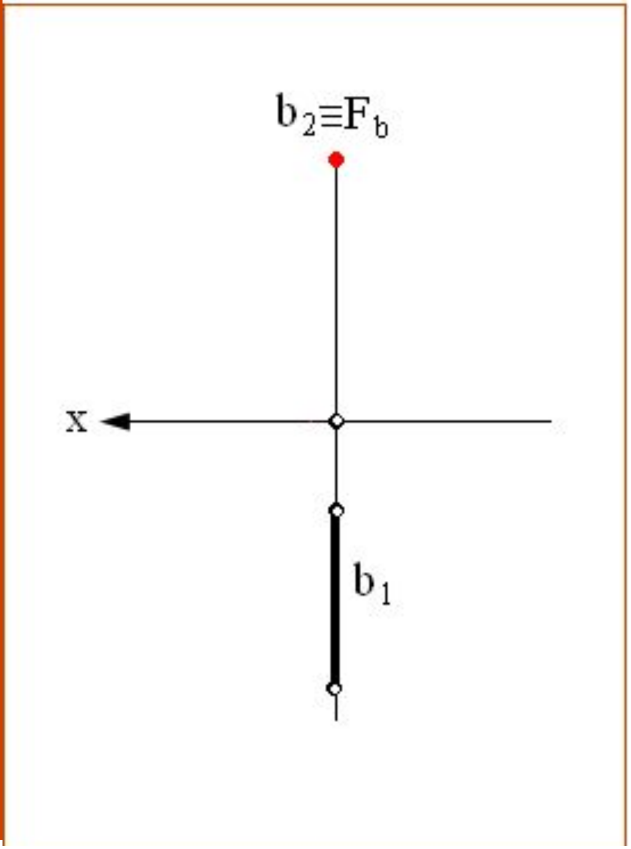


Фронтально-проецирующая – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекции.

Эта прямая проецируется на плоскость π_2 в точку, а ее горизонтальная проекция перпендикулярна оси х.

Фронтально-проецирующая прямая





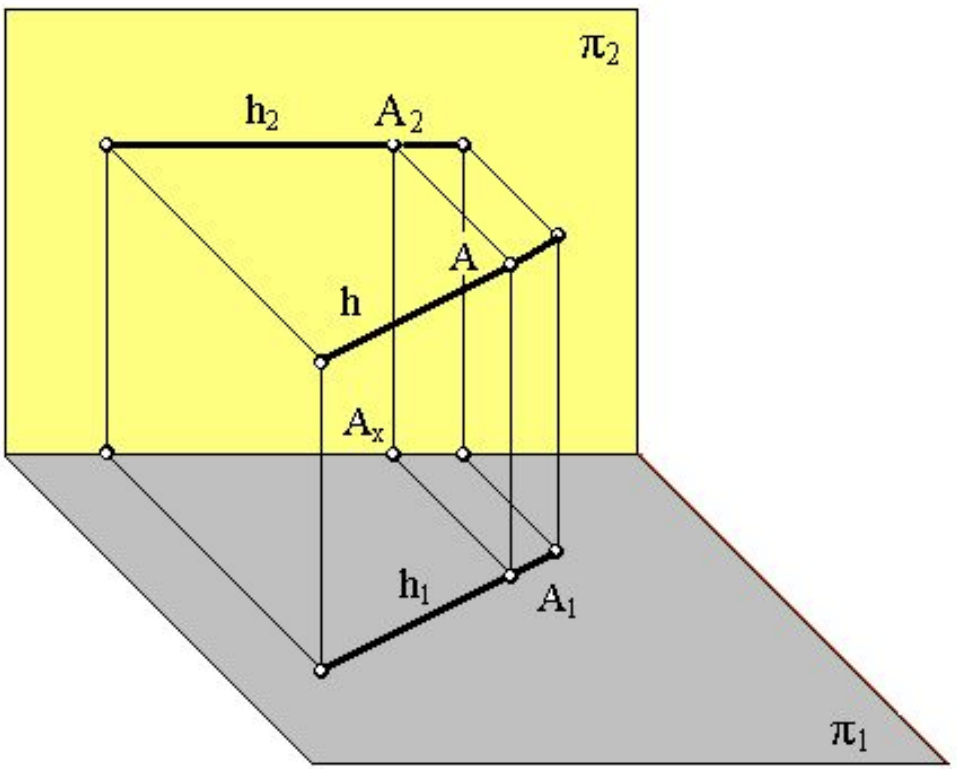
Прямые, параллельные плоскостям проекций (горизонталь, фронталь)

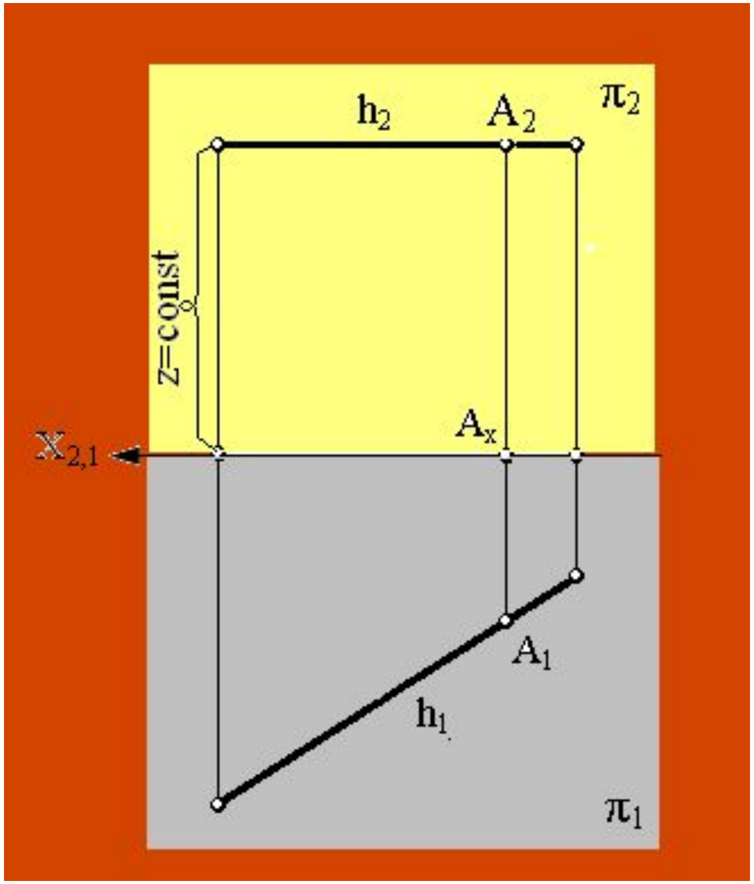
Горизонталь – прямая, **параллельная** горизонтальной плоскости проекции: $h \parallel \pi_1$.

Все точки горизонтали удалены на одинаковые расстояния от плоскости π_1.

Фронтальная проекция горизонтали $h_2 \parallel$ оси x. Горизонтальная проекция может занимать любое положение.

Иллюстрация линий уровня. Горизонталь



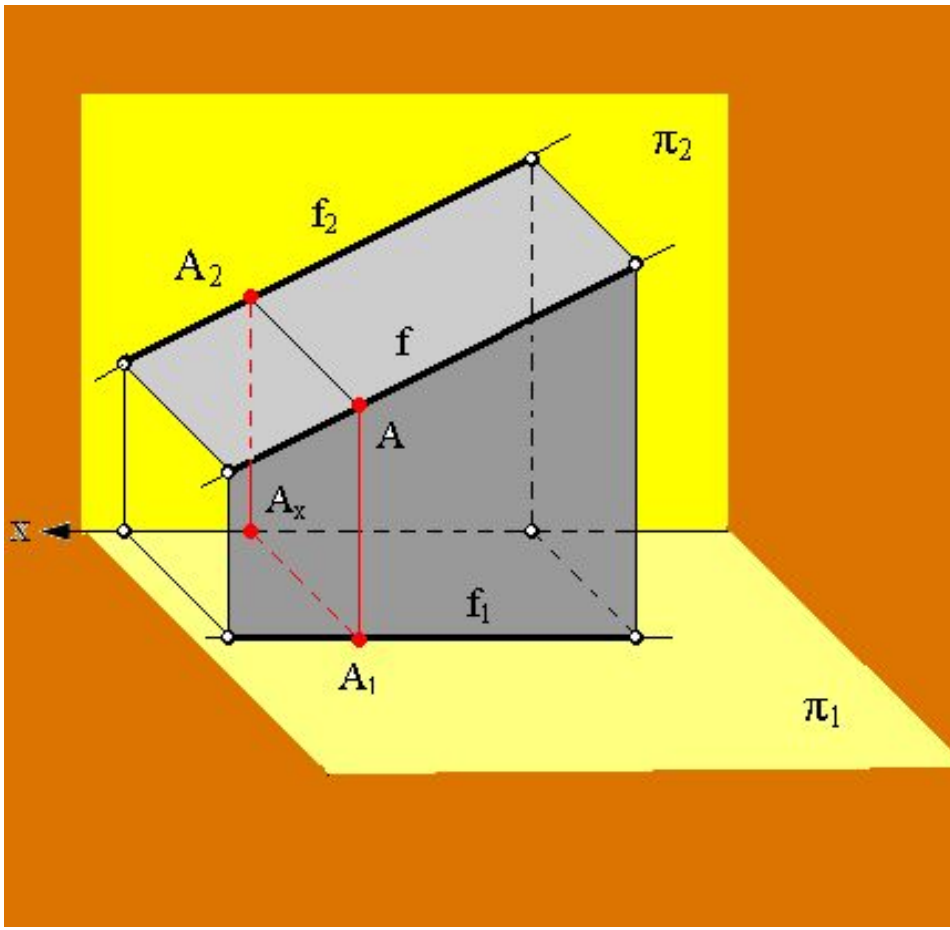


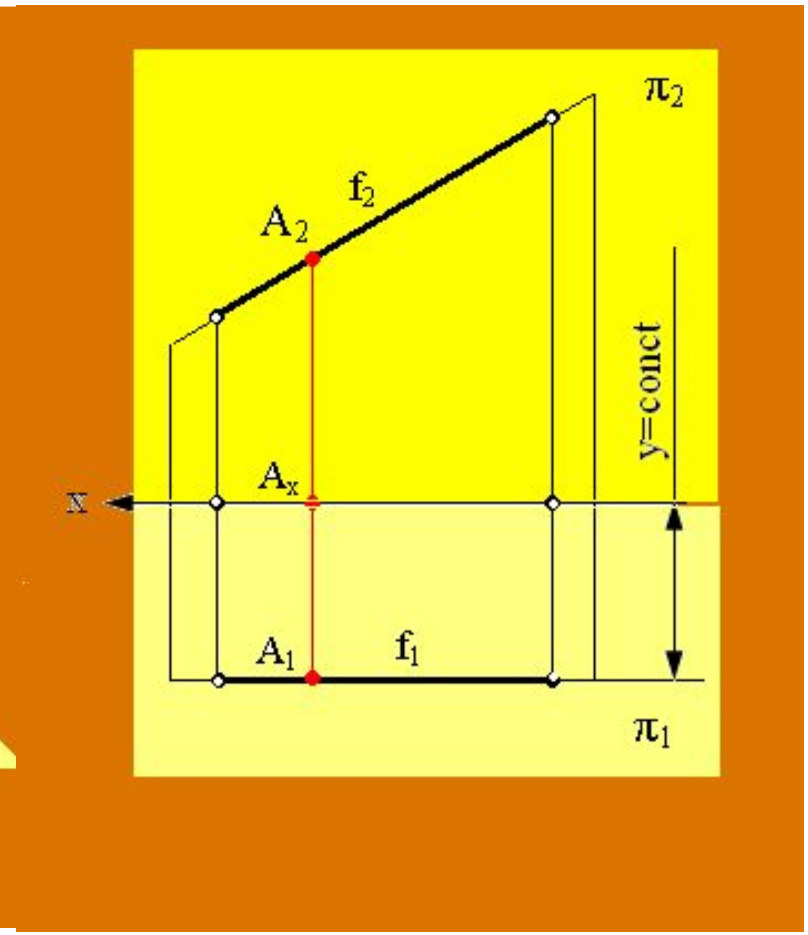
Фронталь – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекции: $f \parallel \pi_2$.

Все точки фронтали удалены на одинаковые расстояния от плоскости π_2.

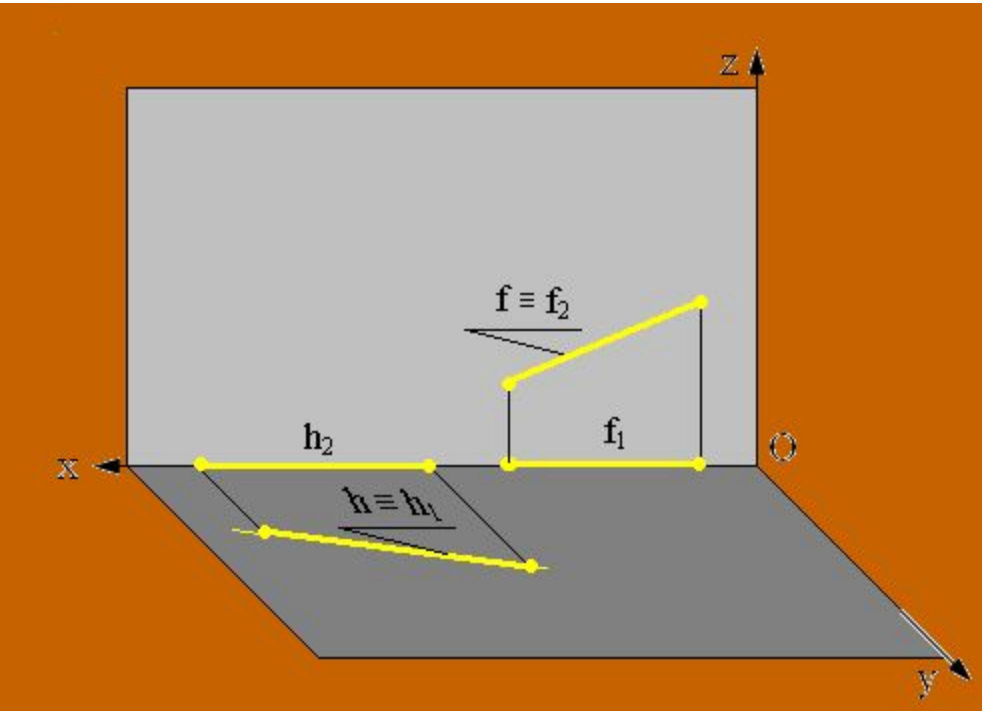
Горизонтальная проекция $f_1 \parallel$ оси x. Фронтальная проекция может занимать любое положение.

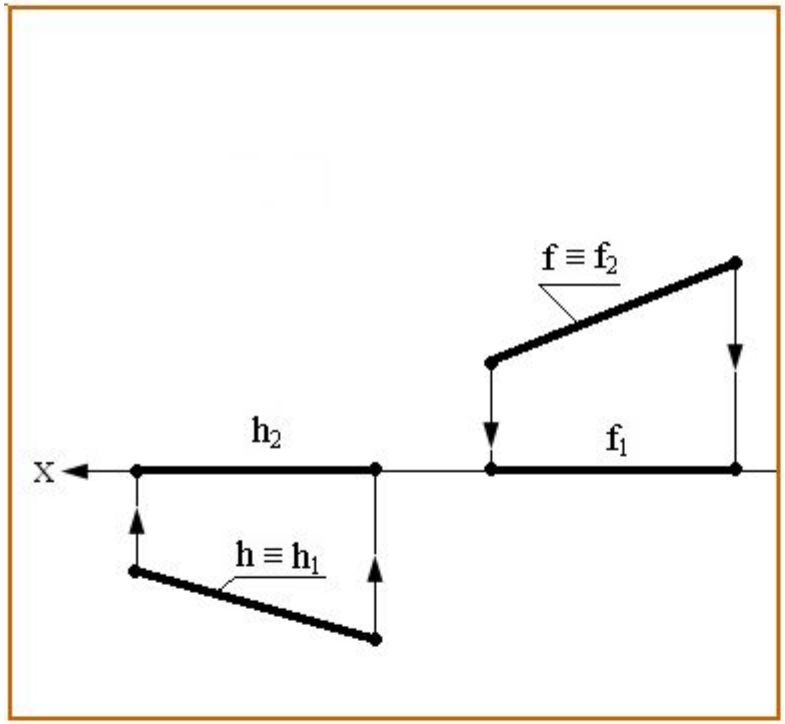
Иллюстрация линий уровня. Фронталь





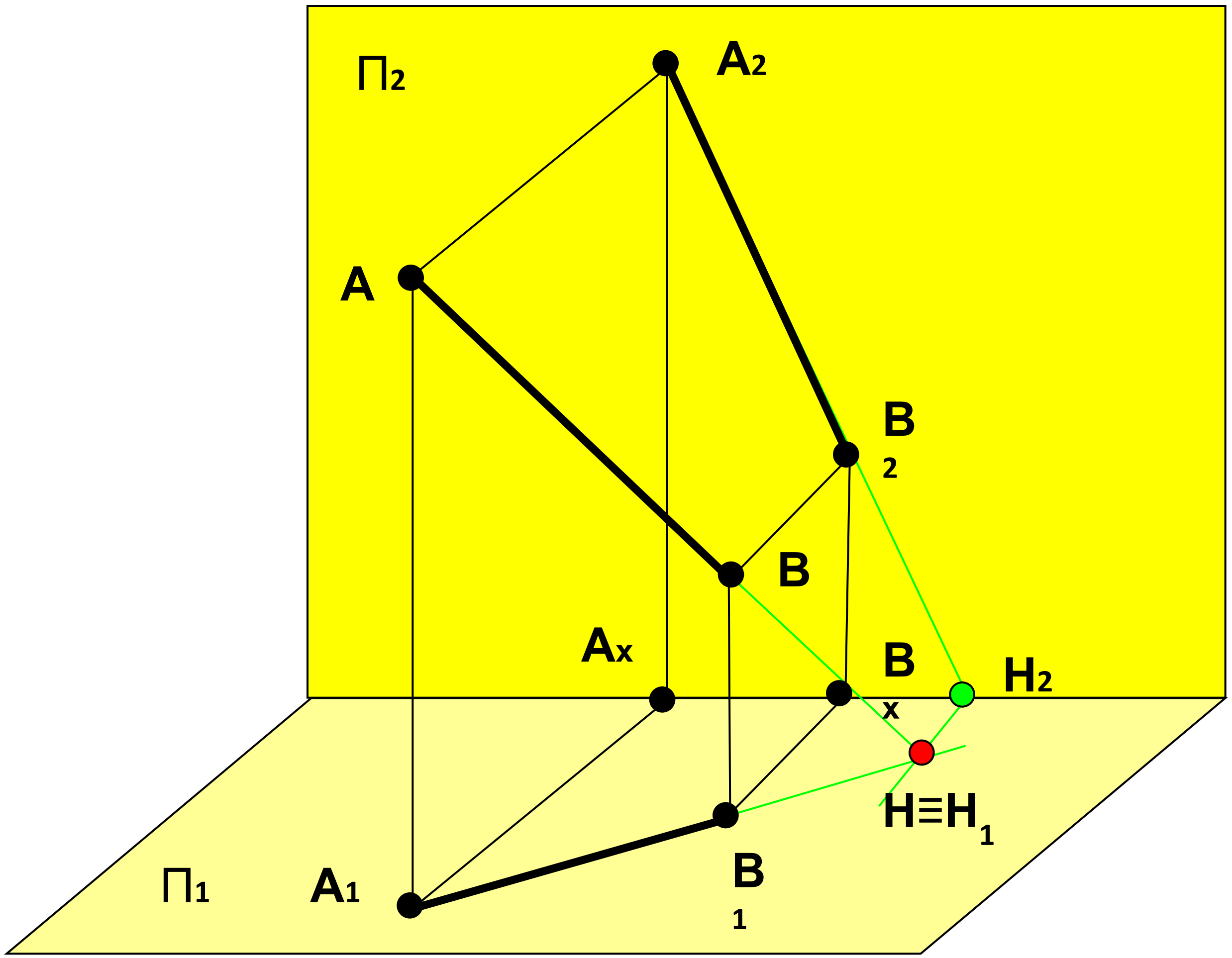
Прямая, принадлежащая плоскости проекций





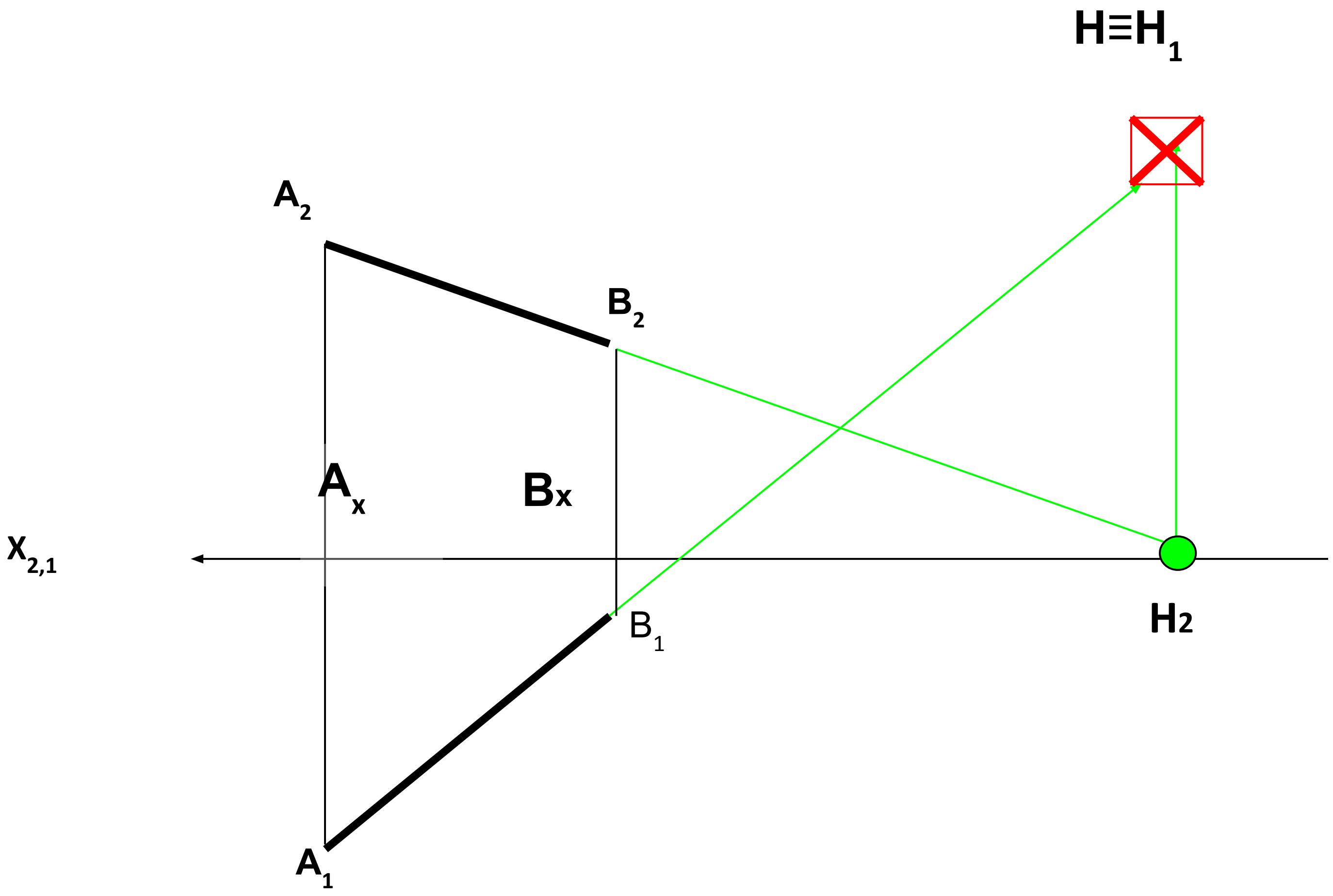
Следы прямой

Прямая общего положения пересекает все основные плоскости проекций. Точку пересечения (встречи) прямой с плоскостью проекций называют следом прямой.

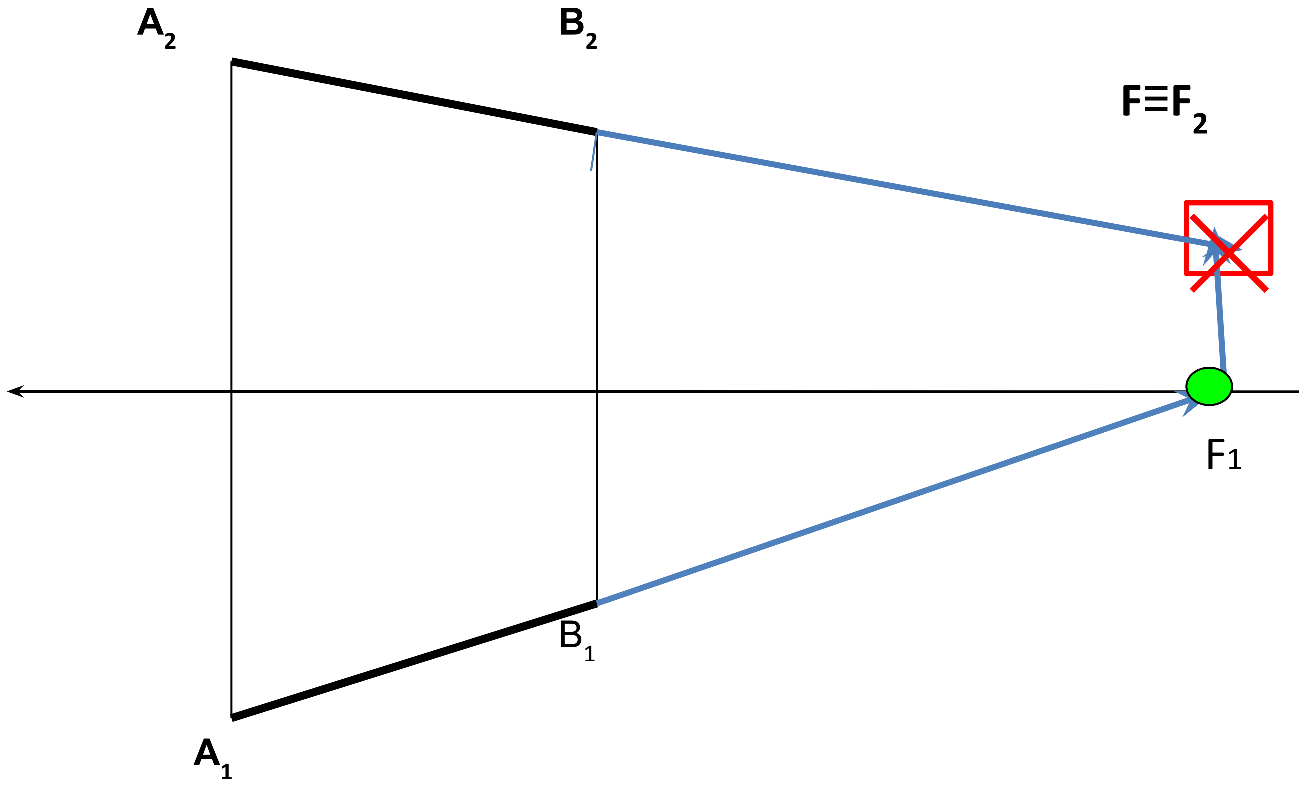


П2
A2
A
B2
B
Ax
Bx
H2
H≡H1
П1
A1
B1

Построение горизонтального следа прямой



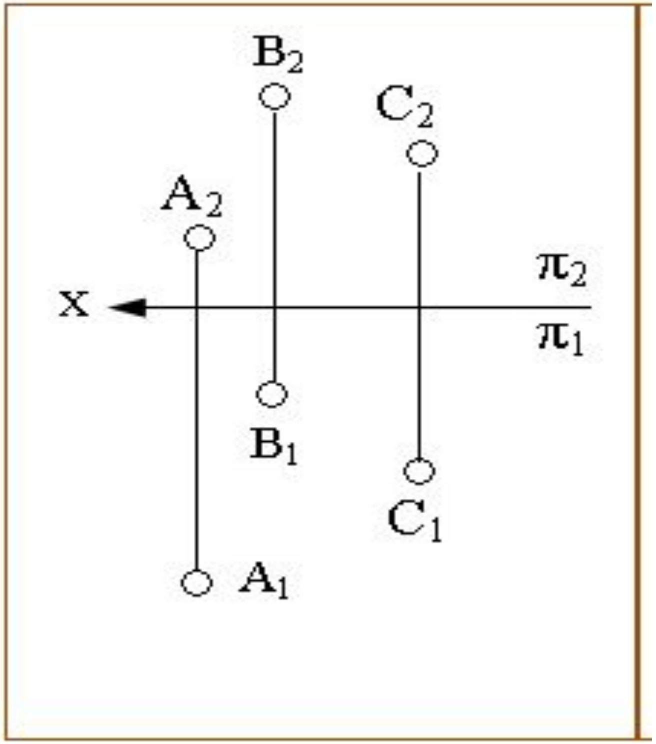
Построение фронтального следа прямой



Задание плоскости на комплексном чертеже

Для задания плоскости на эпюре Монжа достаточно указать проекции

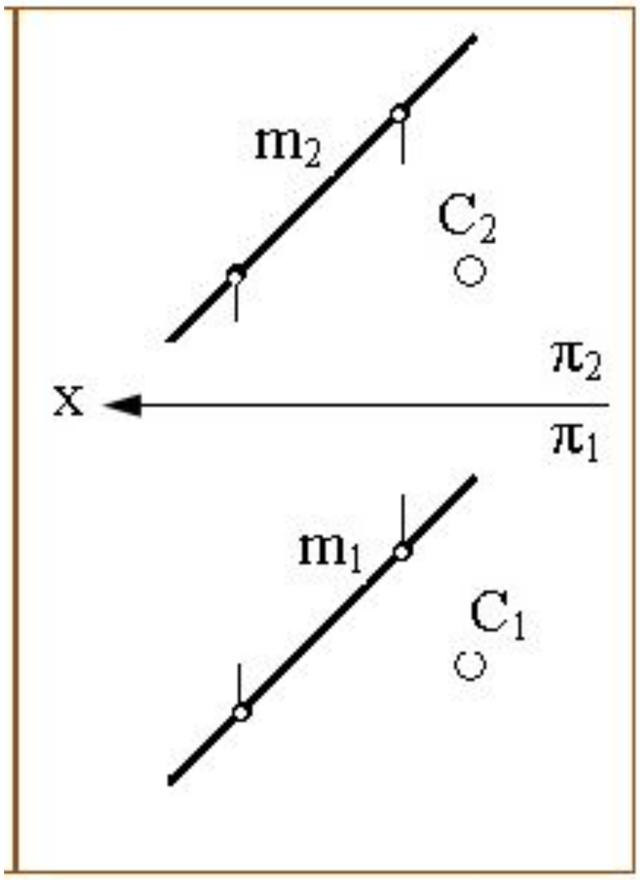
а) трех различных точек, не принадлежащих одной прямой



Задание плоскости на комплексном чертеже

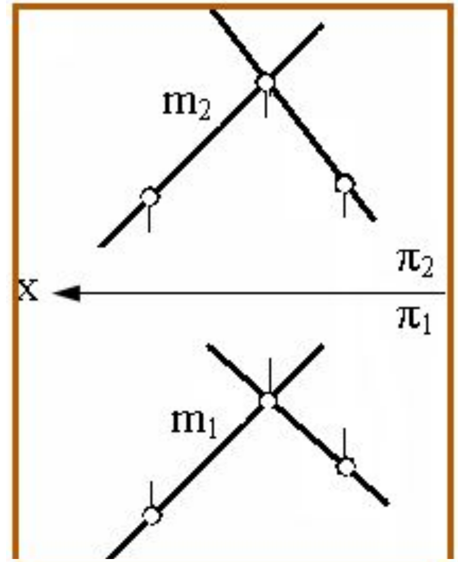
Для задания плоскости на эпюре Монжа достаточно:

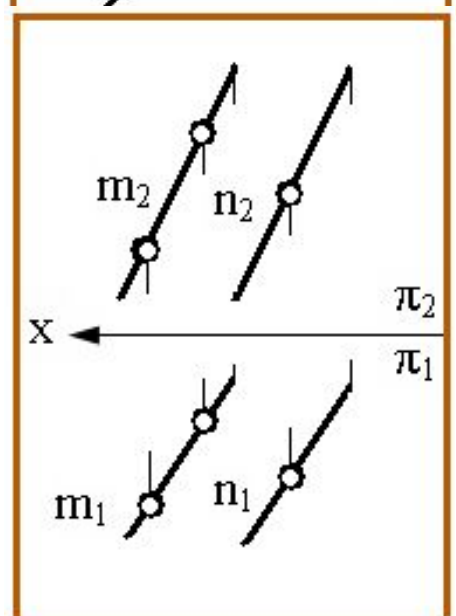
б) указать проекции прямой и не принадлежащей ей точки



Задание плоскости

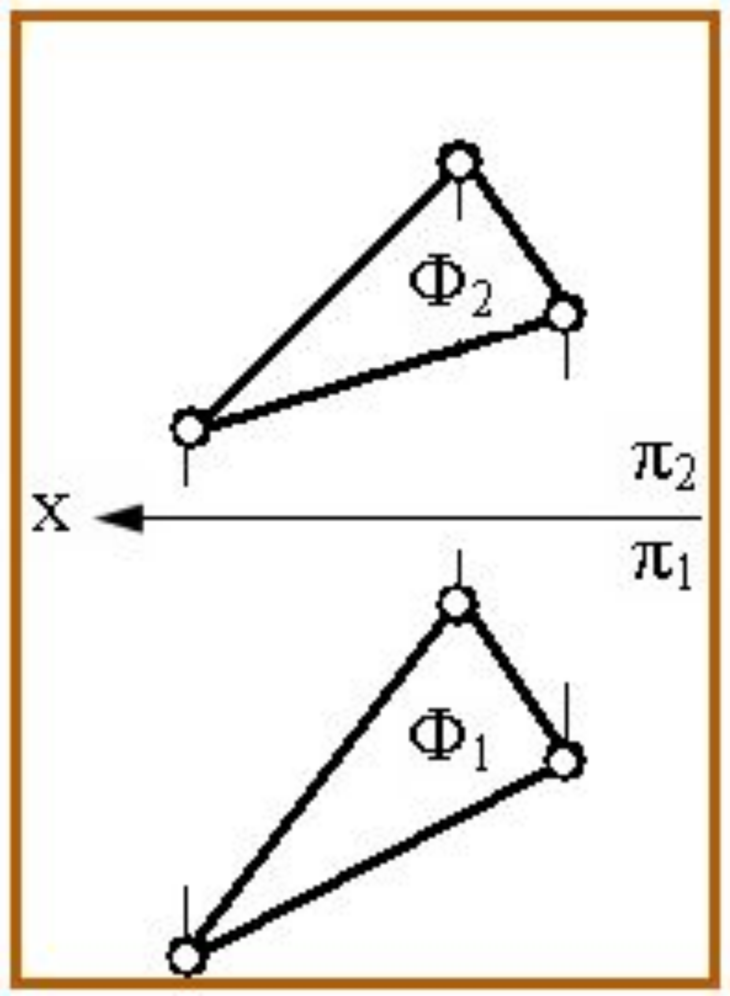
в) с помощью задания проекций двух прямых, пересекающихся в собственной или несобственной точке





Задание плоскости

Проекциями отсека плоской фигуры Ф



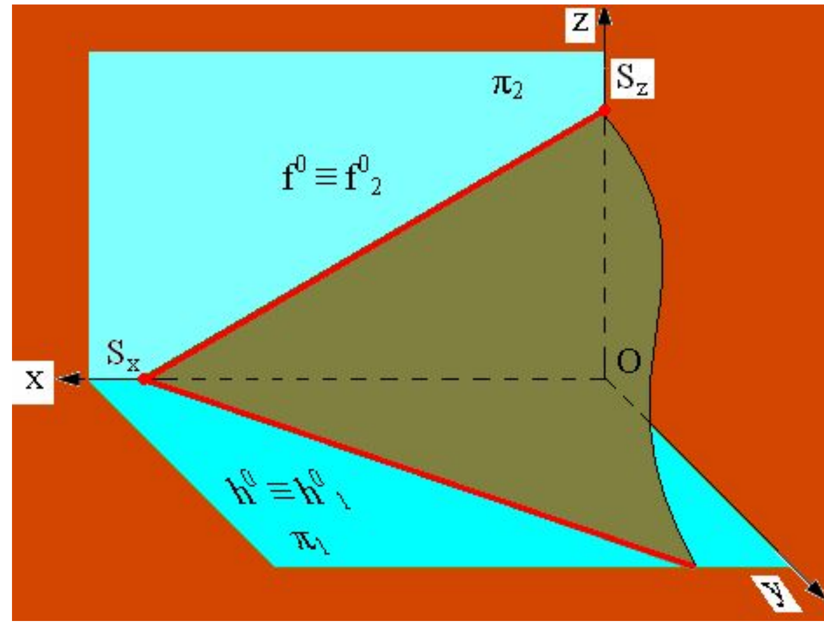
Задание плоскости следами

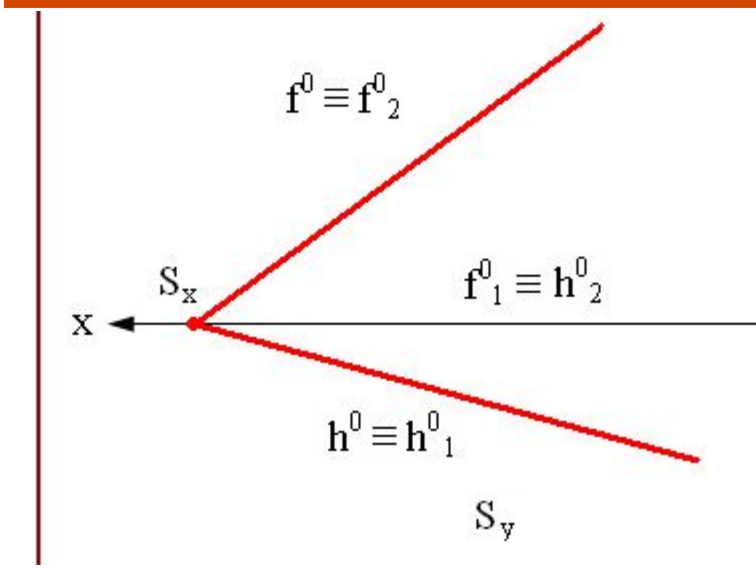
Задание плоскости следами обладает преимуществом перед другими вариантами ее изображения на эпюре:

1) сохраняется наглядность изображения;

2) требуется указать только две прямые вместо четырех или шести .

На рис. Показана плоскость общего положения.



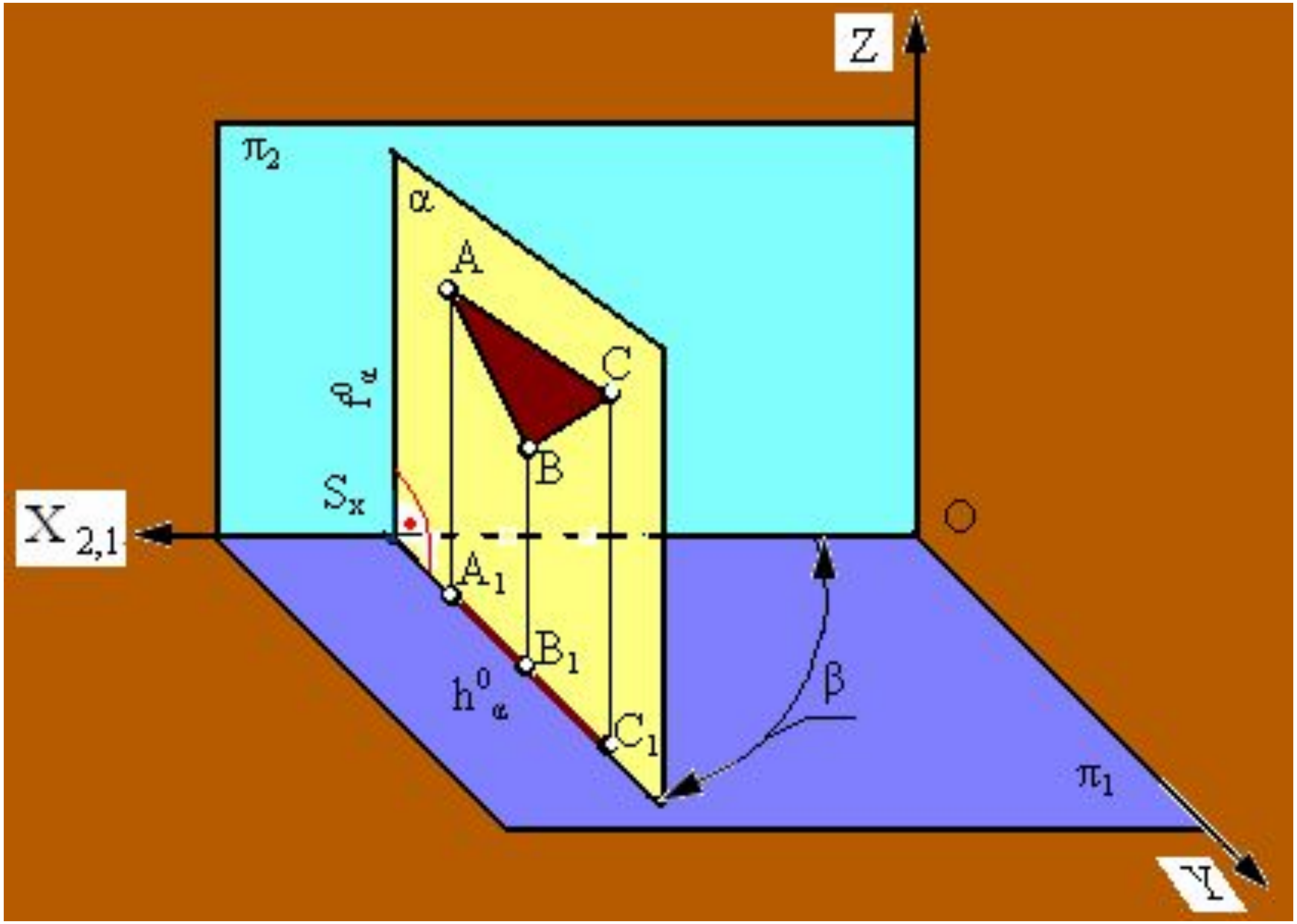


Частные случаи расположения плоскости

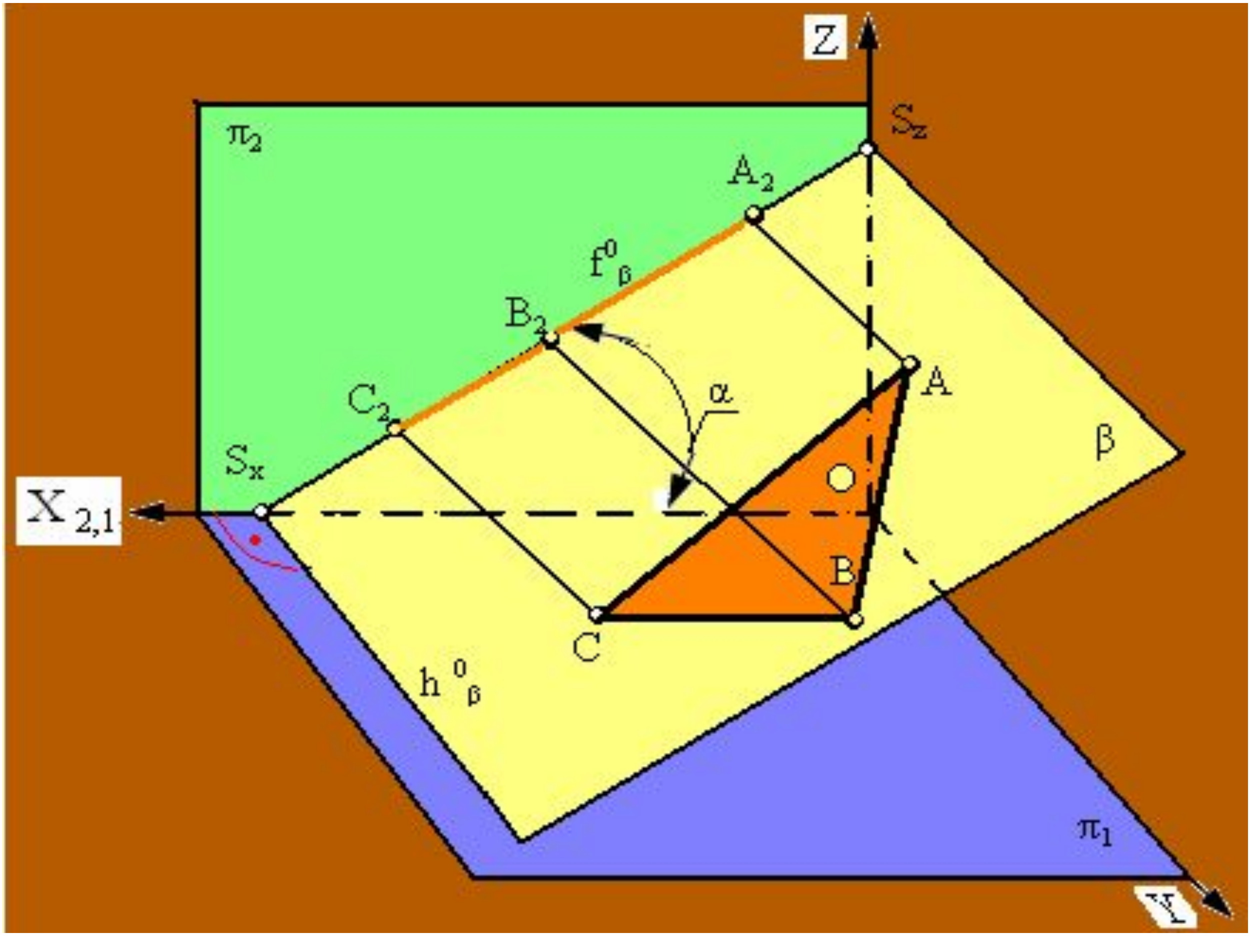
Перпендикулярное к плоскости проекций.

Параллельное к плоскости проекций.

Проецирующие плоскости (горизонтально-проецирующая плоскость)

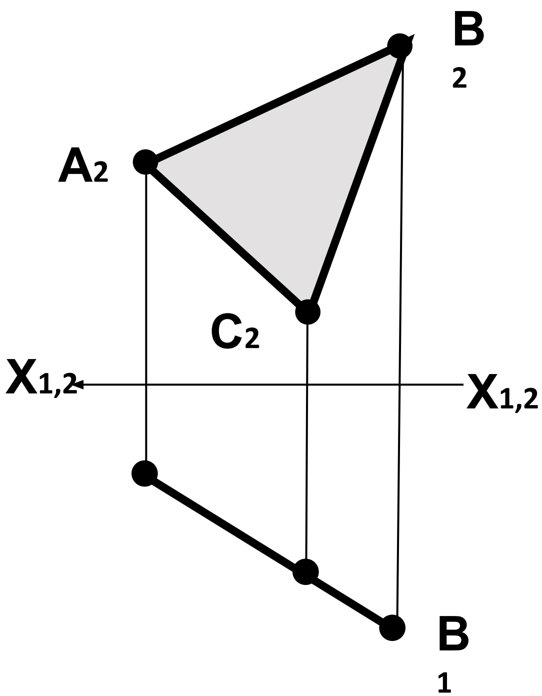


Проецирующие плоскости (фронтально-проецирующая плоскость)

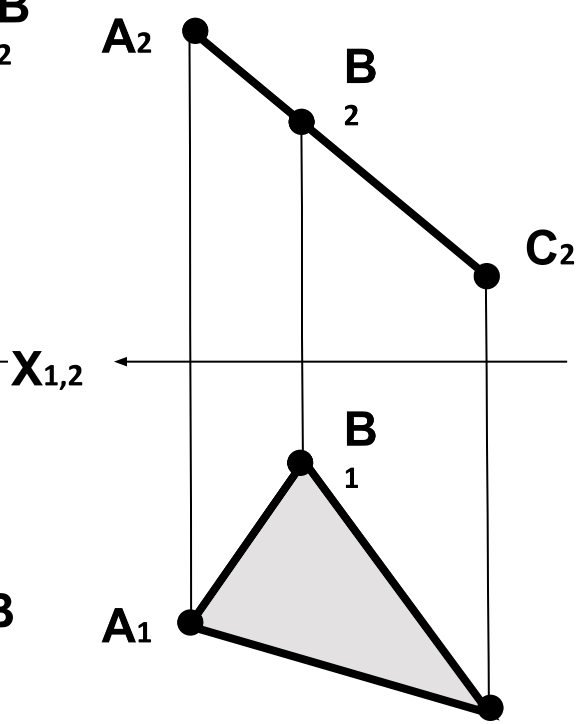


Плоскости

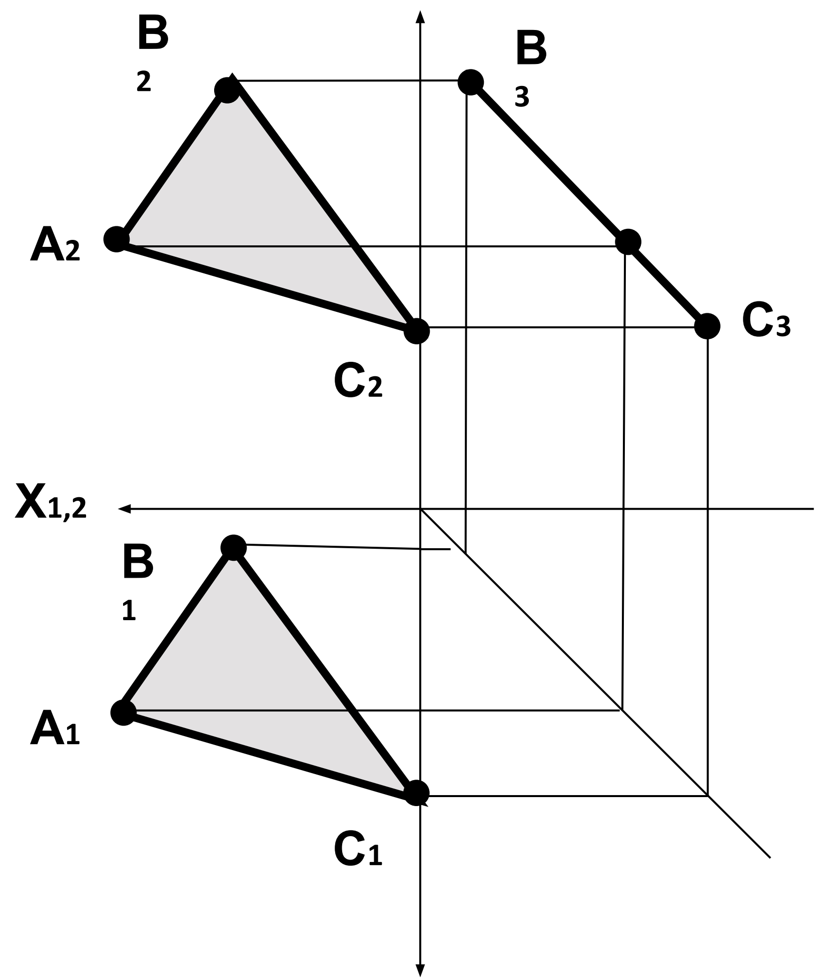
горизонтально-проецирующая



фронтально-проецирующая



профильно-проецирующая



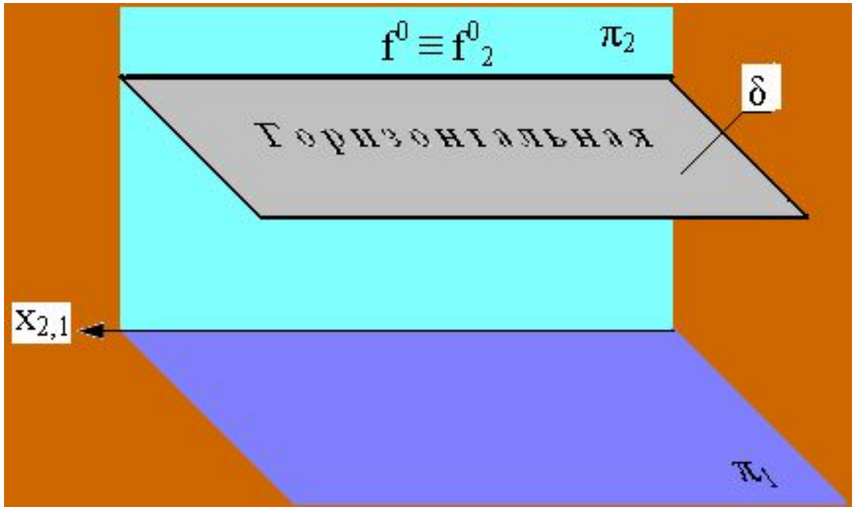
Плоскость уровня

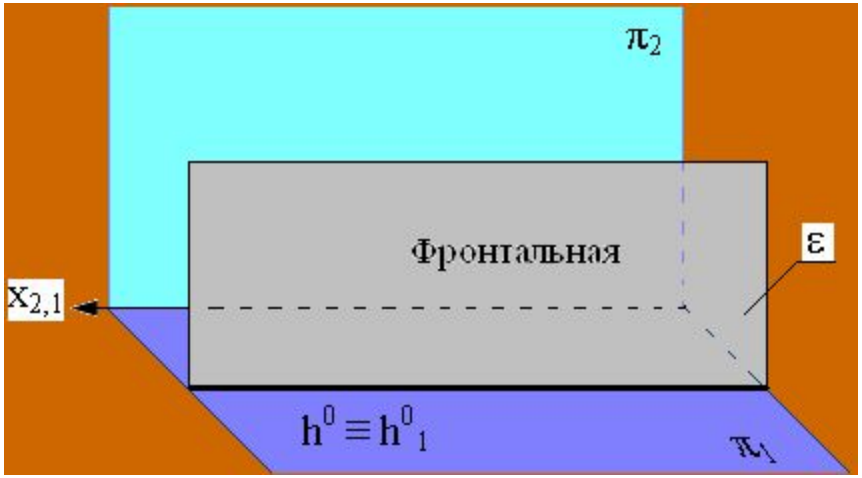
Плоскость, параллельную плоскости проекций называют плоскостью уровня. Их три.

Горизонтальная.

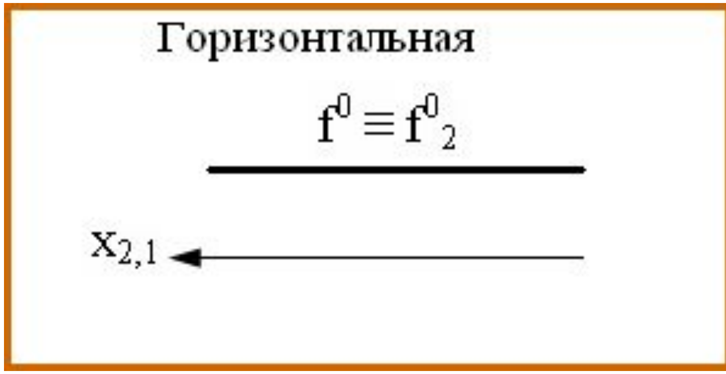
Фронтальная.

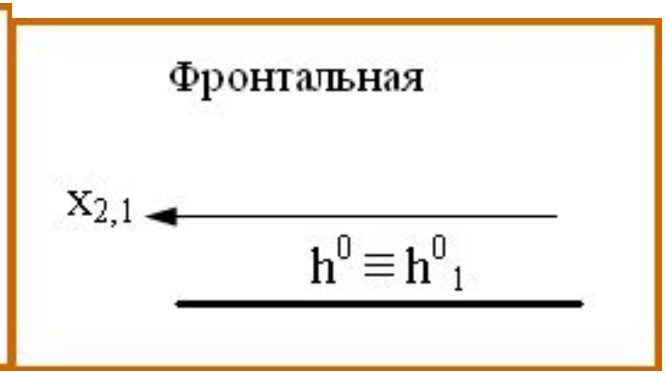
Профильная.

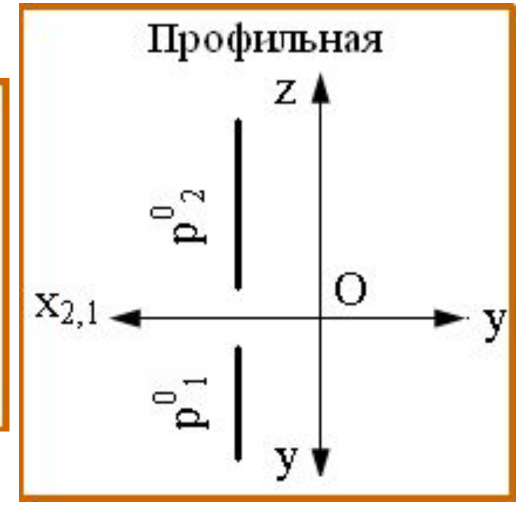




Плоскости уровня на комплексном чертеже

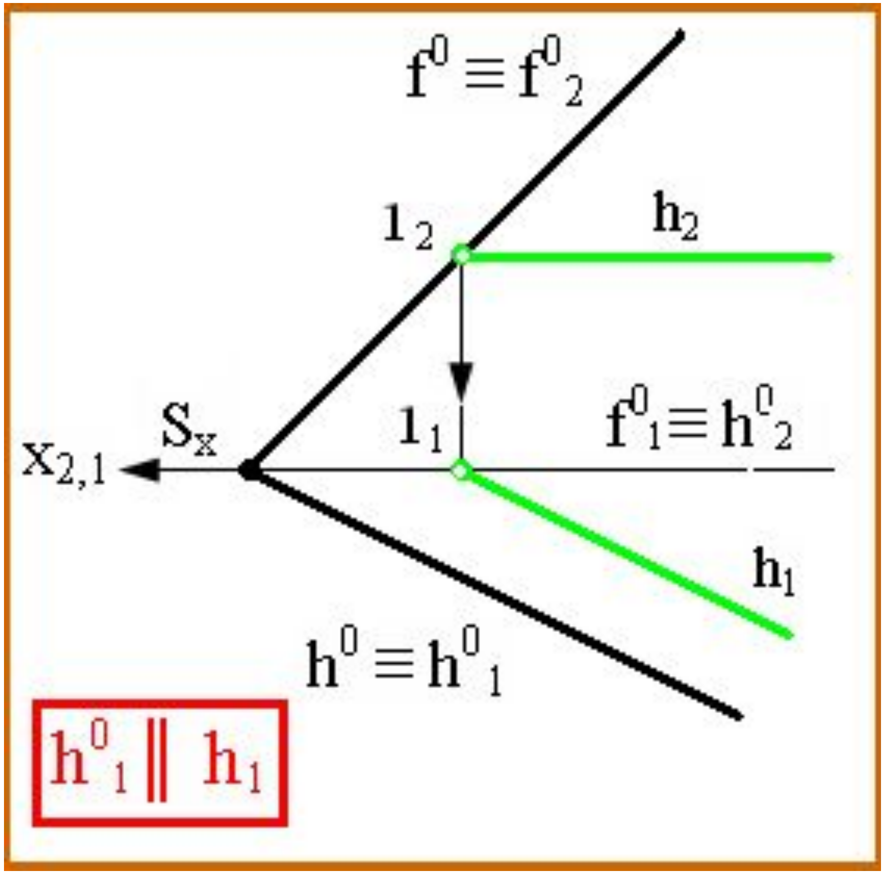


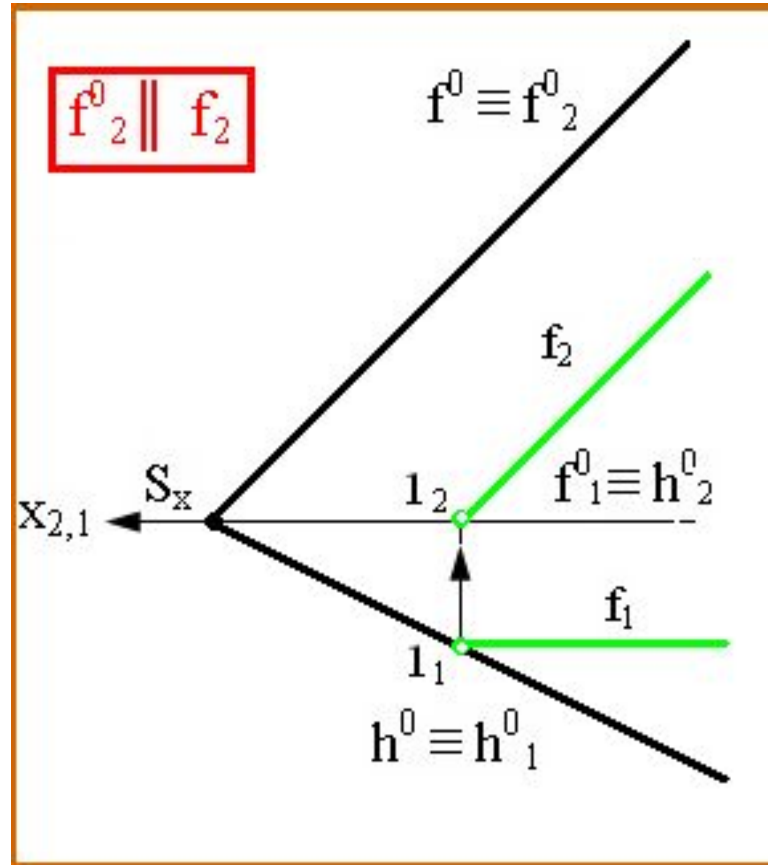




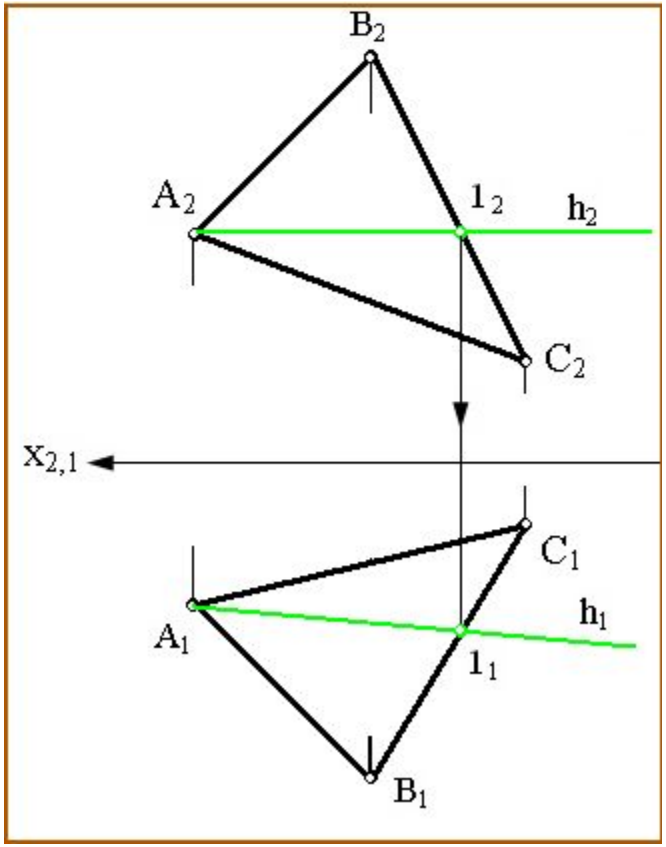
К замечательному свойству плоскостей уровня относят следующее: если какая-либо фигура расположена в плоскости уровня, то она проецируется без искажения своего истинного вида на ту плоскость проекций, которой параллельна плоскость уровня.

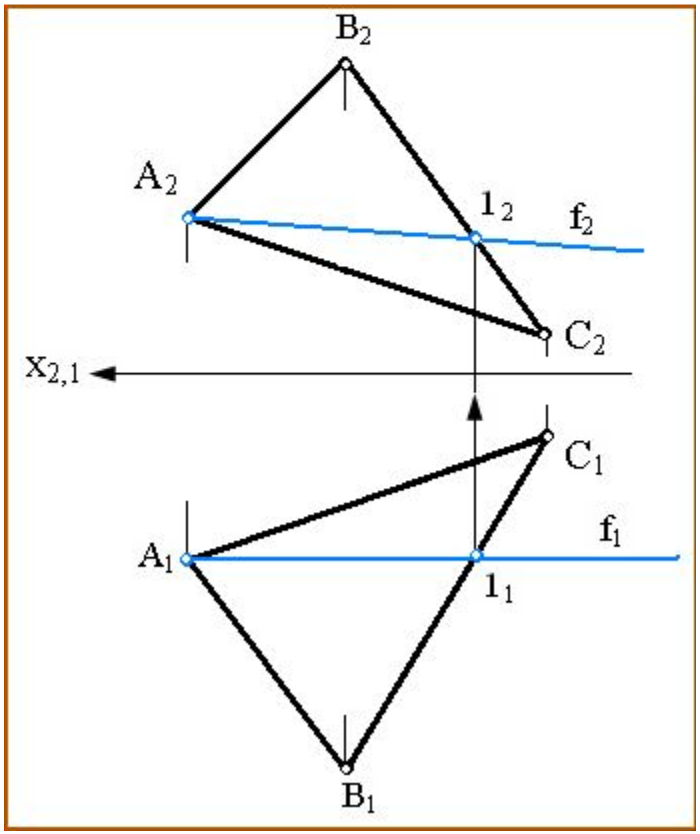
На комплексном чертеже





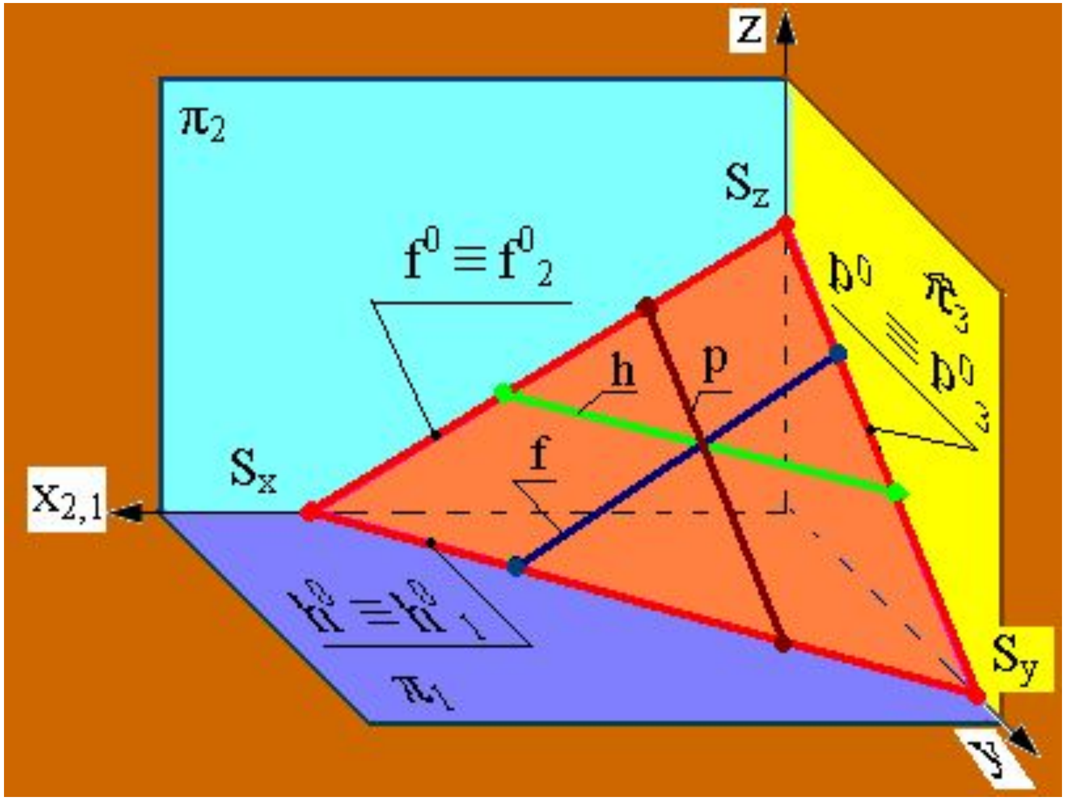
Линии уровня плоскости на комплексном чертеже





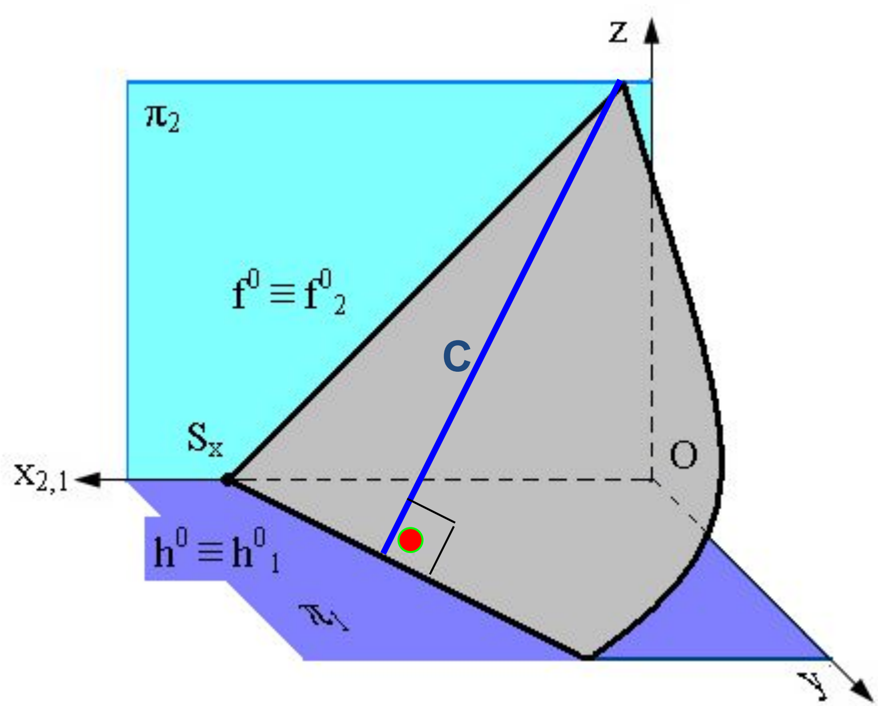
Главные линии плоскости.
Их относительное расположение.

1. **Горизонталь h.**
2. **Фронталь f.**
3. **Профильная прямая p.**
4. **Линия наибольшего наклона** – **прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная к линиям уровня этой плоскости.**



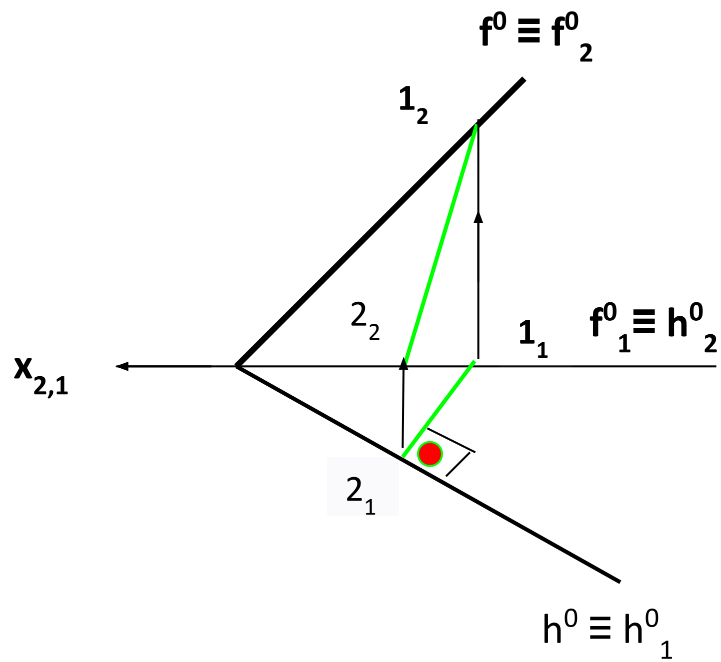
Линия наибольшего наклона плоскости

с – линия наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций (линия ската).

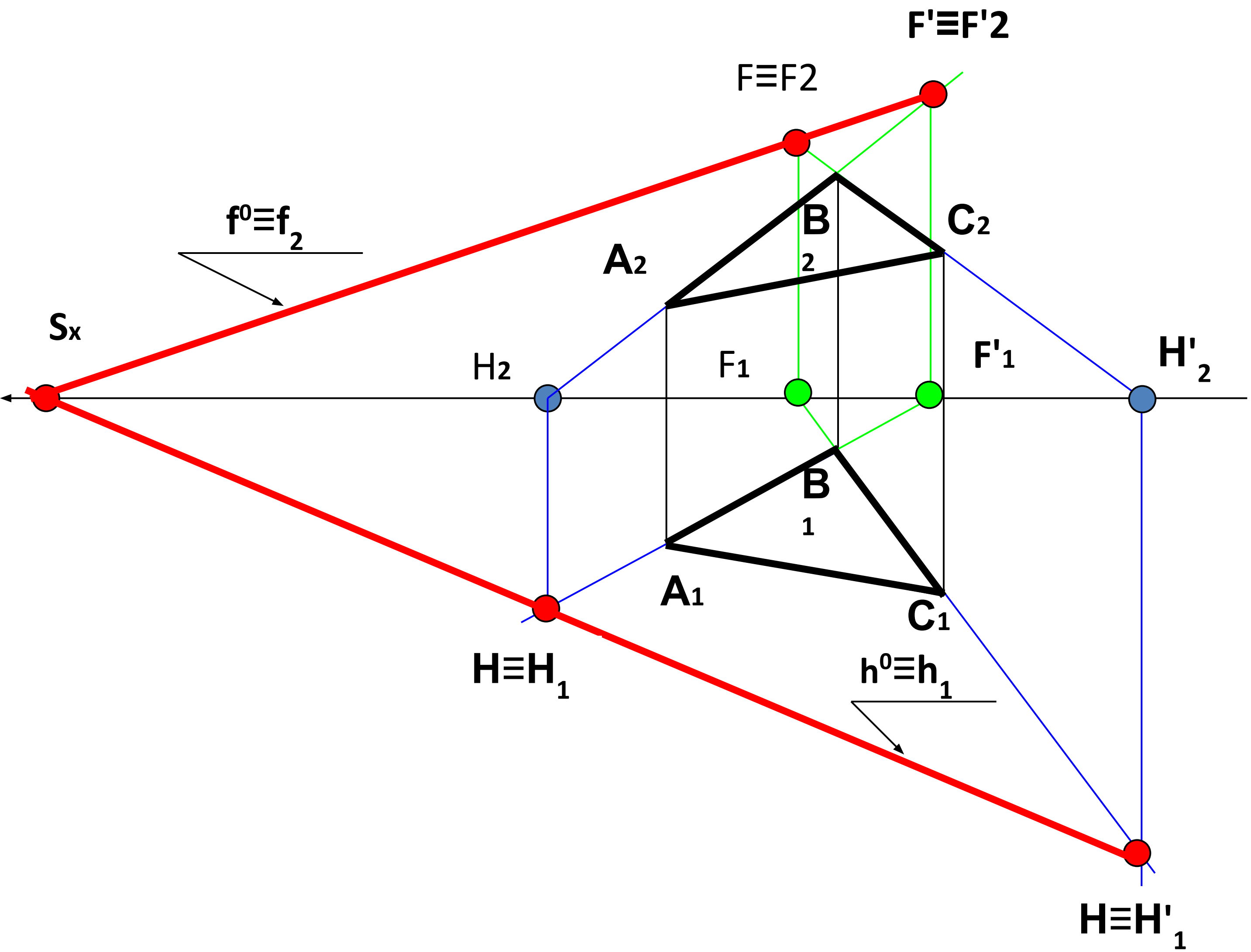


Линия наибольшего наклона на комплексном чертеже

Линия наибольшего наклона к π1 перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости или к горизонтальному следу плоскости



Построить следы плоскости Σ (Δ ABC).



Позиционные задачи

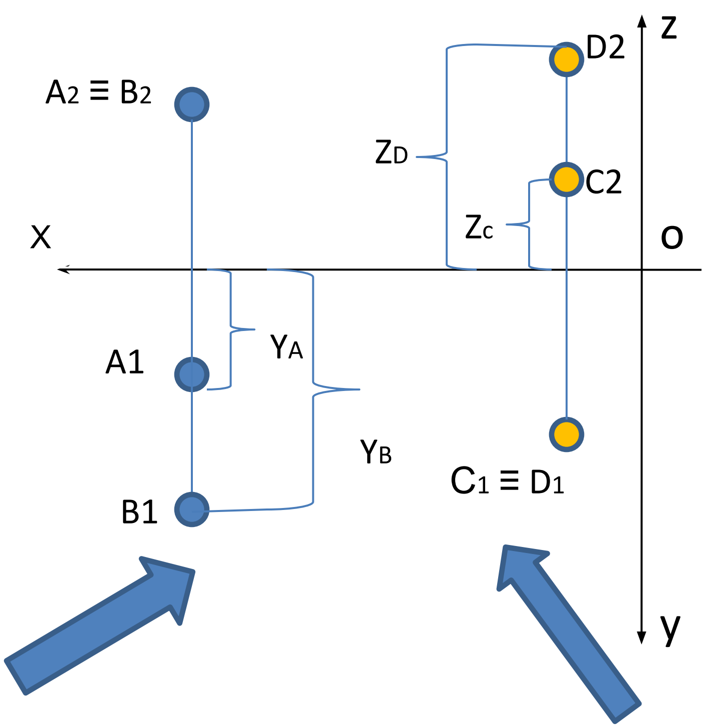
Взаимная принадлежность

Принадлежность точки линии

Принадлежность точки плоскости

Принадлежность линии плоскости

Метод конкурирующих точек



$Y_A < Y_B \Rightarrow$ видна B_2

$Z_C < Z_D \Rightarrow$ видна D_1

Взаимное пересечение

Пересечение линии линией

Пересечение линии с плоскостью

Взаимное пересечение плоскостей

Основные графические задачи

Все графические задачи условно **делятся на 2 класса**.

1-й класс – задачи позиционные;

2-й класс – задачи метрические.

Позиционными называются такие задачи, в которых **определяется взаимное расположение различных геометрических фигур относительно друг друга.**

Позиционные задачи

- Позиционные задачи условно делятся **на две группы:**

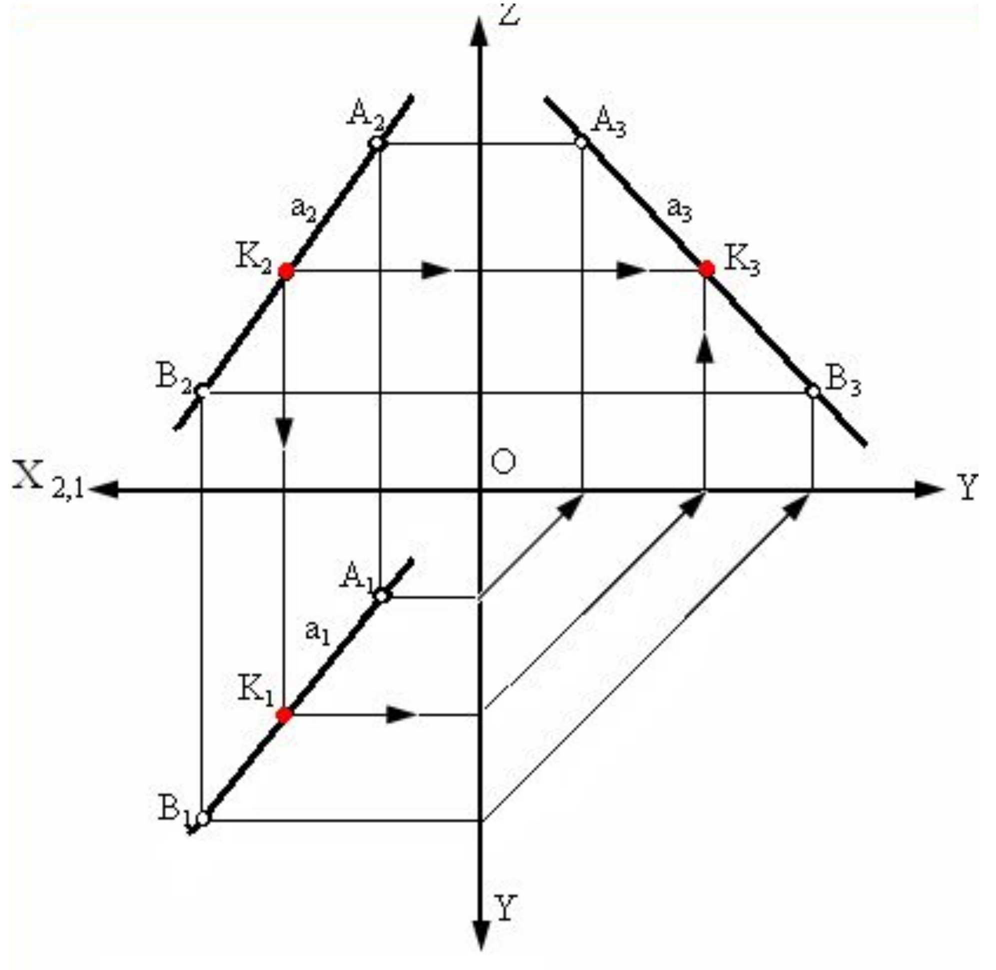
Задачи на принадлежность (ицидентность)

$\in$ $\subset$

Принадлежность точки линии

- Из **инвариантного свойства 3** параллельного проецирования следует, что проекции точки К (К1, К2 и К3) принадлежащие прямой а, должны принадлежать соответствующим проекциям этой прямой т. е. Если хотя бы одна проекция точки не принадлежит соответствующей проекции прямой, то эта точка не принадлежит прямой.
- Из **инвариантного свойства 4** следует, что проекции точки К (К1, К2 и К3), принадлежащие прямой АВ, делят соответствующие проекции отрезка в том же отношении, в каком точка К делит отрезок АВ.

Изображение на комплексном чертеже принадлежности точек А, В, К прямой а



МЕТОД КОНКУРИРУЮЩИХ ТОЧЕК

Метод конкурирующих точек используется в начертательной геометрии **для определения взаимной видимости** двух геометрических фигур.

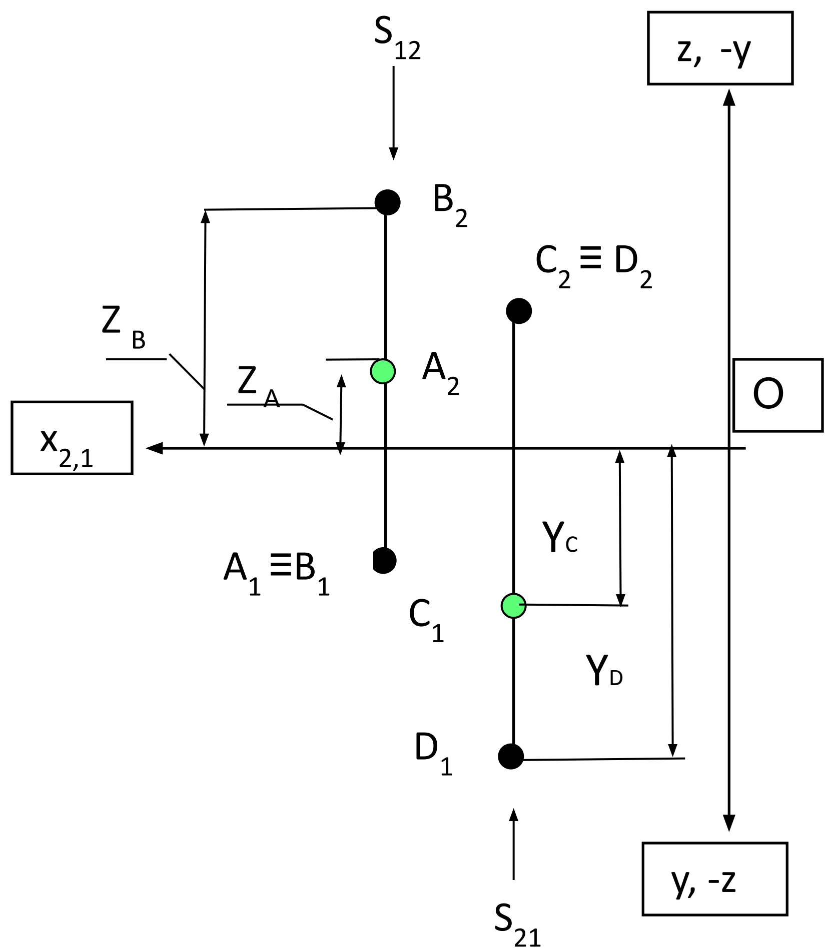
Конкурирующими называются точки пространства, у которых совпадают какие-либо две одноименные проекции.

Определение видимости точек

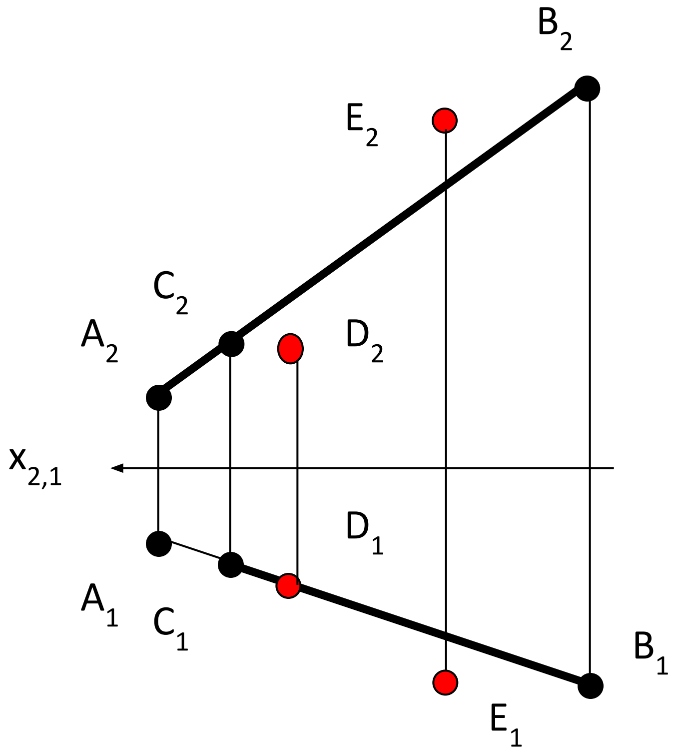
На рис. показаны конкурирующие точки A и B (совпадают горизонтальные проекции $A_1 \equiv B_1$) и C и D (совпадают фронтальные проекции $C_2 \equiv D_2$).

Точка B находится выше точки A относительно плоскости Π_1 ($Z_B > Z_A$), поэтому на плоскости Π_1 видна точка B, которая закрывает точку A (считается, что наблюдатель смотрит на плоскости проекций из бесконечности и направление луча зрения параллельно проецирующему лучу S).

На плоскости Π_2 видна точка D, т. К. она находится ближе к наблюдателю (дальше от плоскости Π_2, $Y_D > Y_C$) и закрывает невидимую точку C.



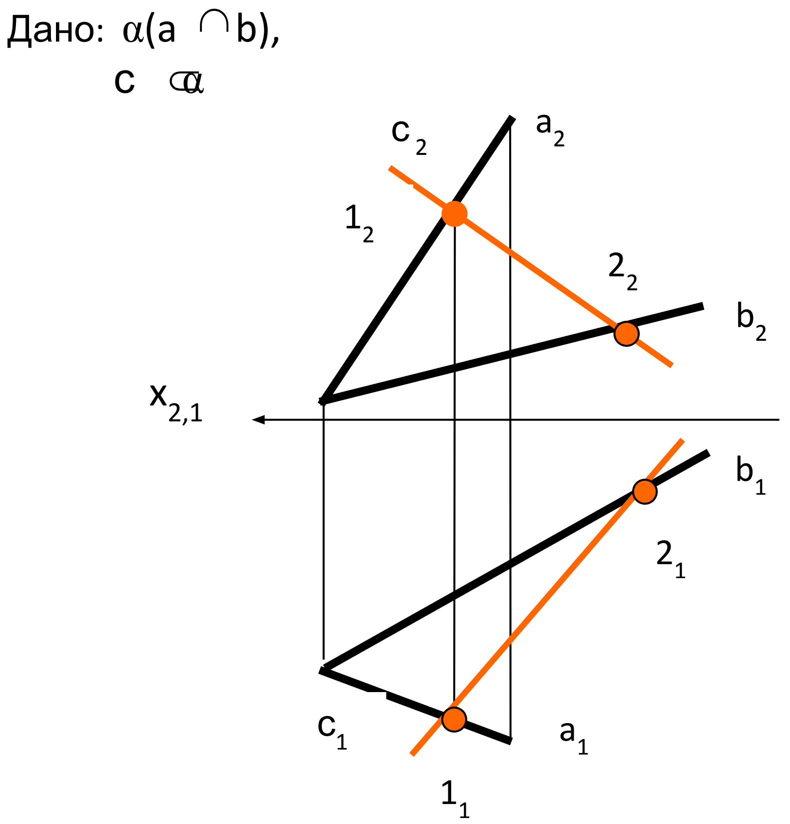
Пример рассмотрения принадлежности точек прямой



Принадлежность линии поверхности

Линия принадлежит поверхности, если: 1. Имеет две общих точки;

2. Имеет одну общую точку и прямую параллельную прямой, принадлежащей поверхности.

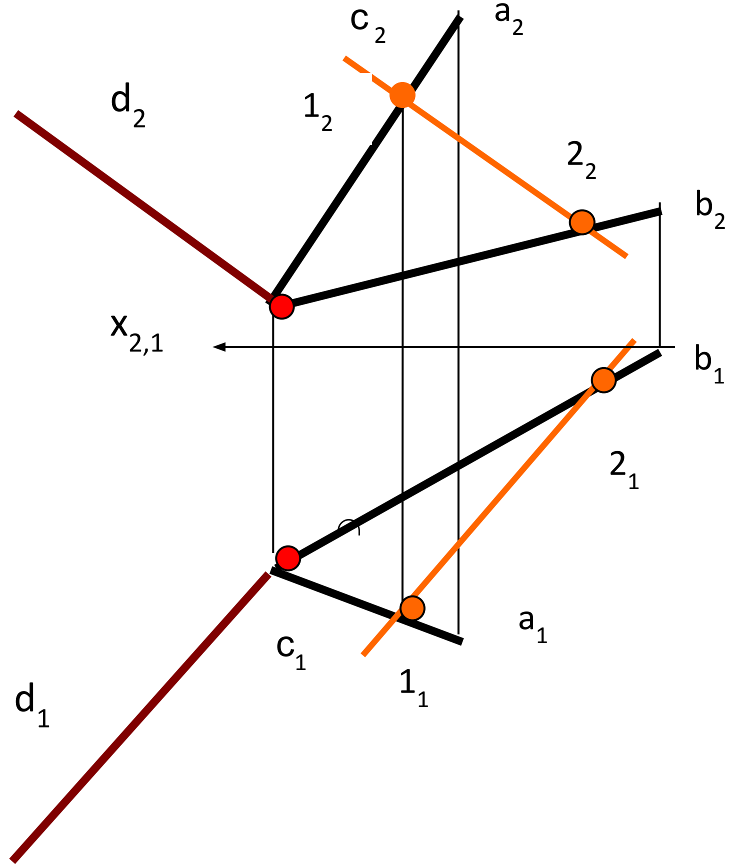


Условие принадлежности точки поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит прямой принадлежащей поверхности

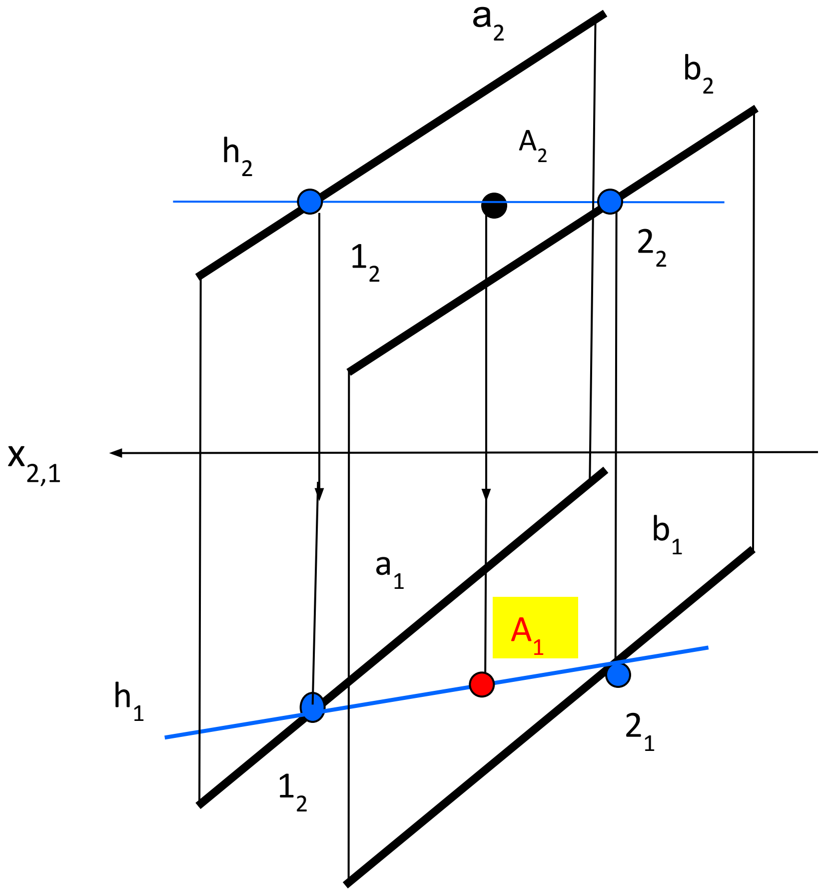
Задача на определение принадлежности

Дано: α(a b),
d ‖ c; c $\subset\alpha$.
Определить: принадлежит ли d поверхности α ?



Задача

Дано: $\alpha(a \parallel b)$, A_2
Определить: A_1, если А принадлежит ($\subset$) поверхности $\alpha(a \parallel b)$,



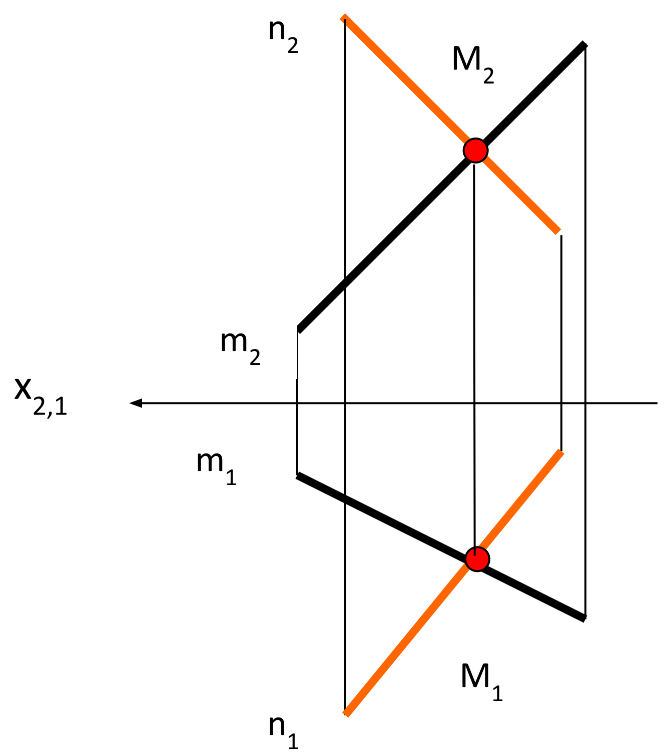
$\cap$

Взаимное положение прямых. Пересечение прямых

Две прямые в пространстве могут пересекаться, скрещиваться и могут быть параллельны.

Прямые a и b ($a \cap b$) пересекаются. Точки пересечения одноименных проекций пересекающихся прямых расположены на одной линии проекционной связи.

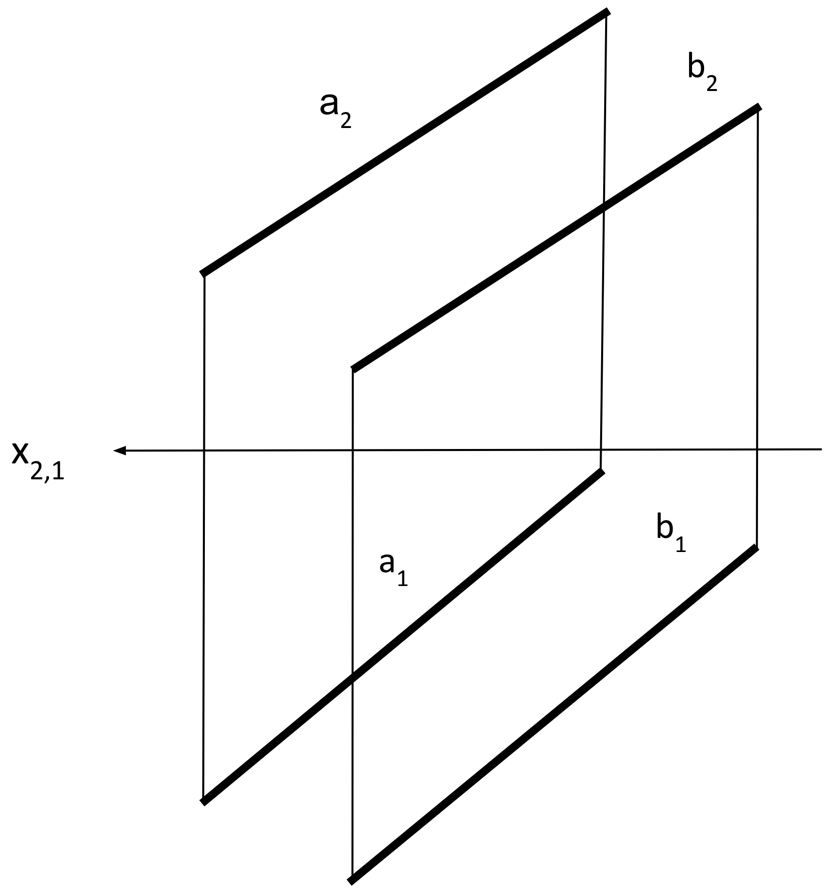
Дано: $m \cap n$,
$M \subset m$;
$M \subset n$



Параллельные прямые

На рис. представлены параллельные прямые – прямые, пересекающиеся в несобственной точке (прямые, лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в бесконечно удаленной точке).

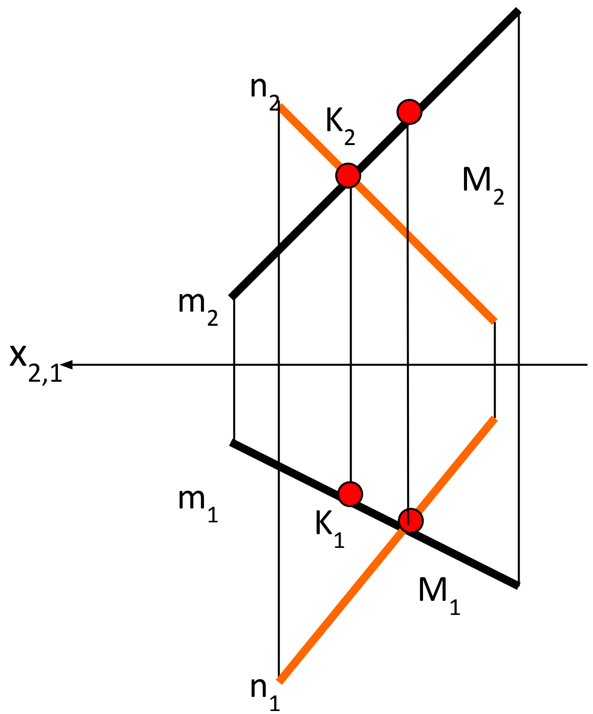
Из инвариантного свойства 6 следует, что проекции параллельных прямых a и b параллельны.



Скрещивающиеся прямые

Скрещивающиеся прямые – это прямые, не лежащие в одной плоскости, это прямые не имеющие ни одной общей точки.

На комплексном чертеже точки пересечения проекций этих прямых не лежат на одном перпендикуляре к оси Х (в отличие от пересекающихся прямых).



Условие перпендикулярности двух прямых

Две прямые перпендикулярны, если угол между ними составляет 90°.

Кроме того, в начертательной геометрии существует еще одно утверждение на эту тему:

Две прямые перпендикулярны, если одна из них линия уровня.

Для подтверждения этого заключения рассмотрим примеры.

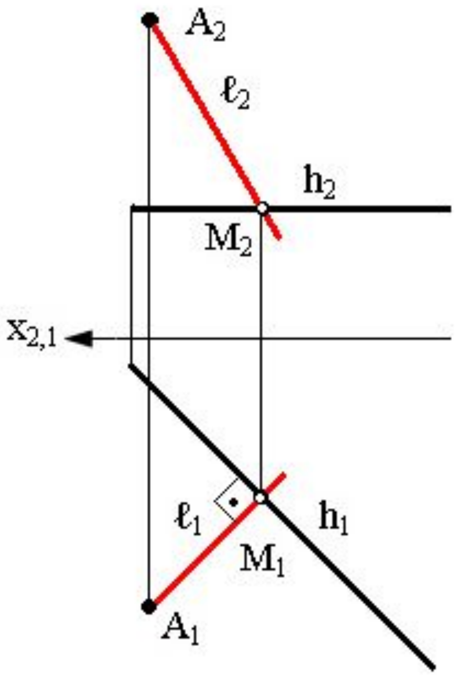
Пример: через точку A провести прямую ℓ, пересекающую горизонталь h под прямым углом ℓ ⊥ h

Так как одна из сторон h прямого угла параллельна плоскости **Π_1**, то на эту плоскость прямой угол спроецируется без искажения. Поэтому через горизонтальную проекцию **A_1** проведем горизонтальную проекцию искомой прямой **$\ell_1 \perp h_1$**. Отметим горизонтальную проекцию точки пересечения прямой и горизонтали **$M_1 = \ell_1 \cap h_1$**.

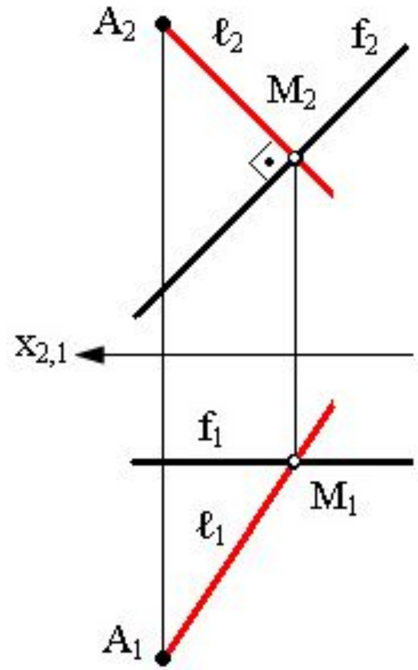
Отметим горизонтальную проекцию точки пересечения прямой и горизонтали **$M_1 = \ell_1 \cap h_1$**. Найдем по принадлежности фронтальную проекцию точки пересечения **M_2**. Точки **A_2** и **M_2** определяют фронтальную проекцию искомой прямой **ℓ**. Две проекции прямой определяют ее положение в пространстве.

Если вместо горизонтали будет задана фронталь f, то геометрические построения по проведению прямой $\ell \perp f$ аналогичны рассмотренным с той лишь разницей, что построения неискаженной проекции прямого угла следует начинать с фронтальной проекции (рис. б).

Прямые, перпендикулярные к линиям уровня

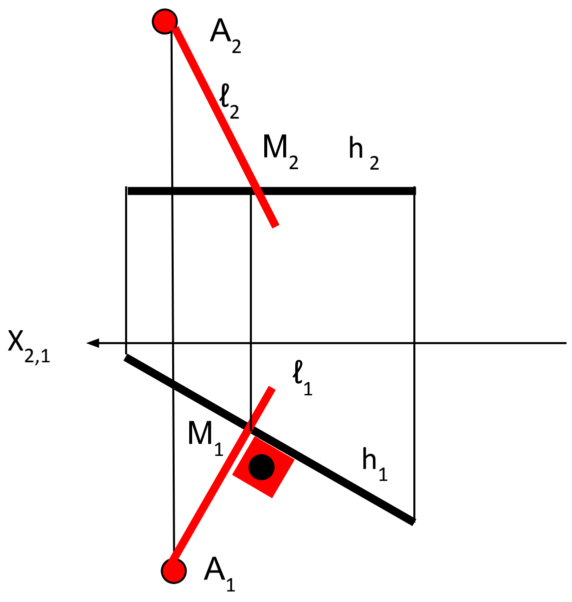


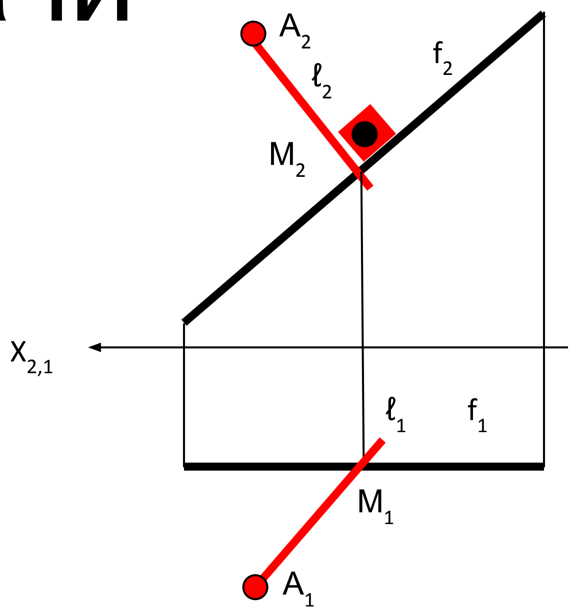
а)



б)

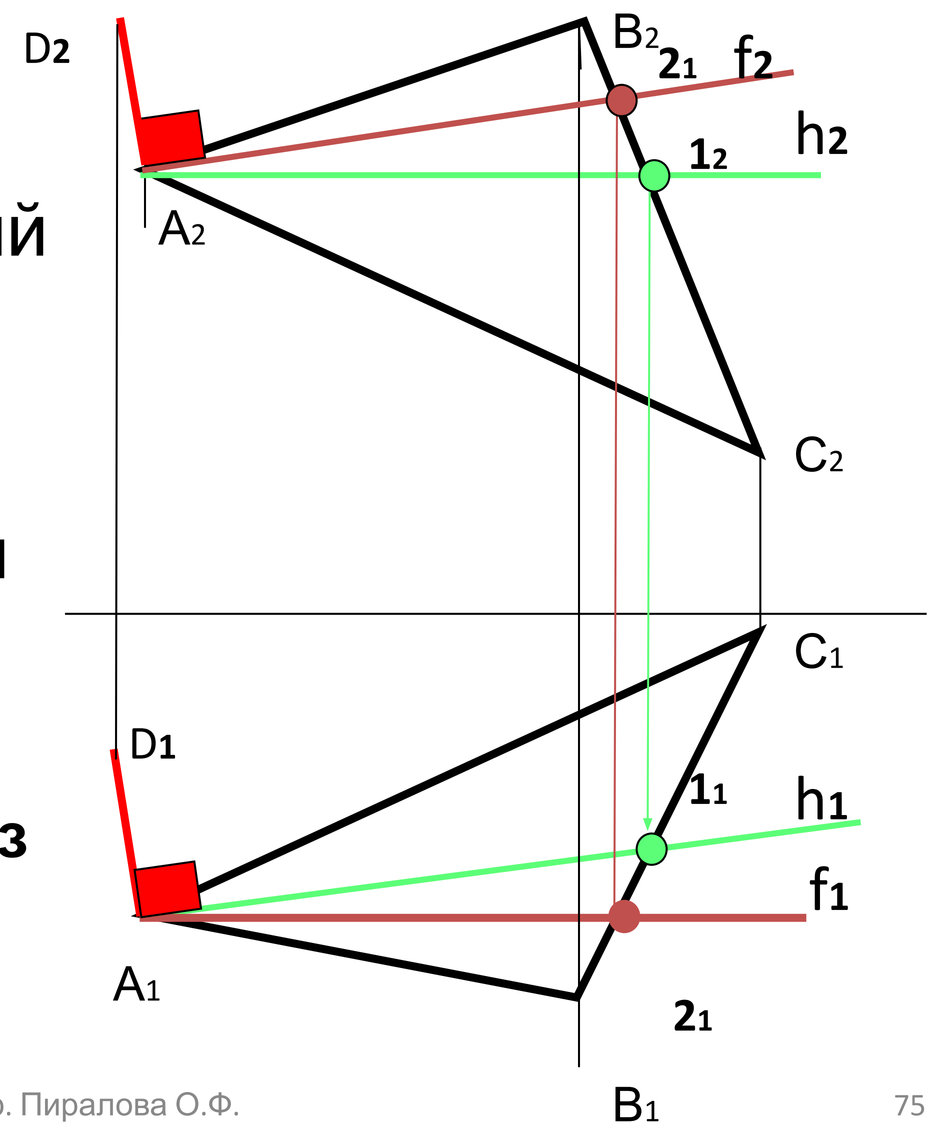
Алгоритм решения задачи





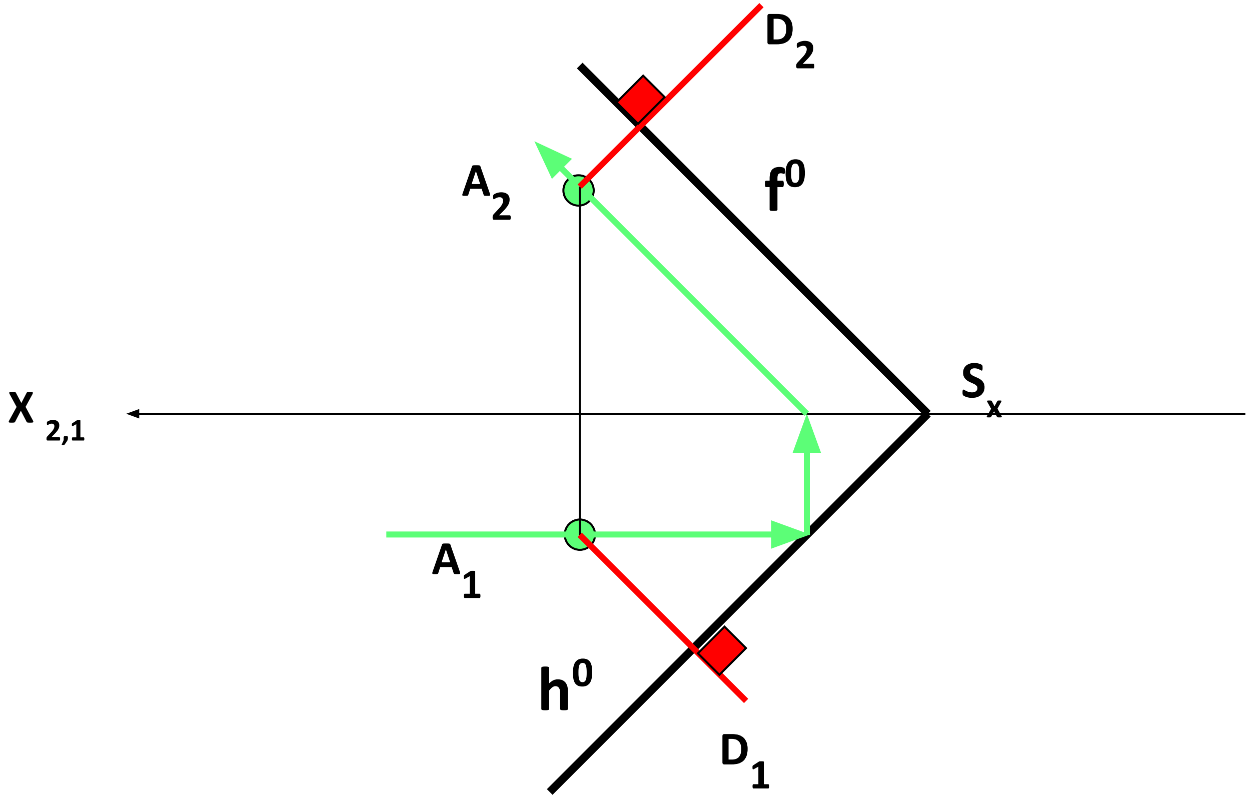
Пример. Из точки A, принадлежащей плоскости α (Δ ABC), восставить к плоскости α перпендикуляр AD.

Для определения направления проекций перпендикуляра, проведем проекции горизонтали h и фронтали f плоскости **Δ ABC. После этого из точки A_1 восстанавливаем перпендикуляр к h_1, а из A_2 – к f_2**



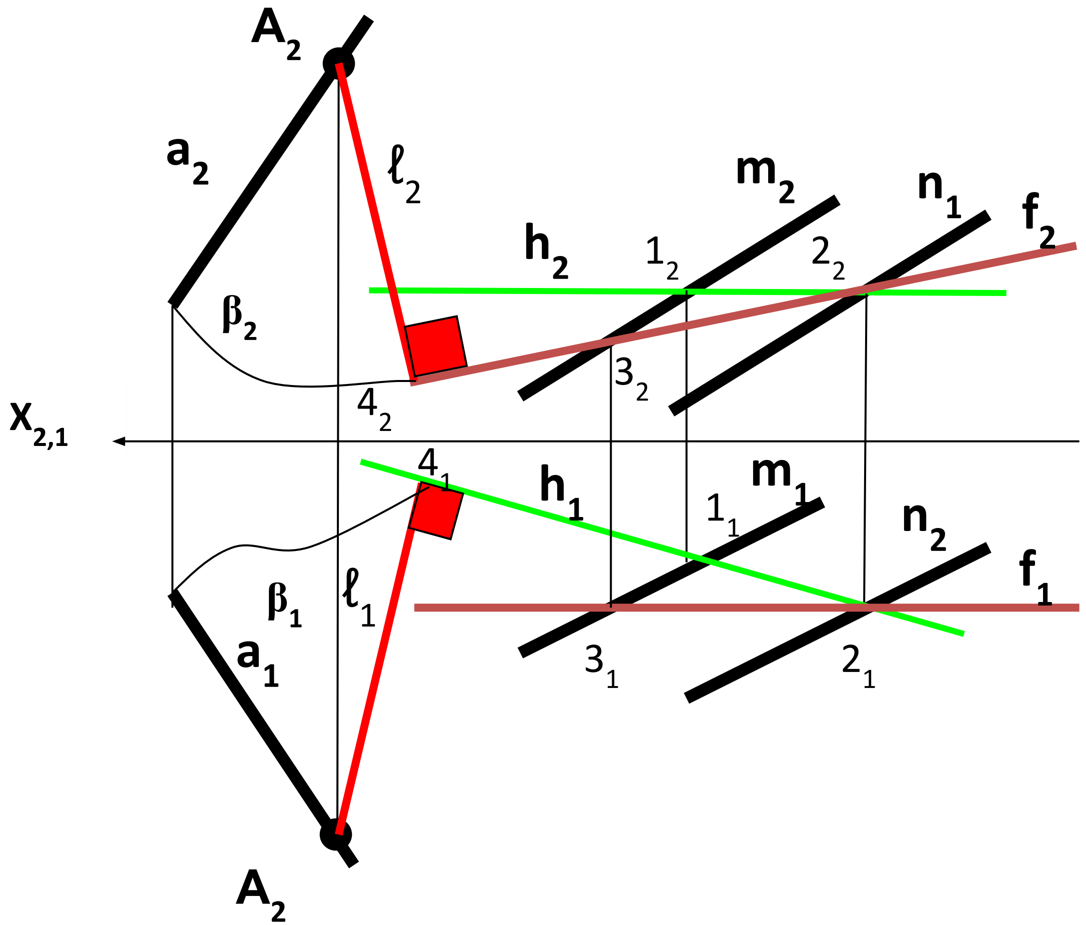
Если плоскость задана следами, для того, чтобы прямая в пространстве была перпендикулярна плоскости, необходимо и **достаточно, чтобы проекции этой прямой были перпендикулярны к одноименным следам**

Пример. Из точки А, принадлежащей плоскости α(h   f) ,
$\cap$
восставить к плоскости α перпендикуляр AD.



Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную к другой плоскости



Пересечение линии с поверхностью

Задача сводится к решению задачи на определение точки, принадлежащей прямой и поверхности.

Для решения необходимо:

1) через одну из проекций прямой провести конкурирующую прямую, принадлежащую поверхности;

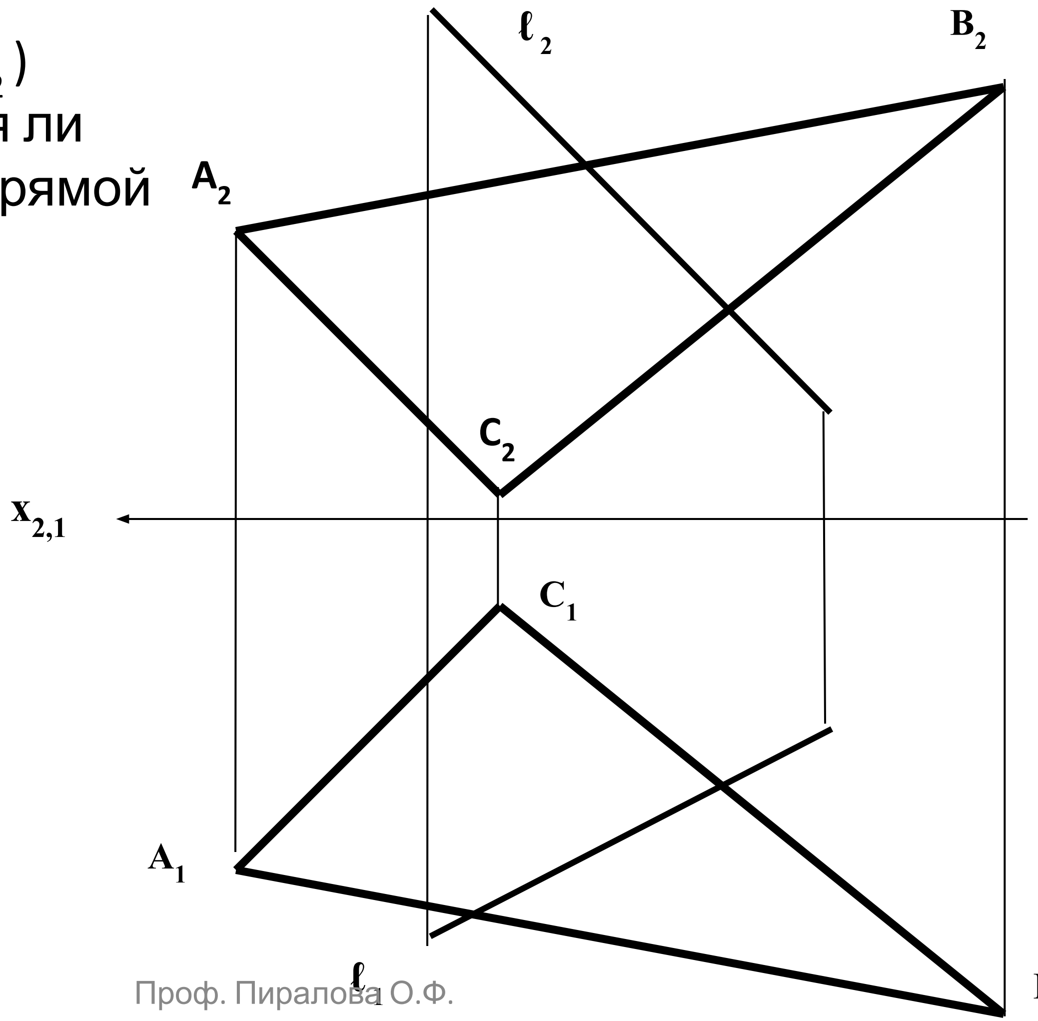
2) найти ее проекцию во второй плоскости проекций.

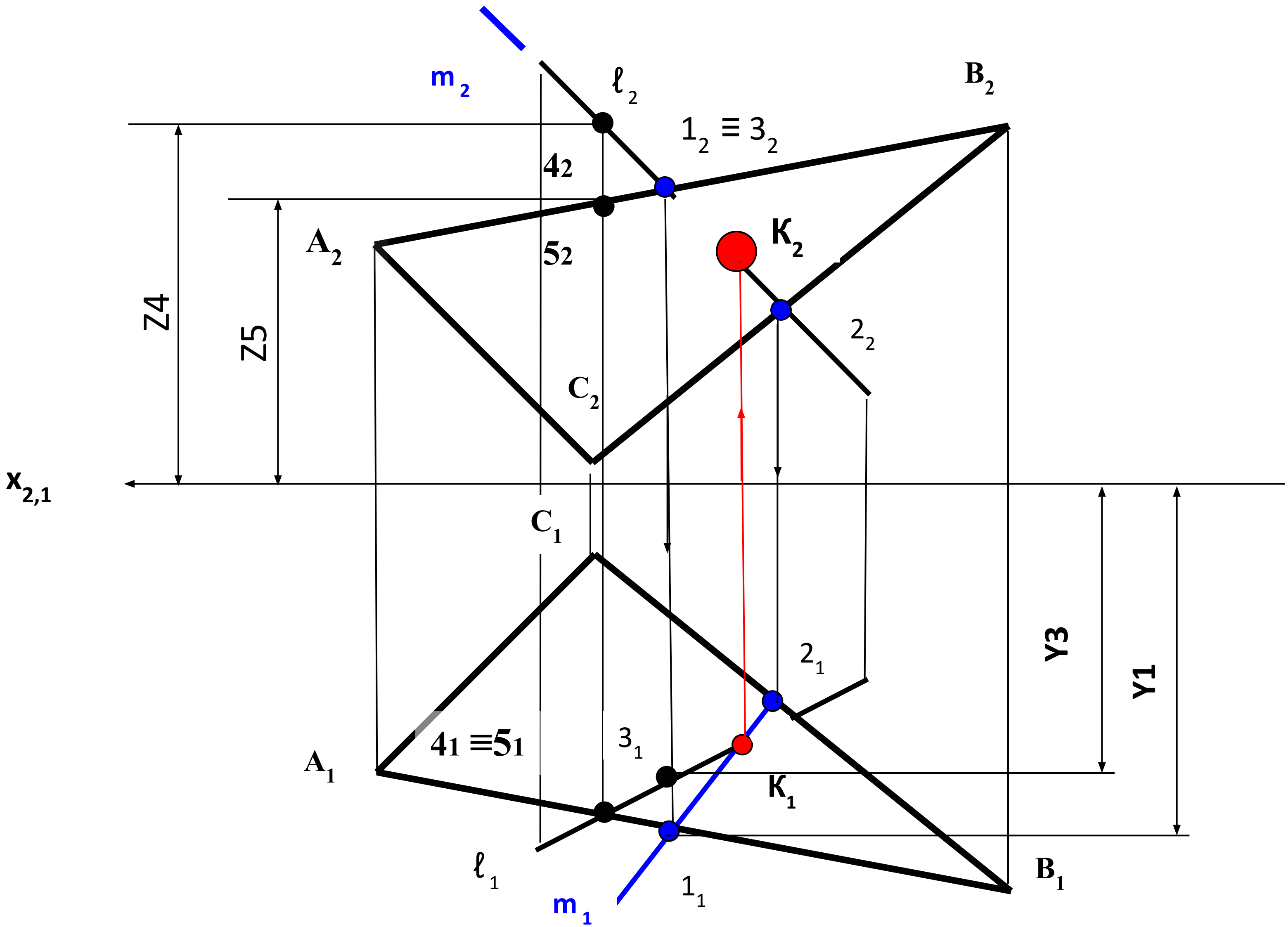
Если эта проекция пересечет проекцию заданной прямой, значит имеется точка пересечения прямой и поверхности.

Задача

Дано: α (Δ ABC), ($l_{1,}$ l_2)

Определить: имеется ли точка пересечения прямой с поверхностью α ?




m 2
ℓ 2
B2
1 2 ≡ 3 2
4 2
A2
5 2
К2
Z4
Z5
2 2
C2
x2,1
C1
Y3
Y1
2 1
4 1 ≡5 1
3 1
A1
К1
ℓ 1
B1
m 1
1 1

Пересечение плоскостей

Две плоскости пересекаются по прямой линии, для определения которой достаточно найти две точки, принадлежащие одновременно каждой из заданных плоскостей.

Чтобы найти такие точки достаточно ввести две вспомогательные секущие плоскости.

Пример. Определить линию пересечения плоскостей $\alpha(a \cap b)$ и $\beta(c \parallel d)$.

Алгоритм решения.

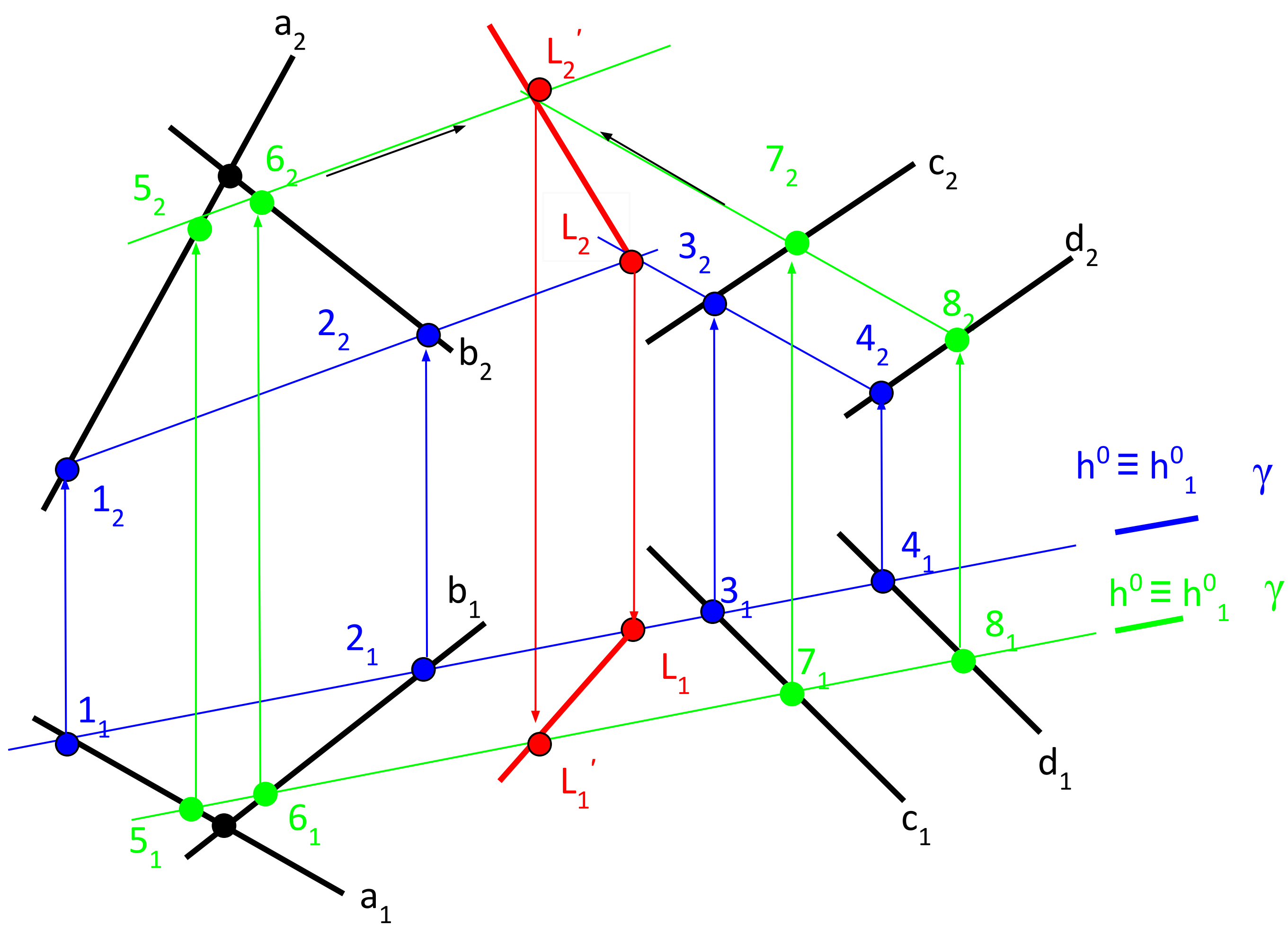
1. Проводим вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость γ

2. и 3. Определяем проекции прямых m и n, по которым пересекаются плоскости

$\alpha(a \cap b)$ и $\beta(c \parallel d)$.

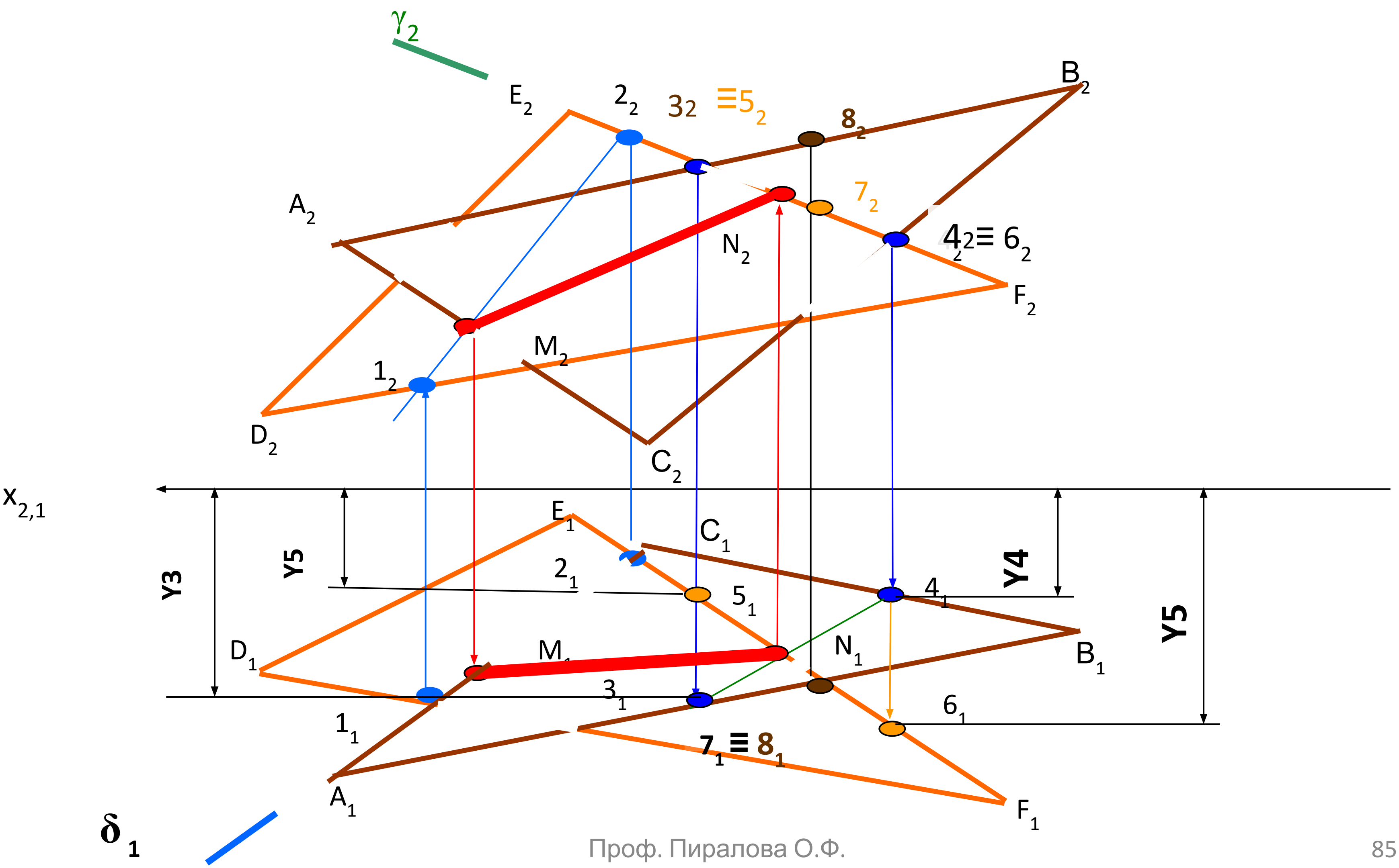
4. Находим **точки пересечения одноименных фронтальных проекций линий пересечения плоскостей α и β.**

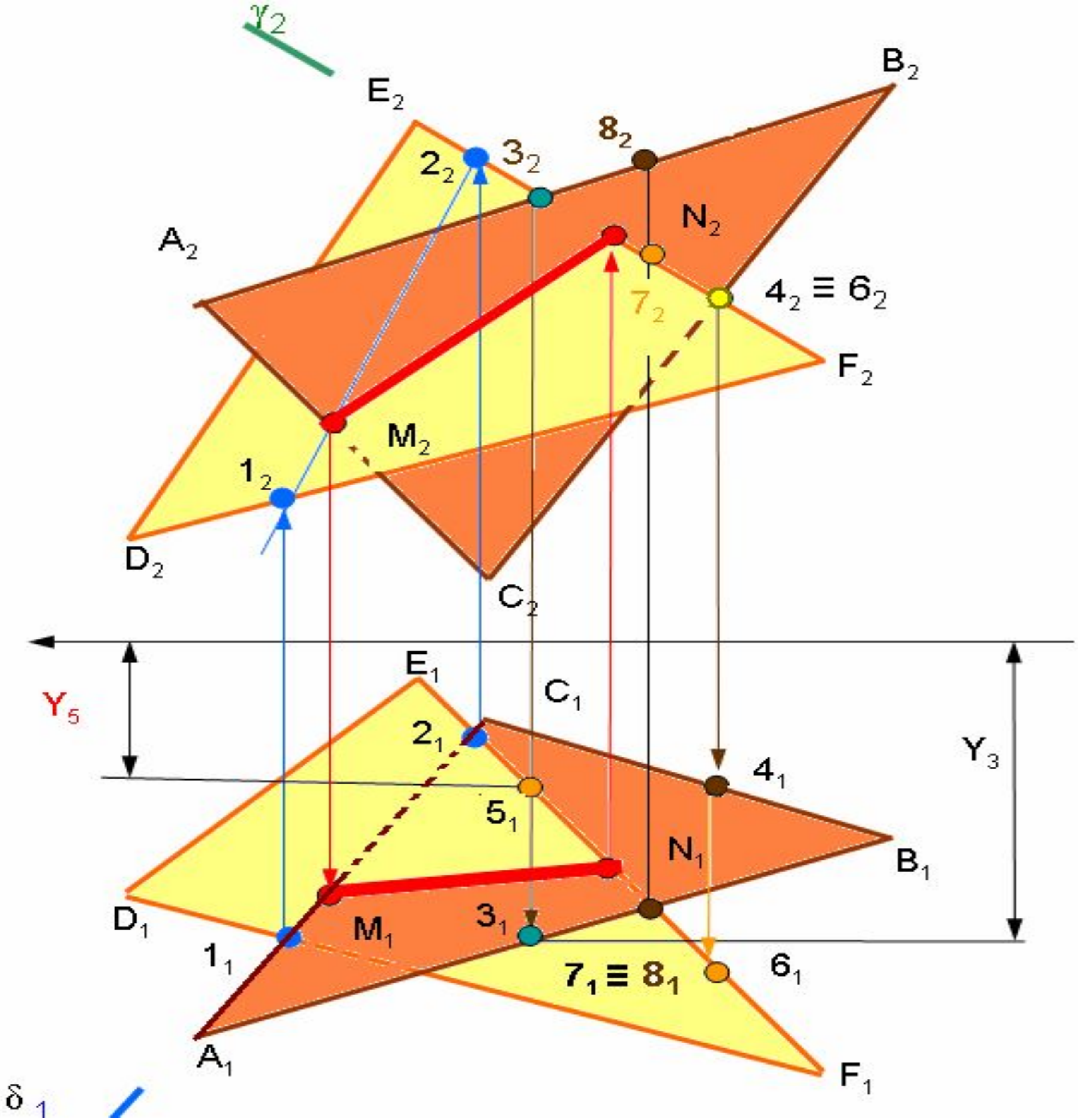
Пример решения задачи на определение линии пересечения плоскостей



Дано: α (Δ ABC), β (Δ DEF);

Определить взаимное положение плоскостей





γ_2
E_2
B_2
8_2
2_2
3_2
N_2
A_2
$4_2 \equiv 6_2$
7_2
F_2
M_2
1_2
D_2
C_2
E_1
C_1
Y_5
2_1
Y_3
4_1
5_1
N_1
B_1
D_1
3_1
M_1
1_1
$7_1 \equiv 8_1$
6_1
A_1
F_1
δ_1