

33.6. Приведение квадратичной формы к главным осям

Любая квадратичная форма $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) = \vec{x} A \vec{x}$ приводится к каноническому виду $\varphi = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$ ортогональным преобразованием $\vec{x} = Q \vec{z}$, Q — ортогональная матрица, столбцами которой служат **компоненты собственных векторов** соответствующего симметрического преобразования;

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^T A Q, \quad A — \text{матрица квадратичной формы } \varphi$$

Всякая симметрическая матрица диагонализируема.

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

λ – собственное значение A

$\Leftrightarrow$

$$|A - \lambda E| = 0$$

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

λ – собственное значение A

$\Leftrightarrow$

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

λ – собственное значение A

$\Leftrightarrow$

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Собственные значения матрицы $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = -4;$

Канонический вид квадратичной $\overset{A:}{2z_1^2 + 2z_2^2 - 4z_3^2}$ формы:

Пример $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

λ – собственное значение A

$\Leftrightarrow$

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Собственные значения матрицы $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = -4;$

Канонический вид квадратичной A : $2z_1^2 + 2z_2^2 - 4z_3^2$

Для отыскания собственных **формы:**

векторов $\downarrow$
 решаем $(*0): (A - \lambda E)x \downarrow = 0 \downarrow$

ОСЛУ

C.3. $\lambda_{1,2} = 2$:

$$A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

C.3. $\lambda_{1,2} = 2$:

$$A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

С.3. $\lambda_{1,2} = 2$:

$$A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ФСР ОСЛУ (*0): } x_1 + x_2 - 2x_3 = 0;$$

(x_2, x_3 — свободные неизвестные)

С.3. $\lambda_{1,2} = 2$:

$$A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ФСР ОСЛУ (*0): } x_1 + x_2 - 2x_3 = 0;$$

(x_2, x_3 — свободные неизвестные)

Общий вид собственного вектора матрицы A

при

собственном значении $\lambda_{1,2} = 2$: $s \bar{v}_1 + t \bar{v}_2$, где $\begin{cases} s \neq 0, \\ t \neq 0; \end{cases}$

С.3. $\lambda_{1,2} = 2$:

$$A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ФСР ОСЛУ } (*0): x_1 + x_2 - 2x_3 = 0;$$

(x_2, x_3 – свободные неизвестные)

Общий вид собственного вектора матрицы A

при
 собственном $\lambda_{1,2} = 2$: $s \bar{v}_1 + t \bar{v}_2$, где $\begin{cases} s \neq 0, \\ t \neq 0; \end{cases}$
 значении

Выбранные векторы неортогональны, а нам нужен
ортонормированный базис из собственных
 векторов A .

Можно применить процесс ортогонализации:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{(\bar{v}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \bar{f}_1$$

Можно применить процесс
ортогонализации:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{(\bar{v}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Можно применить процесс ортогонализации:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{(\bar{v}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируя эти векторы, получим первые два вектора

искового ортонормированного базиса:

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{|\bar{f}_1|} \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \frac{1}{|\bar{f}_2|} \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Можно применить процесс ортогонализации:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{(\bar{v}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируя эти векторы, получим первые два вектора

искового ортонормированного базиса:

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{|\bar{f}_1|} \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \frac{1}{|\bar{f}_2|} \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Третий вектор искомого базиса можно угадать – он должен быть ортогонален найденным.

Можно применить процесс ортогонализации:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{(\bar{v}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируя эти векторы, получим первые два вектора

искового ортонормированного базиса:

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{|\bar{f}_1|} \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \frac{1}{|\bar{f}_2|} \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Третий вектор искомого базиса можно угадать –

он должен быть ортогонален найденным. Собственные векторы симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, попарно ортогональны.

C. $\lambda_3 = -4$: $A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$

3.

$$\text{C. } \lambda_3 = -4: A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{C. } \lambda_3 = -4: A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С. $\lambda_3 = -4$: $A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$

3.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Векто $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ – ФСР ОСЛУ (*0): $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 1. \end{cases}$

р (при свободном неизвестном

С. $\lambda_3 = -4$: $A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$

3. $\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Вектор $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ – ФСР ОСЛУ (*0): $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
 р (при свободном $x_2 = 1$).

$\bar{h}_3 = \frac{1}{|\bar{u}|} \bar{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ – единичный
 собственный
 вектор матрицы A при $\lambda_3 = -4$.
 собственном значении

Столбцами искомой **ортогональной** матрицы
перехода

Единичные (матрица собственных векторов) матрицы
найденные

Единичные собственные значения (матрицы найденные)

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Столбцами искомой **ортогональной** матрицы
перехода

Единичные собственные ~~перевекторы~~ ~~матрицы~~
найденные

Ответ:

$$\varphi = 2z_1^2 + 2z_2^2 - 4z_3^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Столбцами искомой **ортогональной** матрицы
перехода

Единичные собственные (перевекторы) матрицы
найденные

Ответ:

$$\varphi = 2z_1^2 + 2z_2^2 - 4z_3^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Знаки единичных
векторов

$$\bar{h} = \frac{\pm 1}{|\bar{u}|} \cdot \bar{u} \quad \text{обычно} \\ \text{выбирают} \\ \text{так, чтобы } \det Q = 1.$$

34. Кривые второго порядка

34. Кривые второго порядка

34.1. Общее уравнение

$O, \vec{i}, \vec{j}$ – прямоугольная
декартова
система координат.

34. Кривые второго порядка

34.1. Общее уравнение

$O, \vec{i}, \vec{j}$ – прямоугольная
декартова
система координат.

Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, задаваемое уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

34. Кривые второго порядка

34.1. Общее уравнение

$O, \vec{i}, \vec{j}$ – прямоугольная
декартова
система координат.

Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, задаваемое уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

34.2. Заменой переменных $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ уравнение

можно упростить, приведя квадратичную форму

$\varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ к главным осям (п. 33.6):

$$\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2,$$

$$\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2,$$

выбирая на плоскости новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}$:

$$|\bar{\tilde{i}}| = |\bar{\tilde{j}}| = 1; \quad \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}}$$

$$\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2,$$

выбирая на плоскости новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}$:

$$\bar{\tilde{i}} = q_{11} \bar{i} + q_{21} \bar{j}$$

$$\bar{\tilde{j}} = q_{12} \bar{i} + q_{22} \bar{j}$$

$$|\bar{\tilde{i}}| = |\bar{\tilde{j}}| = 1; \quad \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}}$$

$$\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2,$$

выбирая на плоскости новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}$:

$$\begin{aligned}\bar{\tilde{i}} &= q_{11} \bar{i} + q_{21} \bar{j} \\ \bar{\tilde{j}} &= q_{12} \bar{i} + q_{22} \bar{j}\end{aligned}$$

$$|\bar{\tilde{i}}| = |\bar{\tilde{j}}| = 1; \quad \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}}$$

$$\begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix} \text{ -- собственные векторы матрицы}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ квадратичной}$$

$$\text{формы } \varphi,$$

соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2 .

34.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат,
 $\hat{O}(\tilde{x}_0; \tilde{y}_0)$ – заменой переменных $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} -$

34.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат,

$\hat{O}(\tilde{x}_0; \tilde{y}_0)$ – заменой переменных
$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} -$$

уравнение кривой приводят к ***каноническому виду***

– одному из девяти:

34.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат,

$\hat{O}(\tilde{x}_0; \tilde{y}_0)$ – заменой переменных $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}$ –

уравнение кривой приводят к **каноническому виду**

– одному из девяти:

1) $\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1$ – эллипс

2) $\frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1$ – гипербола
($a \geq b > 0$)

34.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат,

$\hat{O}(\tilde{x}_0; \tilde{y}_0)$ – заменой переменных $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}$ –

уравнение кривой приводят к **каноническому виду**
– одному из девяти:

$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \end{array} \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1 \text{ – эллипс} \quad \left[\begin{array}{l} \text{действительный (+)} \\ \text{мнимый (-)} ; \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad (a \geq b > 0)$$

34.3. Выбирая, если нужно, новое начало координат,

$\hat{O}(\tilde{x}_0; \tilde{y}_0)$ – заменой переменных
$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}$$

уравнение кривой приводят к **каноническому виду**
– одному из девяти:

$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \end{array} \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{– эллипс} \quad \left[\begin{array}{l} \text{действительный (+)} \\ \text{мнимый (-)} \end{array} \right]$$

$(a \geq b > 0)$

$$3) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1 \quad \text{– гипербола} \quad (a, b > 0);$$

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0 \quad \begin{cases} \text{действительных (-)} \\ \text{мнимых (+)} \end{cases} \quad (a \geq b > 0);$$

1-5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

6) $\hat{y}^2 = 2p \hat{x}$ – парабола ($p > 0$);

7) $\hat{y}^2 = \pm a^2$ – пара
8) параллельных
прямых $\left[\begin{array}{l} \text{действительных (+)} \\ \text{мнимых (-)} \end{array} (a > 0); \right.$

9) $\hat{y}^2 = 0$ – пара совпавших прямых.

4)

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0 \quad -$$

5)

пересекающихся
прямых

$$\begin{array}{l}
 4) \\
 5) \frac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0 \quad - \quad \left[\begin{array}{l} \text{действительных } (-) \\ \text{мнимых } (+) \end{array} \right. \\
 \text{пересекающихся} \\
 \text{прямых} \\
 (a \geq b > 0);
 \end{array}$$

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0 \quad \begin{cases} \text{действительных (-)} \\ \text{мнимых (+)} \end{cases} \quad (a \geq b > 0);$$

1-5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

6) $\hat{y}^2 = 2p \hat{x}$ – парабола ($p > 0$);

$$\begin{array}{l}
 4) \\
 5) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0 \quad - \quad \left[\begin{array}{l} \text{действительных } (-) \\ \text{мнимых } (+) \end{array} \right. \\
 \quad \quad \quad \text{пересекающихся} \\
 \quad \quad \quad \text{прямых} \quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right] \quad (a \geq b > 0);
 \end{array}$$

1–5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

$$6) \quad \hat{y}^2 = 2p\hat{x} \quad - \text{парабола } (p > 0);$$

$$\begin{array}{l}
 7) \\
 8) \quad \hat{y}^2 = \pm a^2 \quad - \text{пара} \\
 \quad \quad \quad \text{параллельных} \\
 \quad \quad \quad \text{прямых}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 4) \\
 5) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0 \quad - \quad \left[\begin{array}{l} \text{действительных } (-) \\ \text{мнимых } (+) \end{array} \right. \\
 \quad \quad \quad \text{пересекающихся} \\
 \quad \quad \quad \text{прямых} \quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right] \quad (a \geq b > 0);
 \end{array}$$

1–5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

$$6) \quad \hat{y}^2 = 2p\hat{x} \quad - \text{парабола } (p > 0);$$

$$\begin{array}{l}
 7) \\
 8) \quad \hat{y}^2 = \pm a^2 \quad - \text{пара} \\
 \quad \quad \quad \text{параллельных} \\
 \quad \quad \quad \text{прямых} \quad \quad \quad \left[\begin{array}{l} \text{действительных } (+) \\ \text{мнимых } (-) \end{array} \right. \quad (a > 0);
 \end{array}$$

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} \mp \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0 \quad \begin{cases} \text{действительных (-)} \\ \text{мнимых (+)} \end{cases} \quad (a \geq b > 0);$$

1-5 – уравнения центральных кривых второго порядка.

6) $\hat{y}^2 = 2p \hat{x}$ – парабола ($p > 0$);

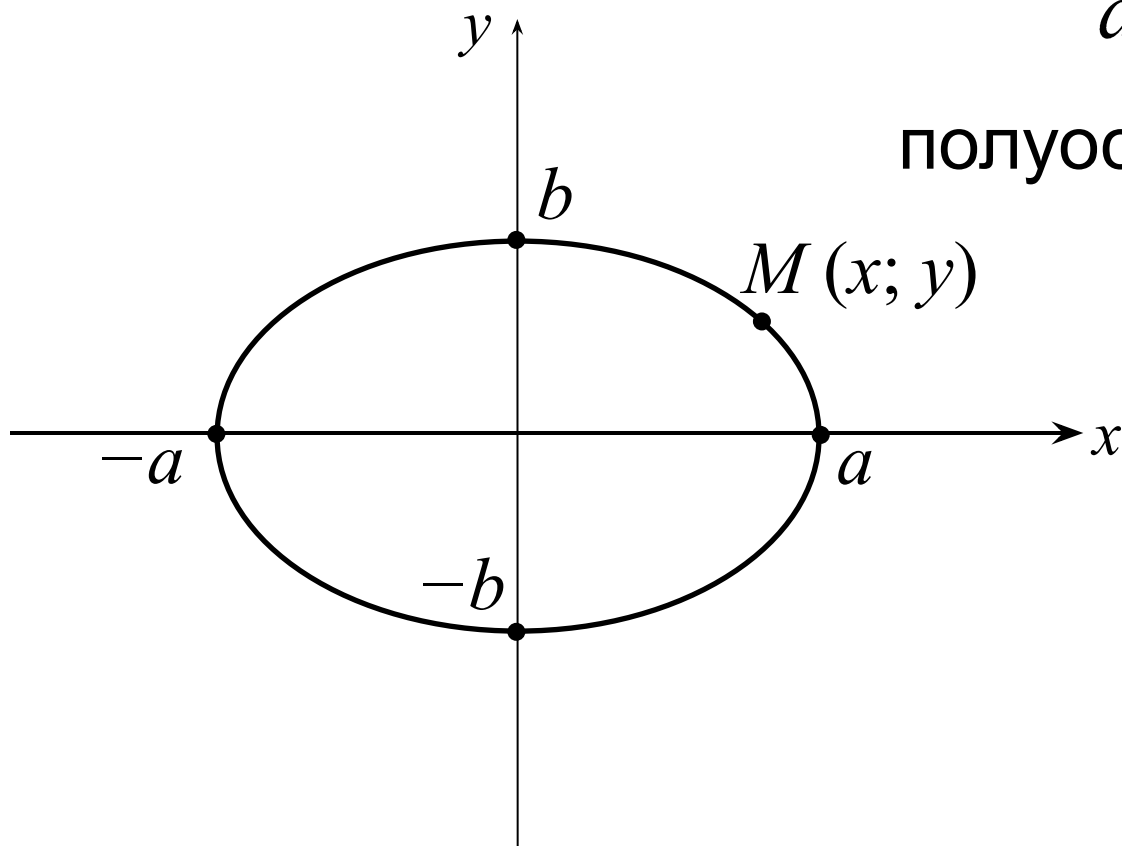
7) $\hat{y}^2 = \pm a^2$ – пара
8) параллельных
прямых $\left[\begin{array}{l} \text{действительных (+)} \\ \text{мнимых (-)} \end{array} (a > 0); \right.$

9) $\hat{y}^2 = 0$ – пара совпавших прямых.

34.4. Эллипс действительный $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

34.4. Эллипс действительный $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

полуоси $a \geq b > 0$;

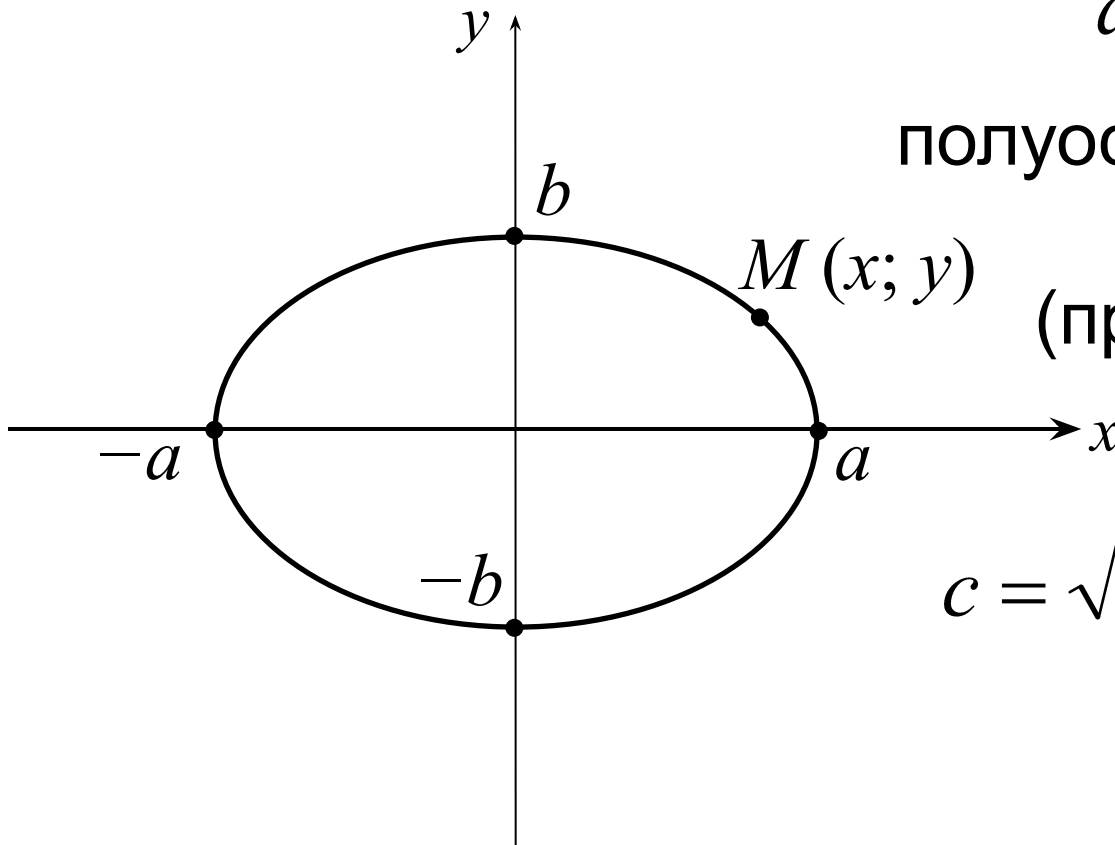


34.4. Эллипс действительный $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

полуоси $a \geq b > 0$;

(при $a = b$ – окружность
радиуса a);

$$c = \sqrt{a^2 - b^2};$$



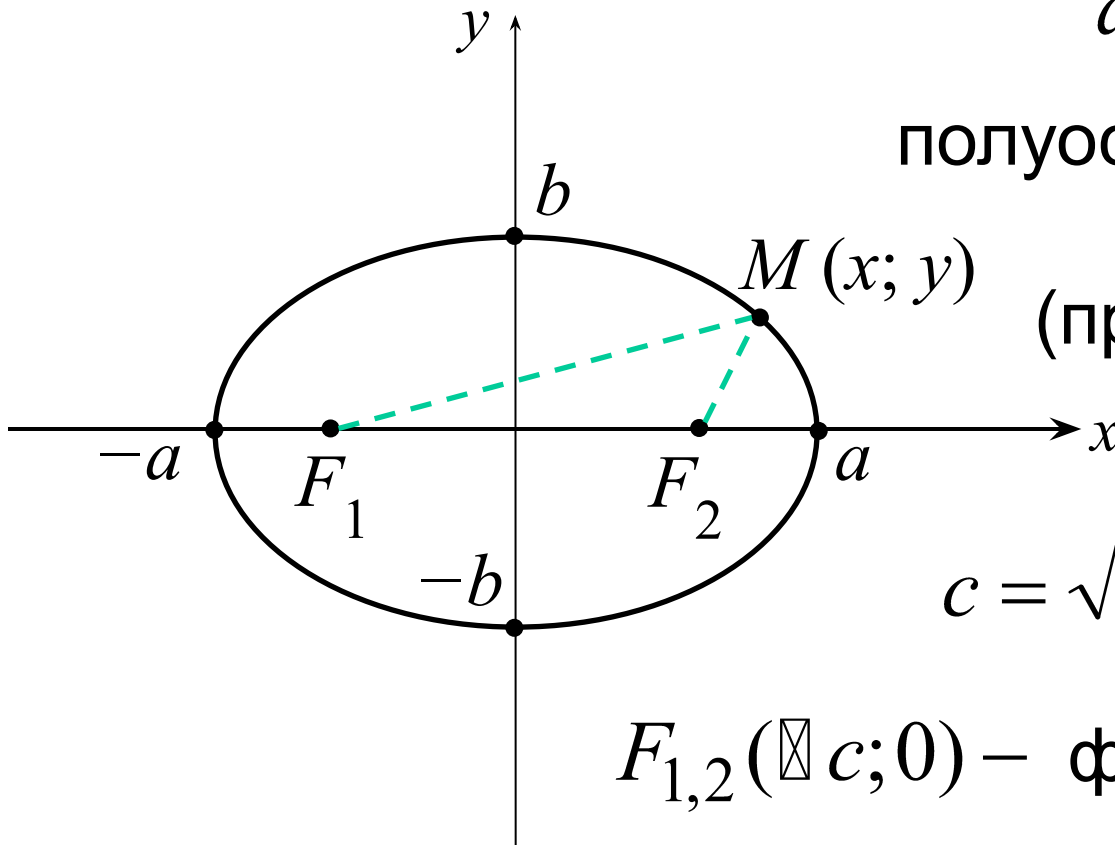
34.4. Эллипс действительный $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

полуоси $a \geq b > 0$;

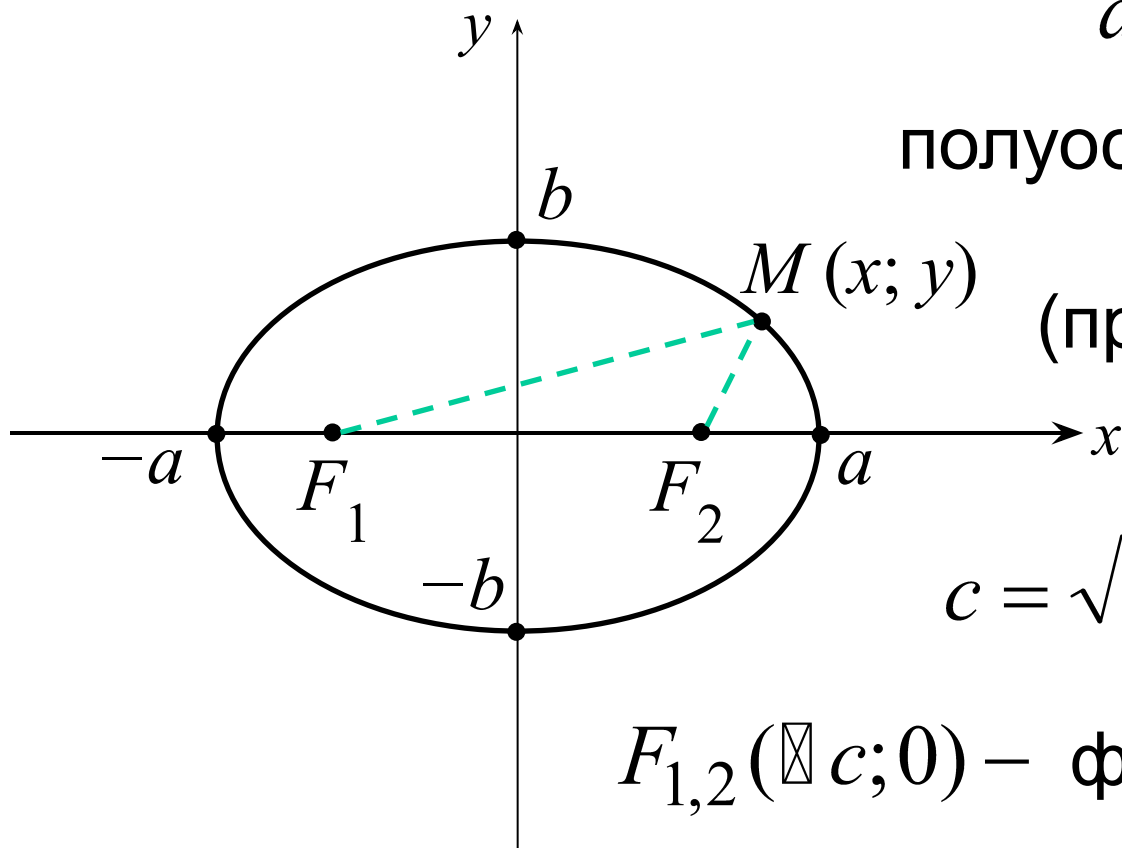
(при $a = b$ – окружность
радиуса a);

$$c = \sqrt{a^2 - b^2};$$

$F_{1,2}(\pm c; 0)$ – фокусы;



34.4. Эллипс действительный $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



полуоси $a \geq b > 0$;

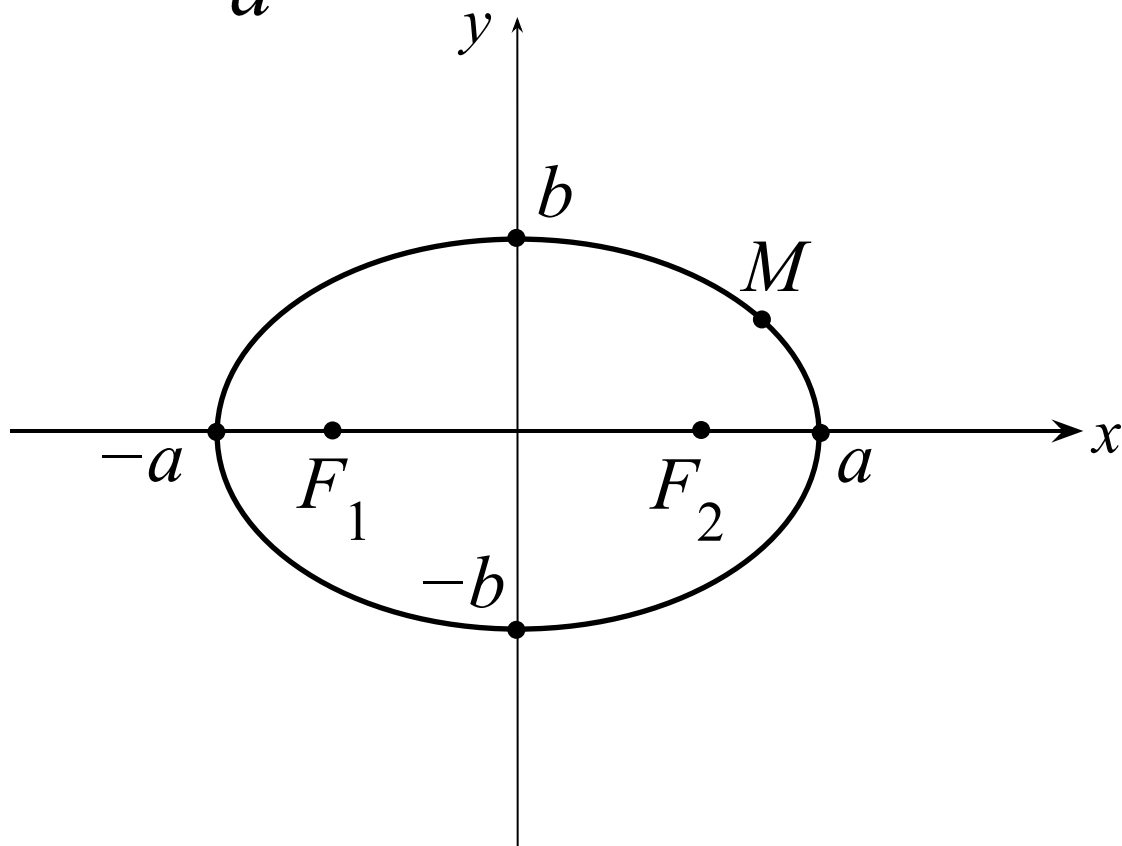
(при $a = b$ – окружность
радиуса a);

$$c = \sqrt{a^2 - b^2};$$

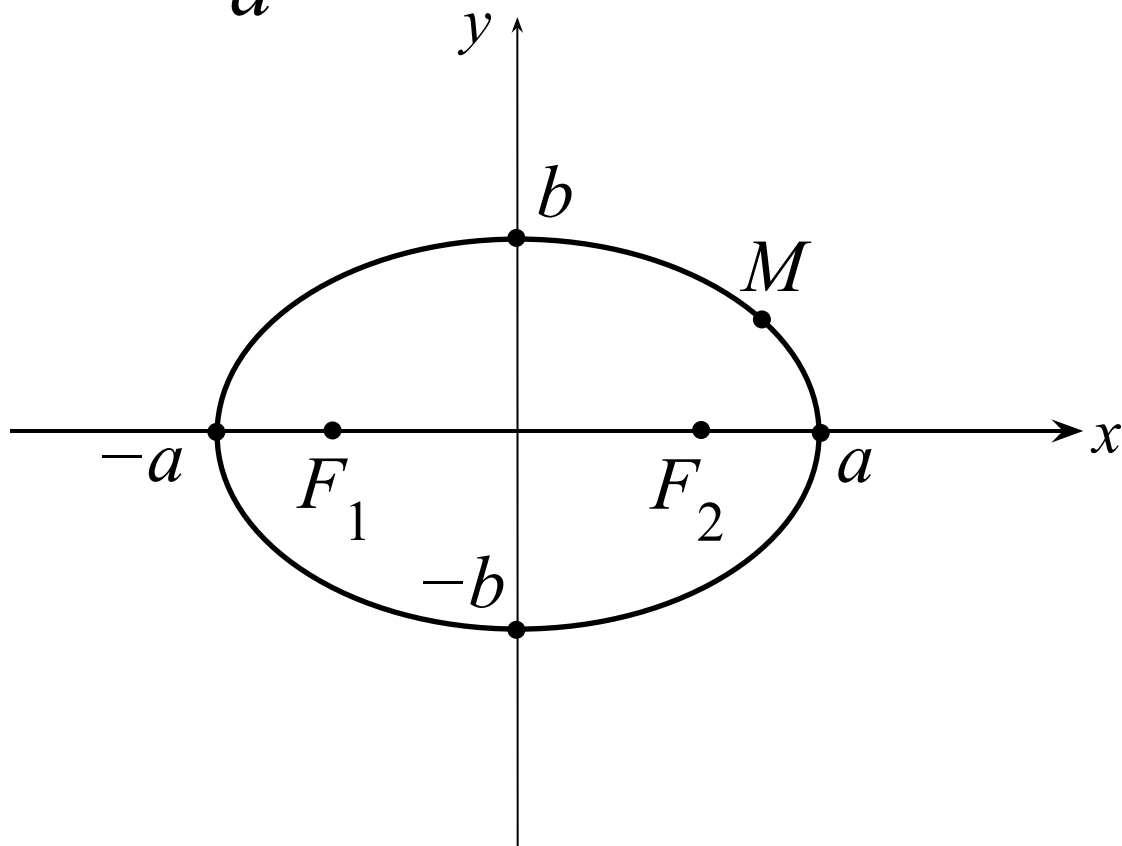
$F_{1,2}(\pm c; 0)$ – фокусы;

$$M \in \mathfrak{E} \Leftrightarrow |MF_1| + |MF_2| = 2a$$

$e = \frac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет;



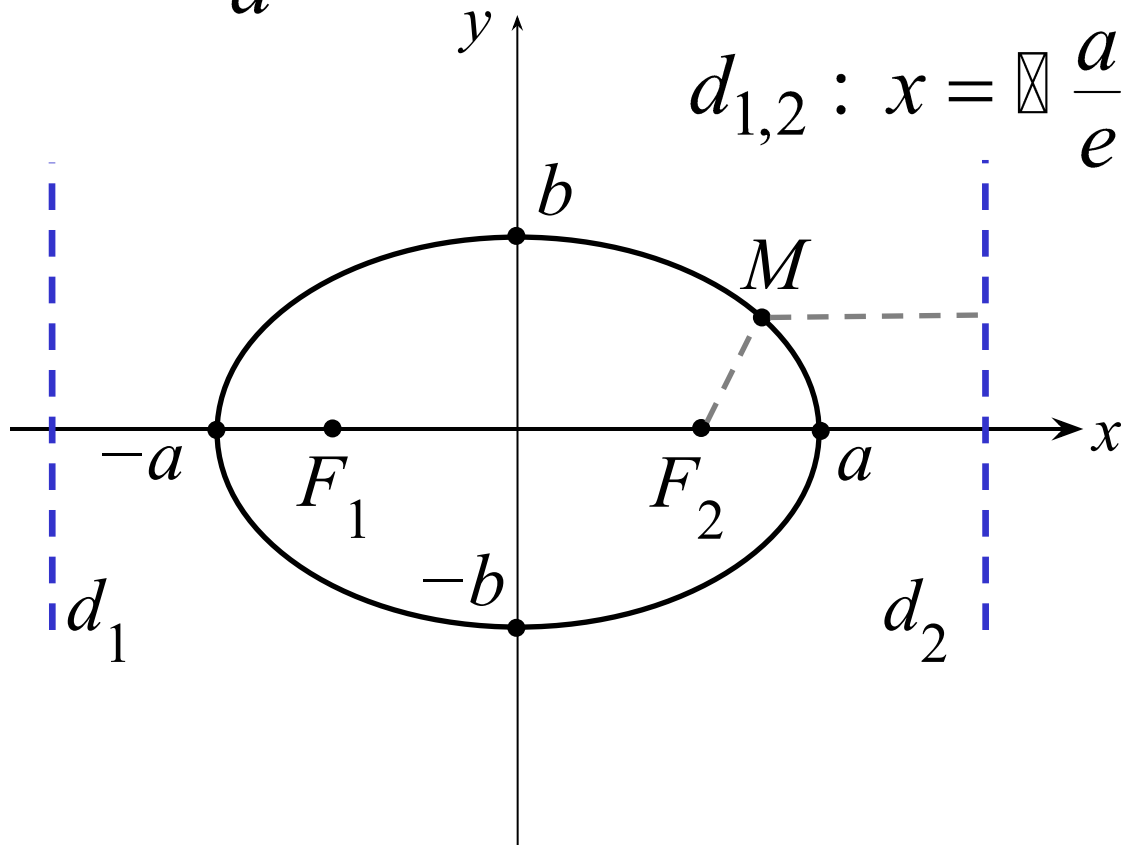
$e = \frac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет;



$$|MF_{1,2}| = a \pm ex$$

$e = \frac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет;

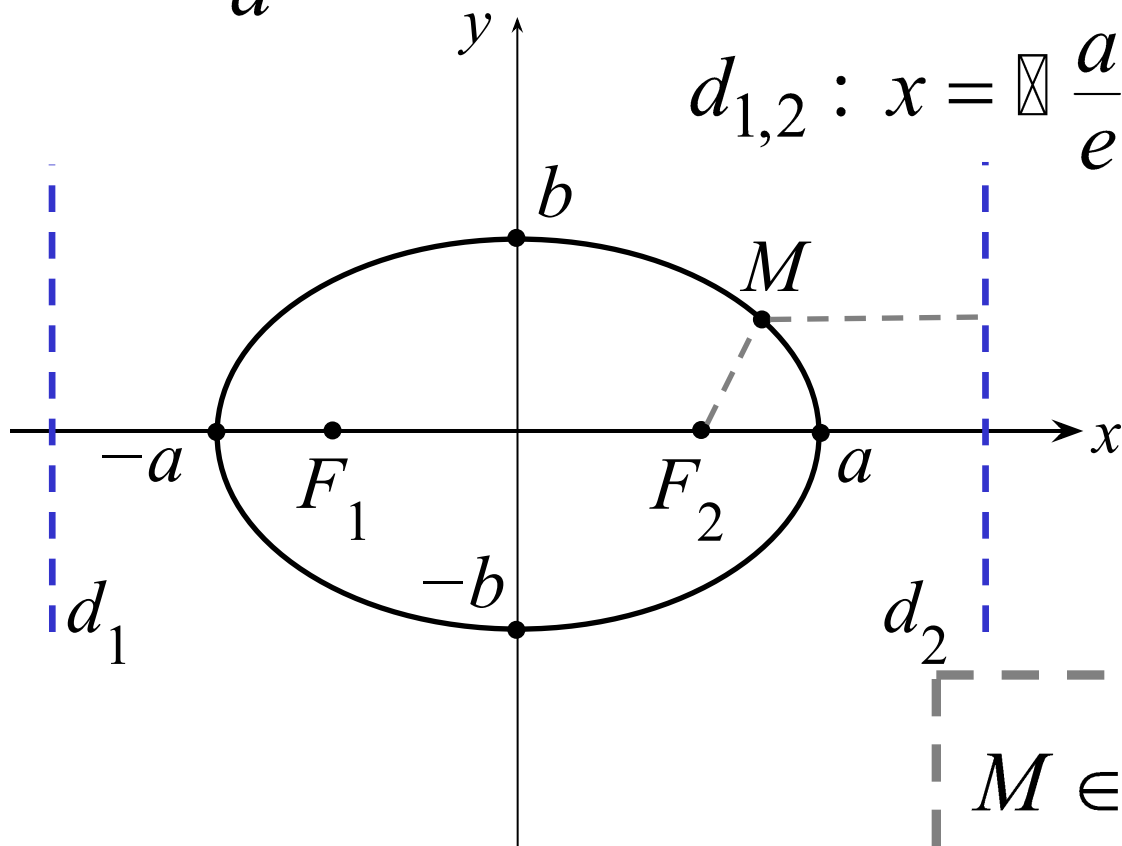
$d_{1,2} : x = \mp \frac{a}{e}$ – директрисы:



$$|MF_{1,2}| = a \pm ex$$

$e = \frac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет;

$d_{1,2} : x = \mp \frac{a}{e}$ – директрисы:

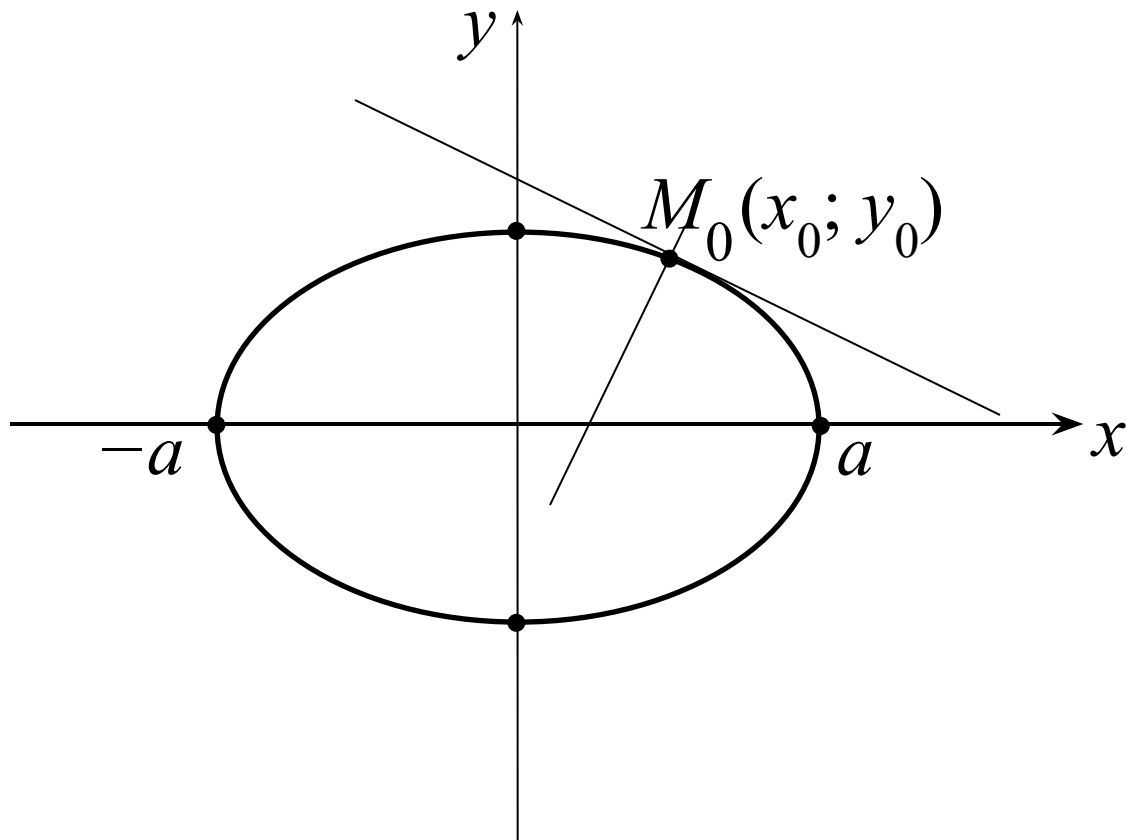


$$|MF_{1,2}| = a \pm ex$$

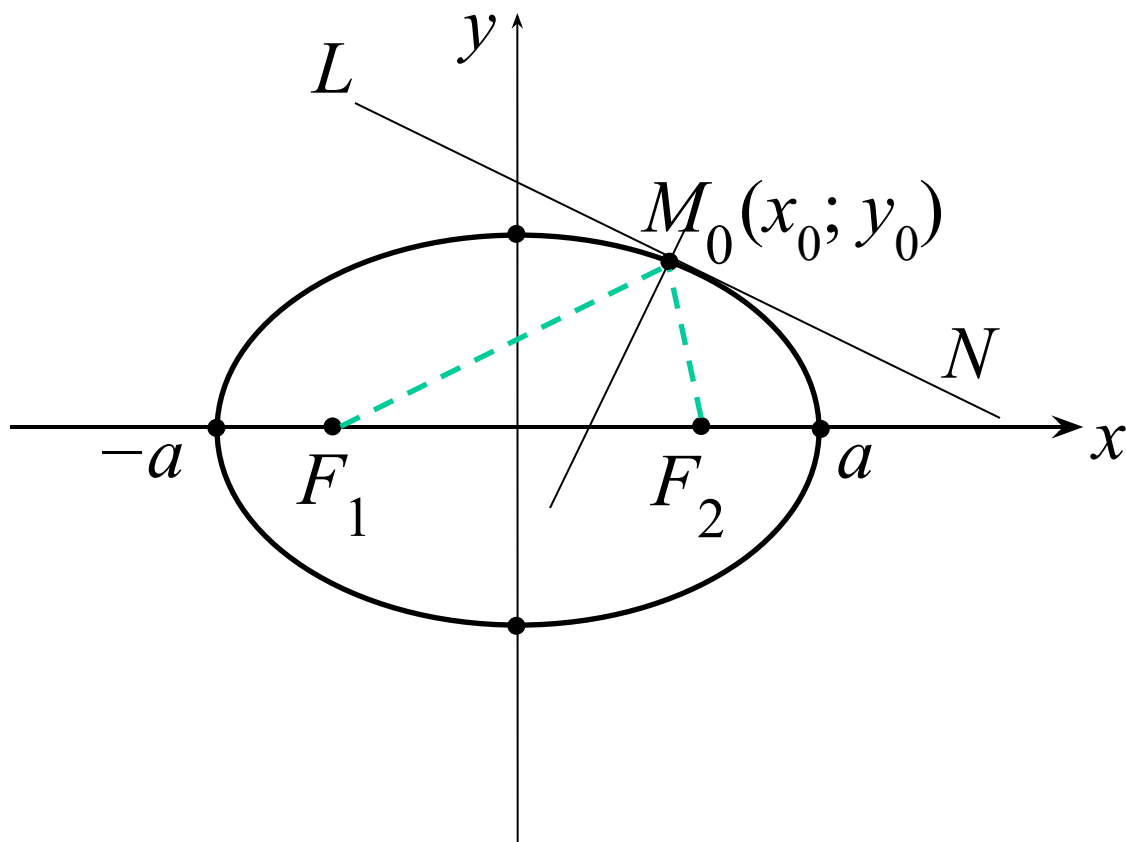
$$M \in \mathfrak{E} \Leftrightarrow \frac{|MF_{1,2}|}{\rho(M, d_{1,2})} = e$$

$\rho(M, d_1)$ – расстояние от точки M до директрисы d_1

Касательная к эллипсу:

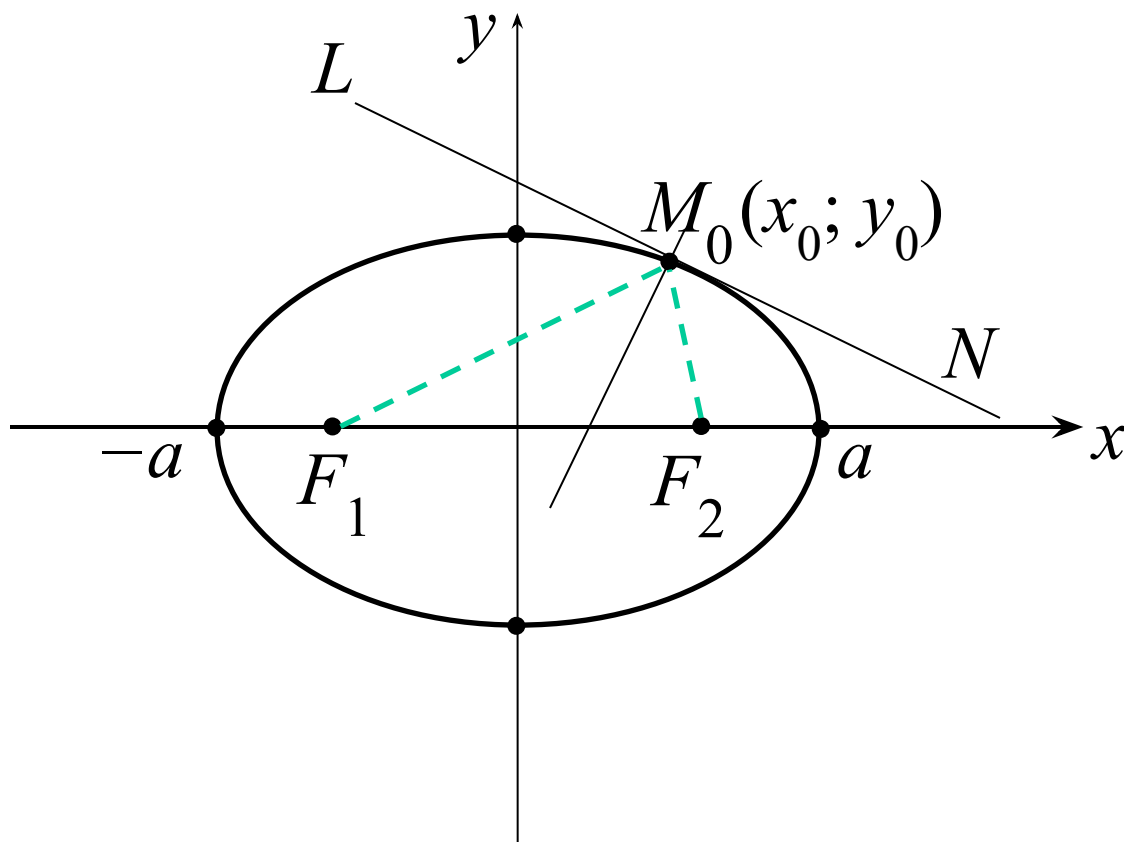


Касательная к эллипсу:



Свойство касательной: $\angle LM_0F_1 = \angle NM_0F_2$.

Касательная к эллипсу:



Уравнение
касательной
в точке
 $M_0(x_0; y_0) \in \mathcal{E}$:

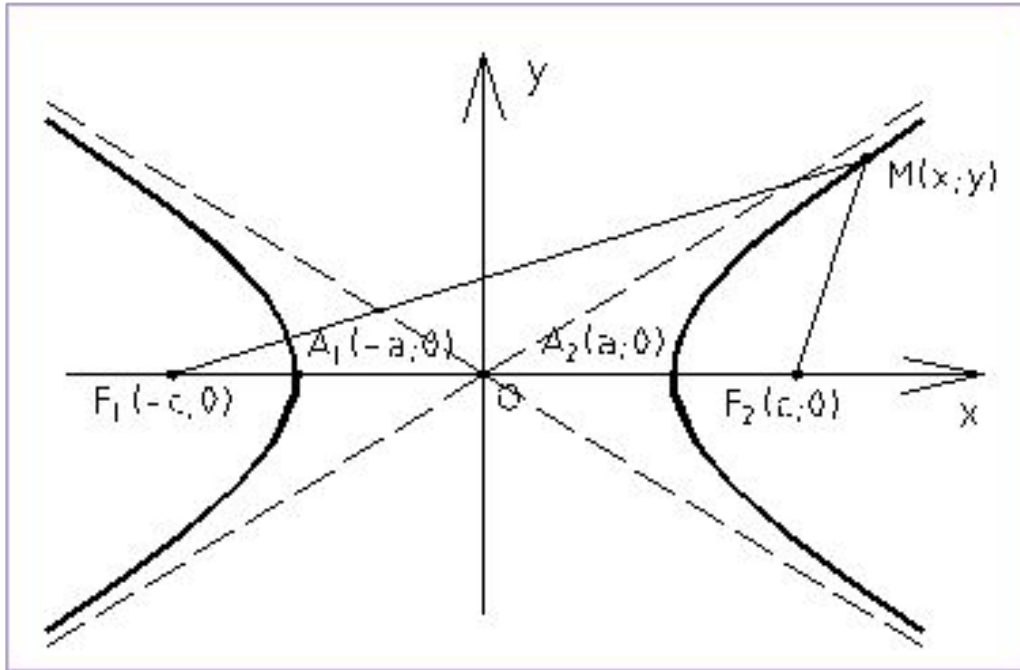
$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

Свойство касательной: $\angle LM_0F_1 = \angle NM_0F_2$.

34.5. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

полуоси $a, b > 0$;

34.5. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



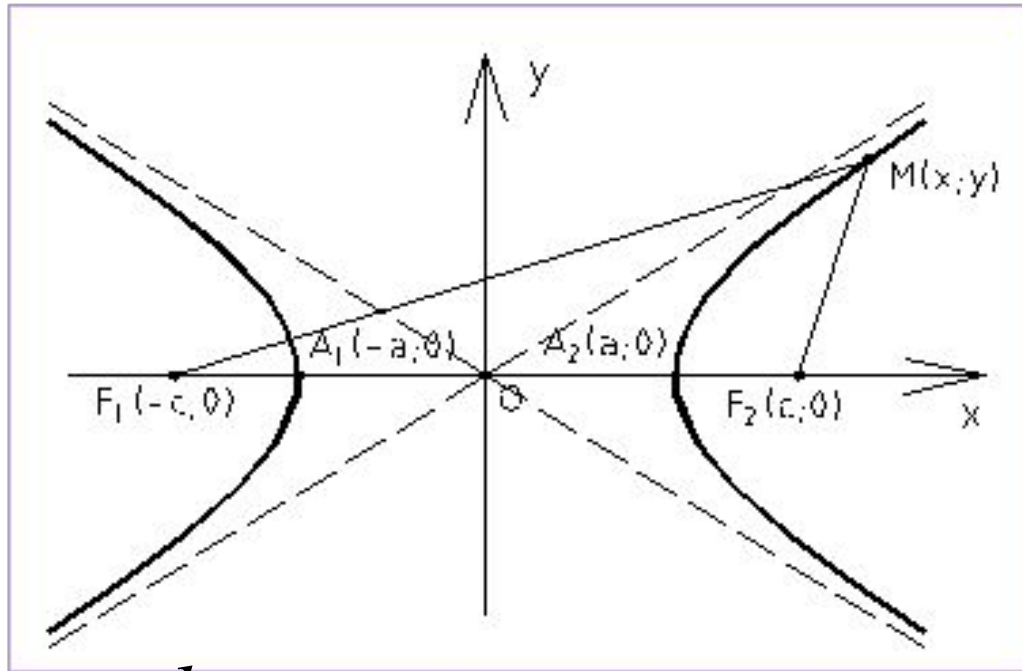
полуоси $a, b > 0$;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$e = \frac{c}{a} > 1 -$$

эксцентриситет;

34.5. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$y = \pm \frac{b}{a} x$ — асимптоты;

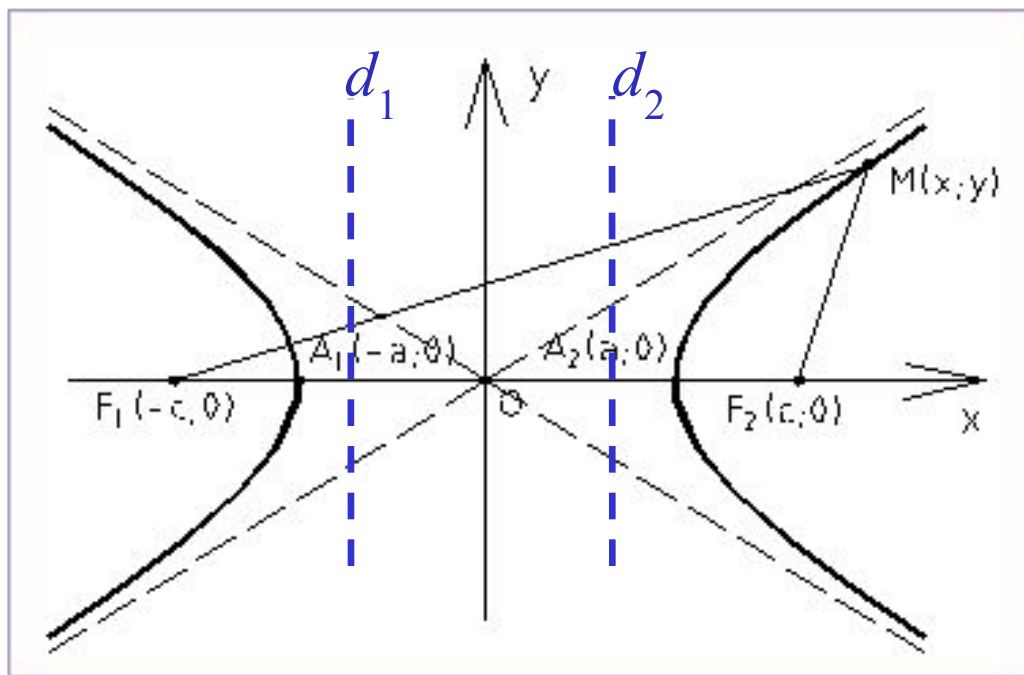
полуоси $a, b > 0$;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$e = \frac{c}{a} > 1 -$$

эксцентриситет;

34.5. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



полуоси $a, b > 0$;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$e = \frac{c}{a} > 1 -$$

эксцентриситет;

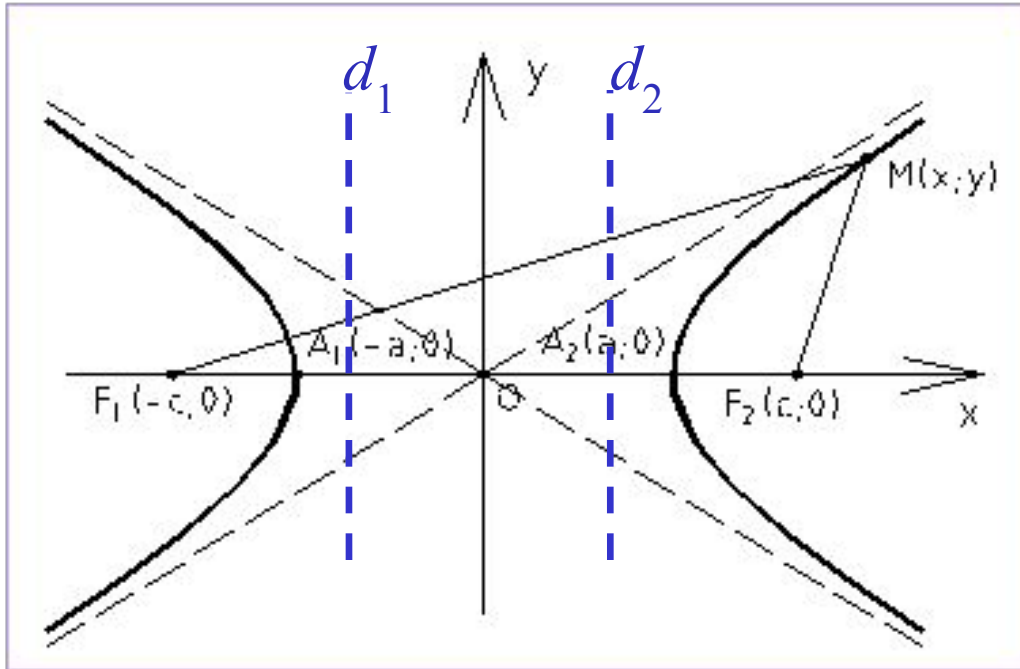
$F_{1,2}(\pm c; 0)$ – фокусы;

$d_{1,2} : x = \pm \frac{a}{e}$ – директрисы;

$y = \pm \frac{b}{a} x$ – асимптоты;

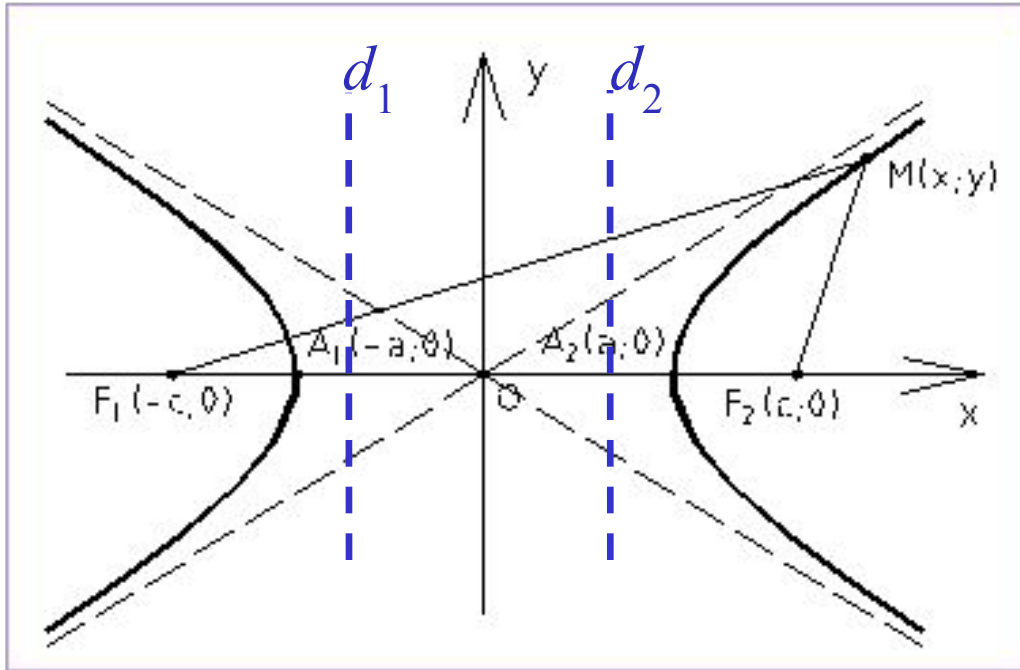
34.5. Гипербола

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow ||MF_1| - |MF_2|| = 2a$$



34.5. Гипербола

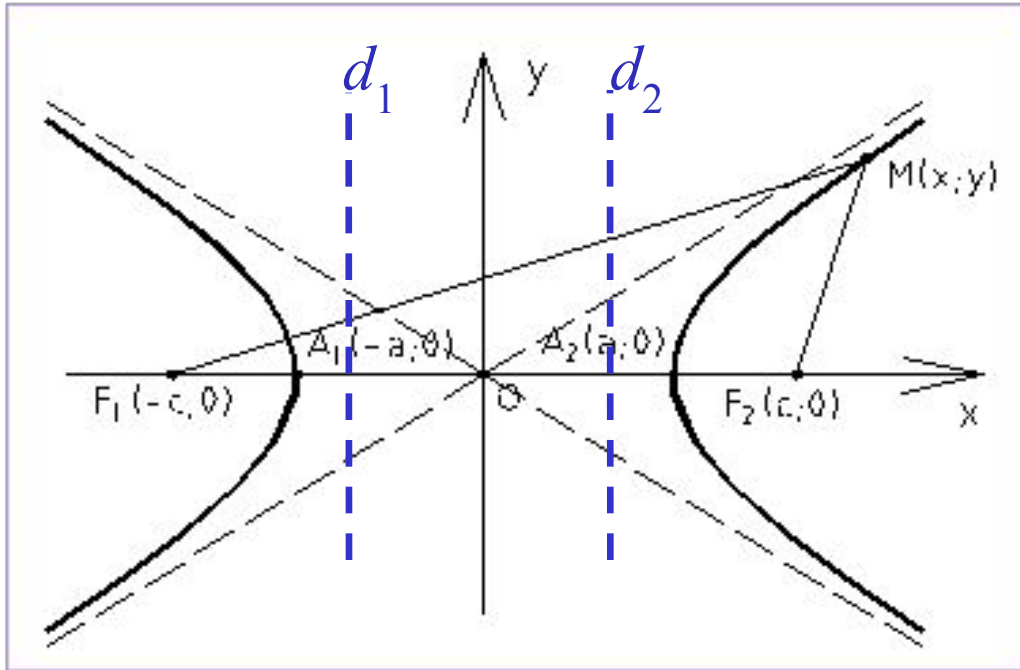
$$M \in \Gamma \Leftrightarrow ||MF_1| - |MF_2|| = 2a$$



$$\Leftrightarrow \frac{|MF_{1,2}|}{\rho(M, d_{1,2})} = e;$$

34.5. Гипербола

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow ||MF_1| - |MF_2|| = 2a$$

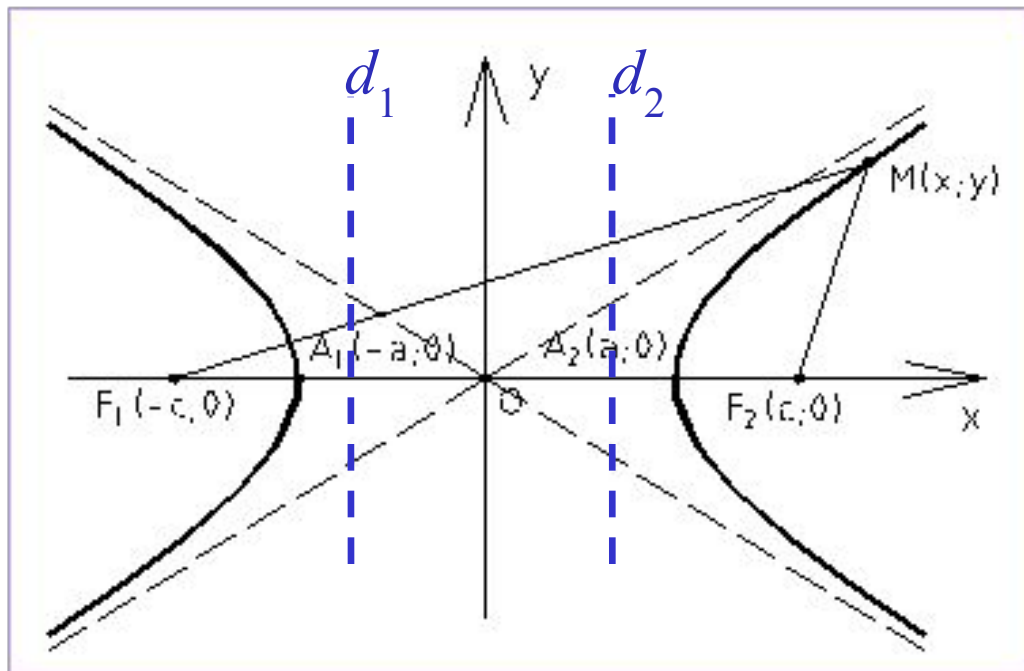


$$\Leftrightarrow \frac{|MF_{1,2}|}{\rho(M, d_{1,2})} = e;$$

$$|MF_{1,2}| = a \pm ex$$

34.5. Гипербола

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow ||MF_1| - |MF_2|| = 2a$$



$$\Leftrightarrow \frac{|MF_{1,2}|}{\rho(M, d_{1,2})} = e;$$

$$|MF_{1,2}| = a \pm ex$$

Уравнение касательной

в точке $M_0(x_0; y_0) \in \Gamma$:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

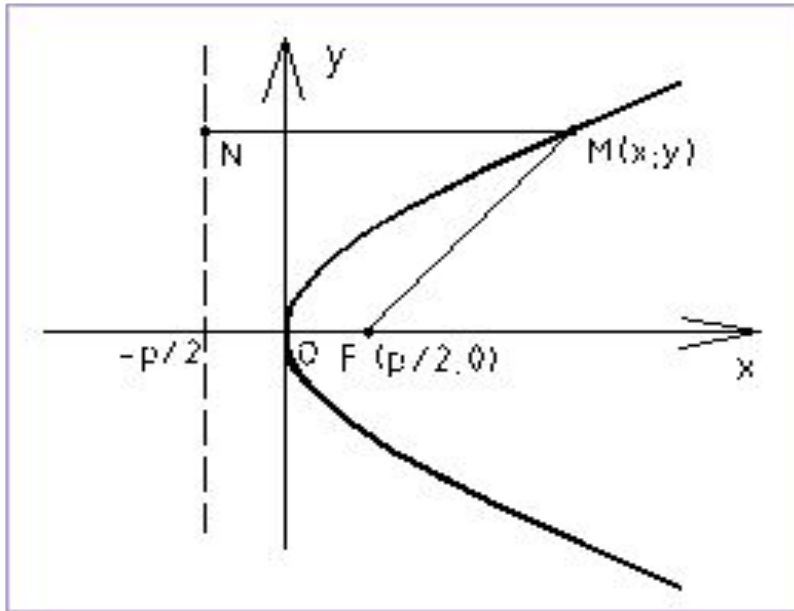
34.5. Парабола

$$y^2 = 2p x$$

34.5. Парабола

$$y^2 = 2px$$

$d : x = -\frac{p}{2}$ – директриса:



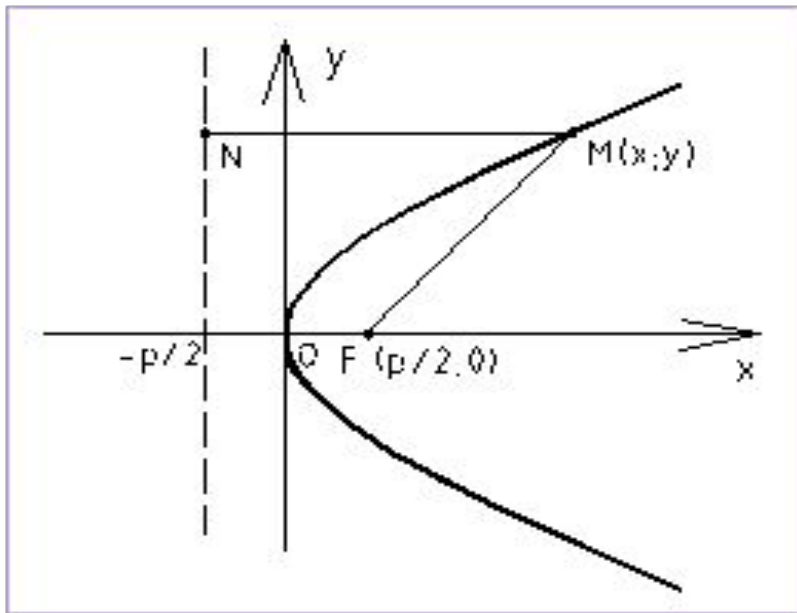
34.5. Парабола

$$y^2 = 2px$$

$d : x = -\frac{p}{2}$ – директриса:

$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус;

$$M \in \Pi \Leftrightarrow |FM| = \rho(M, d)$$



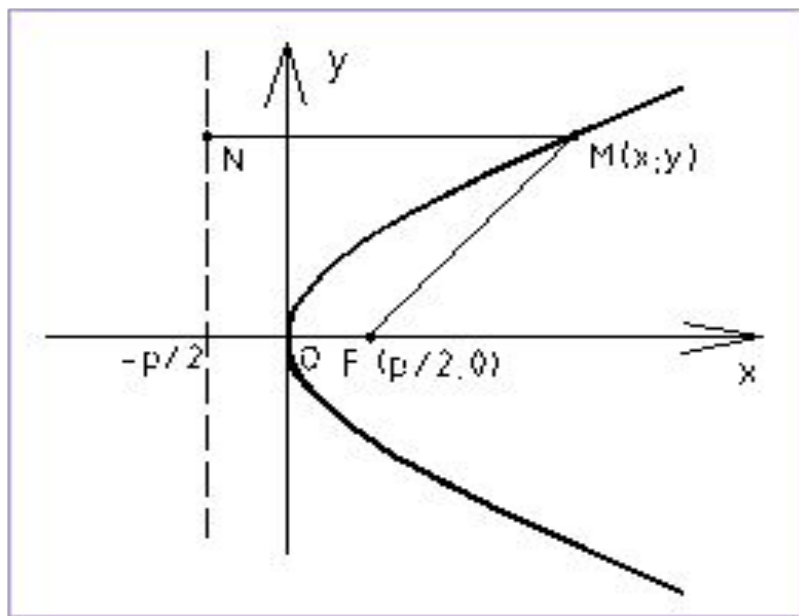
34.5. Парабола

$$y^2 = 2px$$

$d : x = -\frac{p}{2}$ – директриса:

$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус;

$$M \in \Pi \Leftrightarrow |FM| = \rho(M, d)$$



Уравнение касательной

в точке $M_0(x_0; y_0) \in \Pi$: $yy_0 = px + px_0$

34.6. Система координат $\hat{O}, \bar{i}, \bar{j}$, в которой уравнение кривой второго порядка имеет канонический вид, называется *канонической*.

34.6. Система координат $\hat{O}, \bar{i}, \bar{j}$, в которой уравнение кривой второго порядка имеет канонический вид, называется *канонической*.

Каноническая система координат определяется, вообще говоря, **неоднозначно**.

35. Поверхности второго порядка

35. Поверхности второго порядка

35.1. Общее уравнение

$O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – п.д.с.к.

35. Поверхности второго порядка

35.1. Общее уравнение

$O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – п.д.с.к.

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, задаваемое

уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

35. Поверхности второго порядка

35.1. Общее уравнение

$O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – п.д.с.к.

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, задаваемое

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

35.2. Заменой переменных
(Q – ортогональная матрица)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \quad (\text{п. 33.6})$$

35. Поверхности второго порядка

35.1. Общее уравнение

$O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – п.д.с.к.

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, задаваемое

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

35.2. Заменой переменных

(Q – ортогональная матрица)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \quad (\text{п. 33.6})$$

уравнение можно упростить, приведя квадратичную форму

к главным осям, $\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2$,
 выбирая в пространстве новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}, \bar{\tilde{k}}$:

$$|\bar{\tilde{i}}| = |\bar{\tilde{j}}| = |\bar{\tilde{k}}| = 1; \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}} \perp \bar{\tilde{k}} \perp \bar{\tilde{i}}.$$

35.3. Выбирая, если нужно, новое начало

координат,
 $O(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; \tilde{z}_0)$

– заменой

переменных

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \tilde{z}_0 \end{pmatrix} -$$

уравнение поверхности приводят к

каноническому виду – одному из **семнадцати**:

к главным осям, $\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2,$

к главным осям, $\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2$,
 выбирая в пространстве новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}, \bar{\tilde{k}}$:

$$|\bar{\tilde{i}}| = |\bar{\tilde{j}}| = |\bar{\tilde{k}}| = 1; \quad \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}} \perp \bar{\tilde{k}} \perp \bar{\tilde{i}}.$$

к главным осям, $\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2$,
 выбирая в пространстве новый базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1; \bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k} \perp \bar{i}.$$

35.3. Выбирая, если нужно, новое начало
 координат,
 $O(x_0, y_0; z_0)$

к главным осям, $\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2$,
 выбирая в пространстве новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}, \bar{\tilde{k}}$:

$$|\bar{\tilde{i}}| = |\bar{\tilde{j}}| = |\bar{\tilde{k}}| = 1; \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}} \perp \bar{\tilde{k}} \perp \bar{\tilde{i}}.$$

35.3. Выбирая, если нужно, новое начало

координат,
 $O(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; \tilde{z}_0)$

– заменой

переменных

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \tilde{z}_0 \end{pmatrix} -$$

уравнение поверхности приводят к

каноническому виду

к главным осям, $\varphi = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2$,
 выбирая в пространстве новый базис $\bar{\tilde{i}}, \bar{\tilde{j}}, \bar{\tilde{k}}$:

$$|\bar{\tilde{i}}| = |\bar{\tilde{j}}| = |\bar{\tilde{k}}| = 1; \bar{\tilde{i}} \perp \bar{\tilde{j}} \perp \bar{\tilde{k}} \perp \bar{\tilde{i}}.$$

35.3. Выбирая, если нужно, новое начало

координат,
 $O(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; \tilde{z}_0)$

– заменой

переменных

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \tilde{z}_0 \end{pmatrix} -$$

уравнение поверхности приводят к

каноническому виду – одному из **семнадцати**:

Эллипсоиды:

$$\begin{array}{l} 1) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} + \frac{\hat{z}^2}{c^2} = \pm 1 \\ 2) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} + \frac{\hat{z}^2}{c^2} = \pm 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{действительный (+)} \\ \text{мнимый (-)} ; \end{array}$$

$(a \geq b \geq c > 0)$

Эллипсоиды:

$$\begin{array}{l} 1) \quad \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 = \pm 1 \\ 2) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} + \frac{\hat{z}^2}{c^2} = \pm 1 \\ \quad \quad (a \geq b \geq c > 0) \end{array} \left[\begin{array}{l} \text{действительный (+)} \\ \text{мнимый (-)} ; \end{array} \right.$$

Гиперболоиды:

$$\begin{array}{l} 3) \quad \hat{x}^2 + \hat{y}^2 - \hat{z}^2 = \pm 1 \\ 4) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} - \frac{\hat{z}^2}{c^2} = \pm 1 \\ \quad \quad (a \geq b > 0) \end{array} \left[\begin{array}{l} \text{однополостный (+)} \\ \text{двуполостный (-)} ; \end{array} \right.$$

Эллипсоиды:

$$\begin{array}{l} 1) \quad \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 = \pm 1 \\ 2) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} + \frac{\hat{z}^2}{c^2} = \pm 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{действительный (+)} \\ \text{мнимый (-)}; \end{array} \quad (a \geq b \geq c > 0)$$

Гиперболоиды:

$$\begin{array}{l} 3) \quad \hat{x}^2 + \hat{y}^2 - \hat{z}^2 = \pm 1 \\ 4) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} - \frac{\hat{z}^2}{c^2} = \pm 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{однополостный (+)} \\ \text{двуполостный (-)}; \end{array} \quad (a \geq b > 0)$$

Конусы:

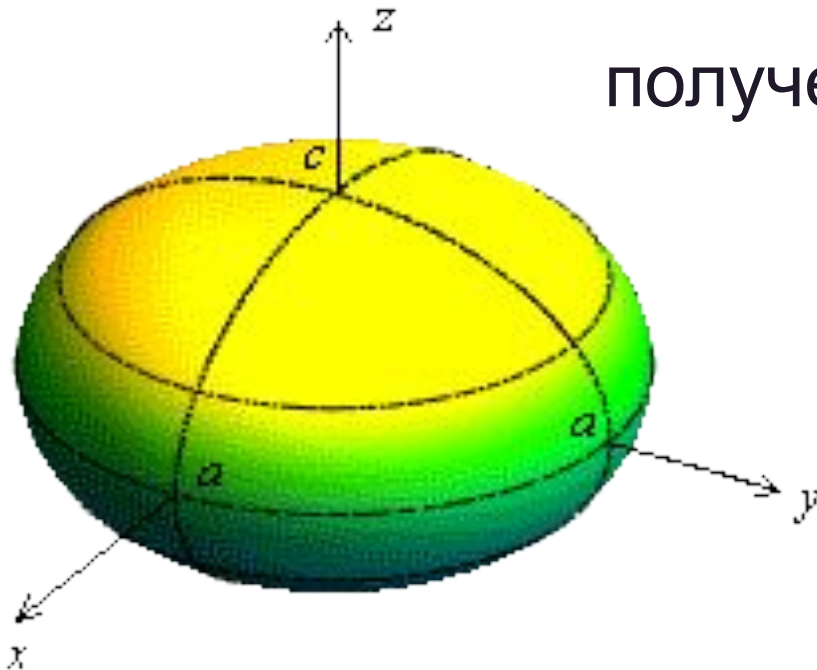
$$\begin{array}{l} 5) \quad \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \mp \hat{z}^2 = 0 \\ 6) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} \mp \frac{\hat{z}^2}{c^2} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{действительный (-)} (a \geq b > 0), \\ \text{мнимый (+)} (a \geq b \geq c > 0); \end{array}$$

Если две полуоси равны друг другу ($a=b$ или ...),
то эллипсоид называется эллипсоидом вращения

Если две полуоси равны друг другу ($a=b$ или ...),
то эллипсоид называется эллипсоидом вращения
– его можно получить вращением эллипса
вокруг одной из осей:

Если две полуоси равны друг другу ($a=b$ или ...), то эллипсоид называется эллипсоидом вращения – его можно получить вращением эллипса вокруг одной из осей:

эллипсоид вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
получен вращением эллипса



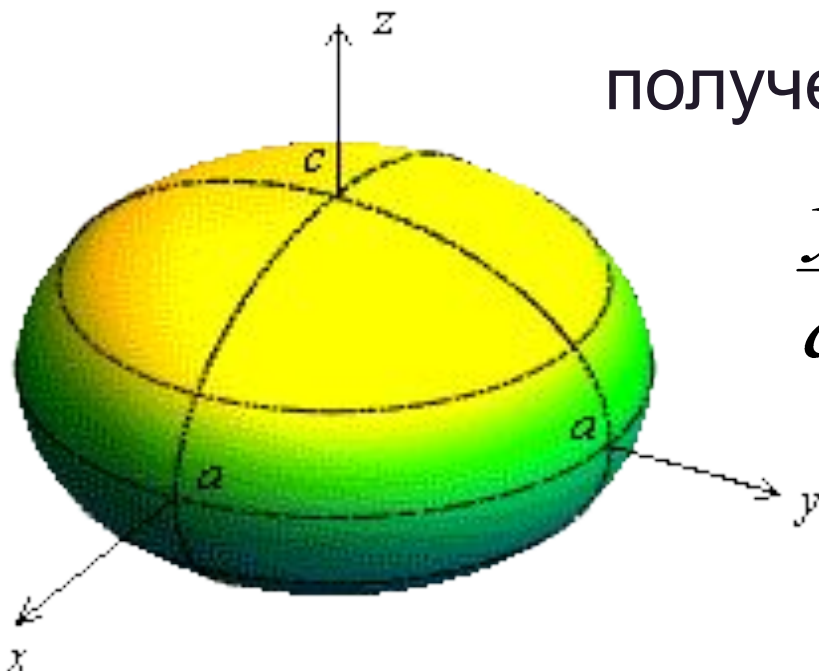
Если две полуоси равны друг другу ($a=b$ или ...), то эллипсоид называется эллипсоидом вращения – его можно получить вращением эллипса вокруг одной из осей:

эллипсоид вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

получен вращением эллипса

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

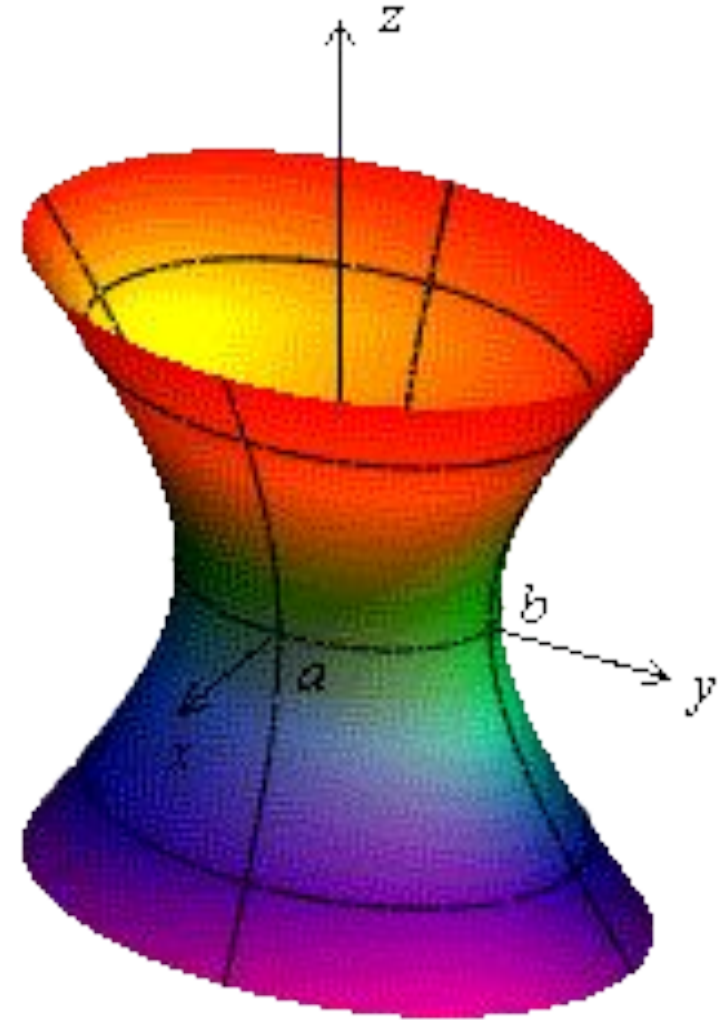
вокруг оси Oz .



3) Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

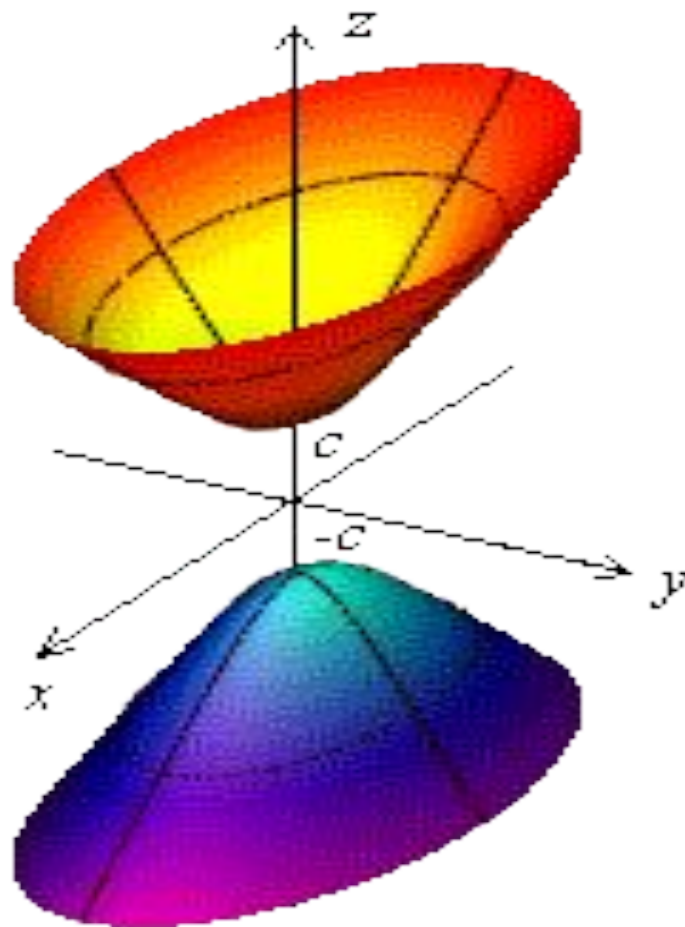
$$(a \geq b > 0):$$



4) Двуполостный гиперboloид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

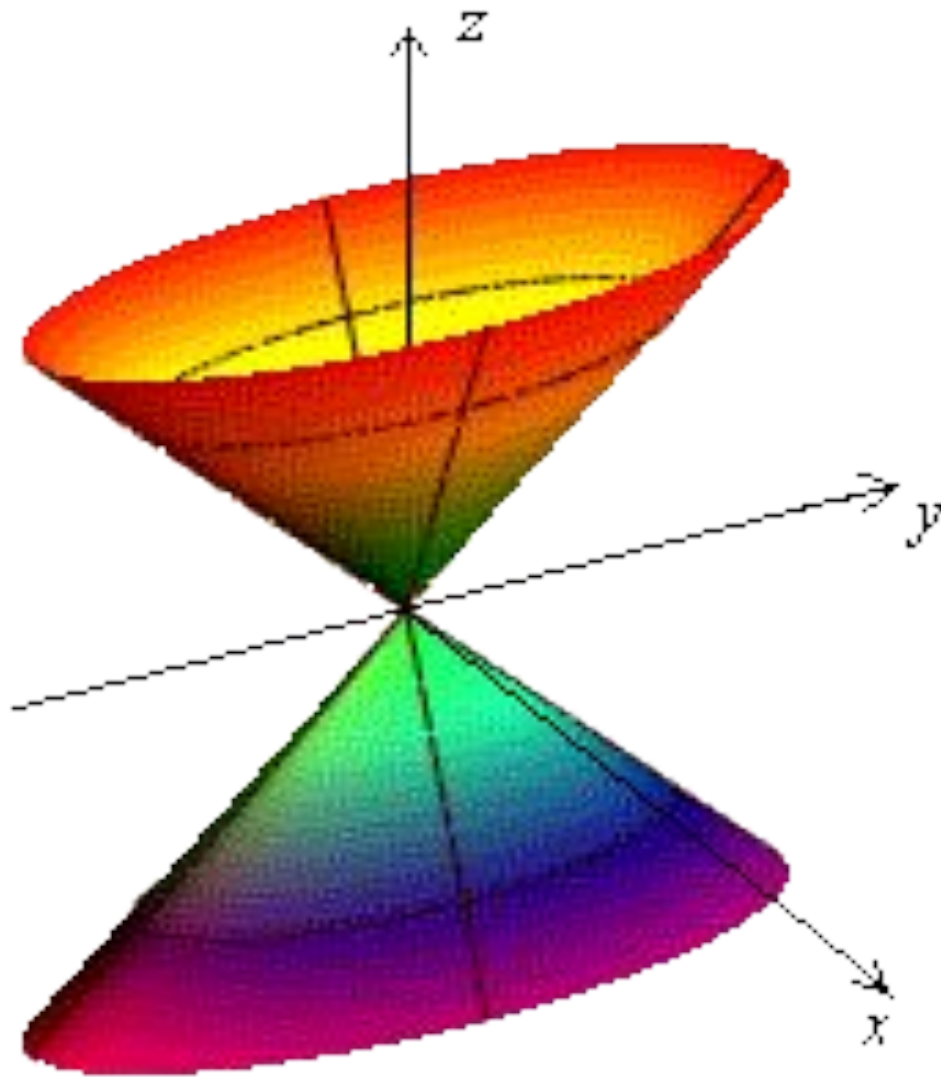
$$(a \geq b > 0):$$



5) Конус действительный

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

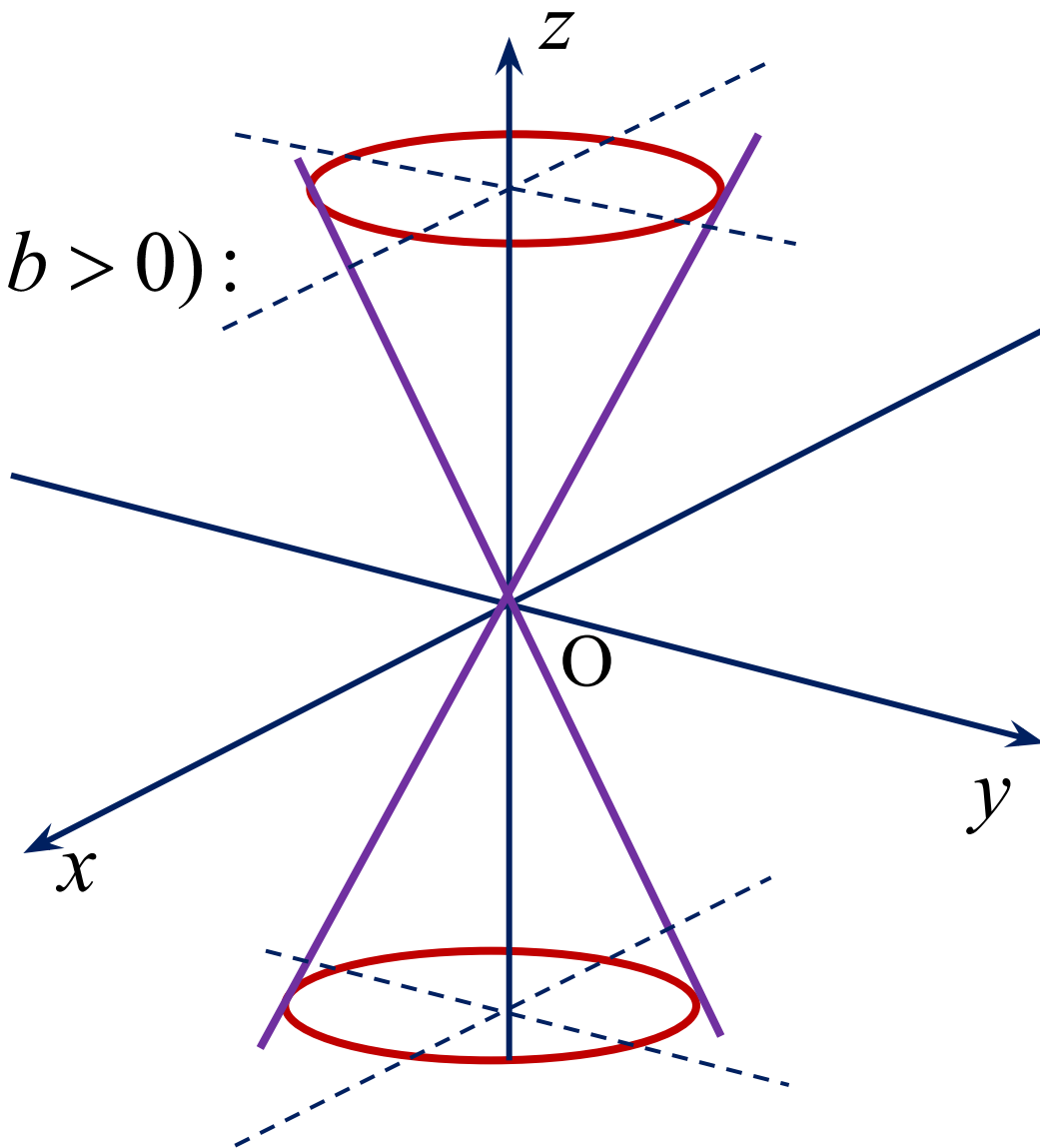
$$(a \geq b > 0):$$



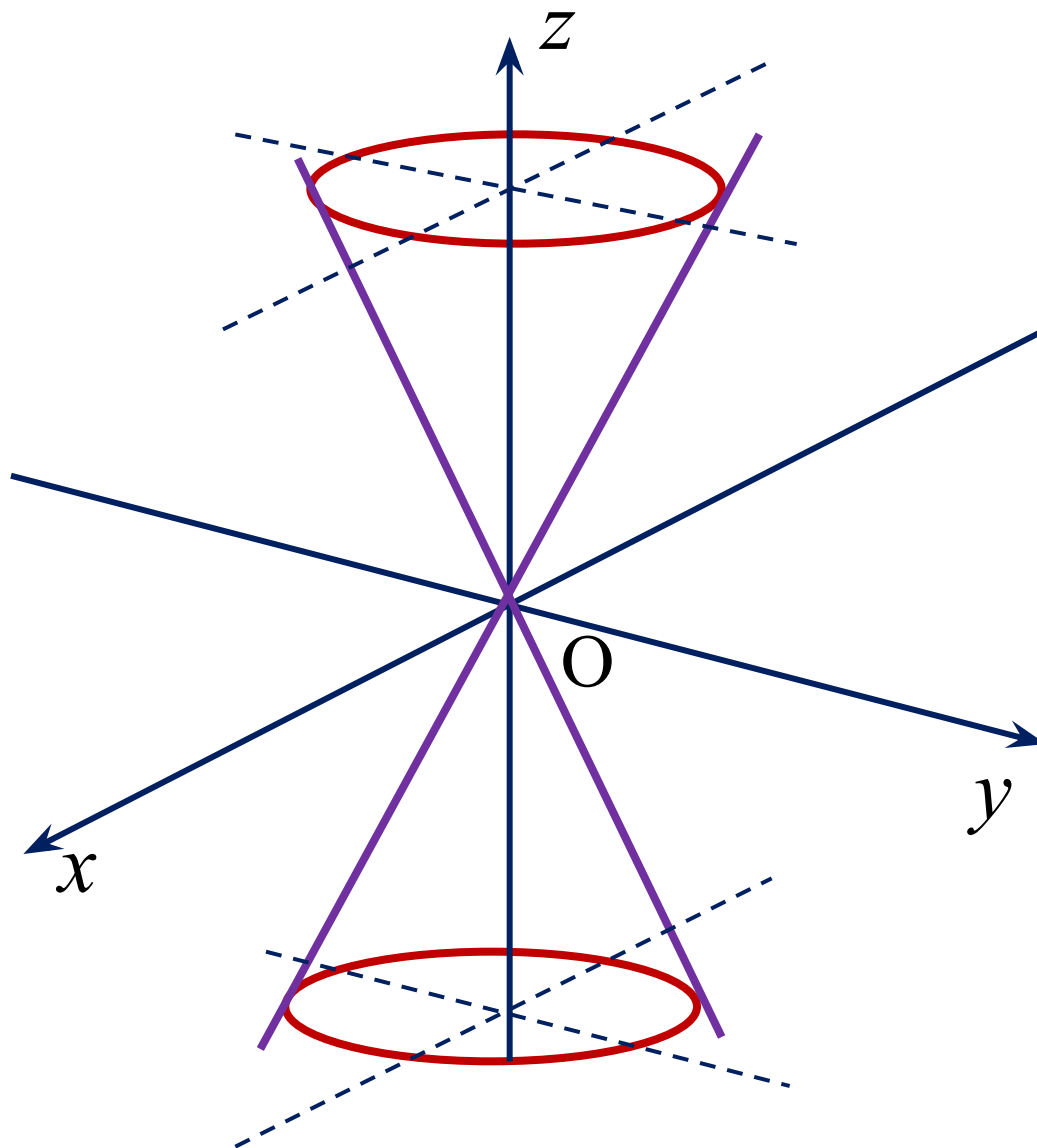
5) Конус действительный

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a \geq b > 0):$$

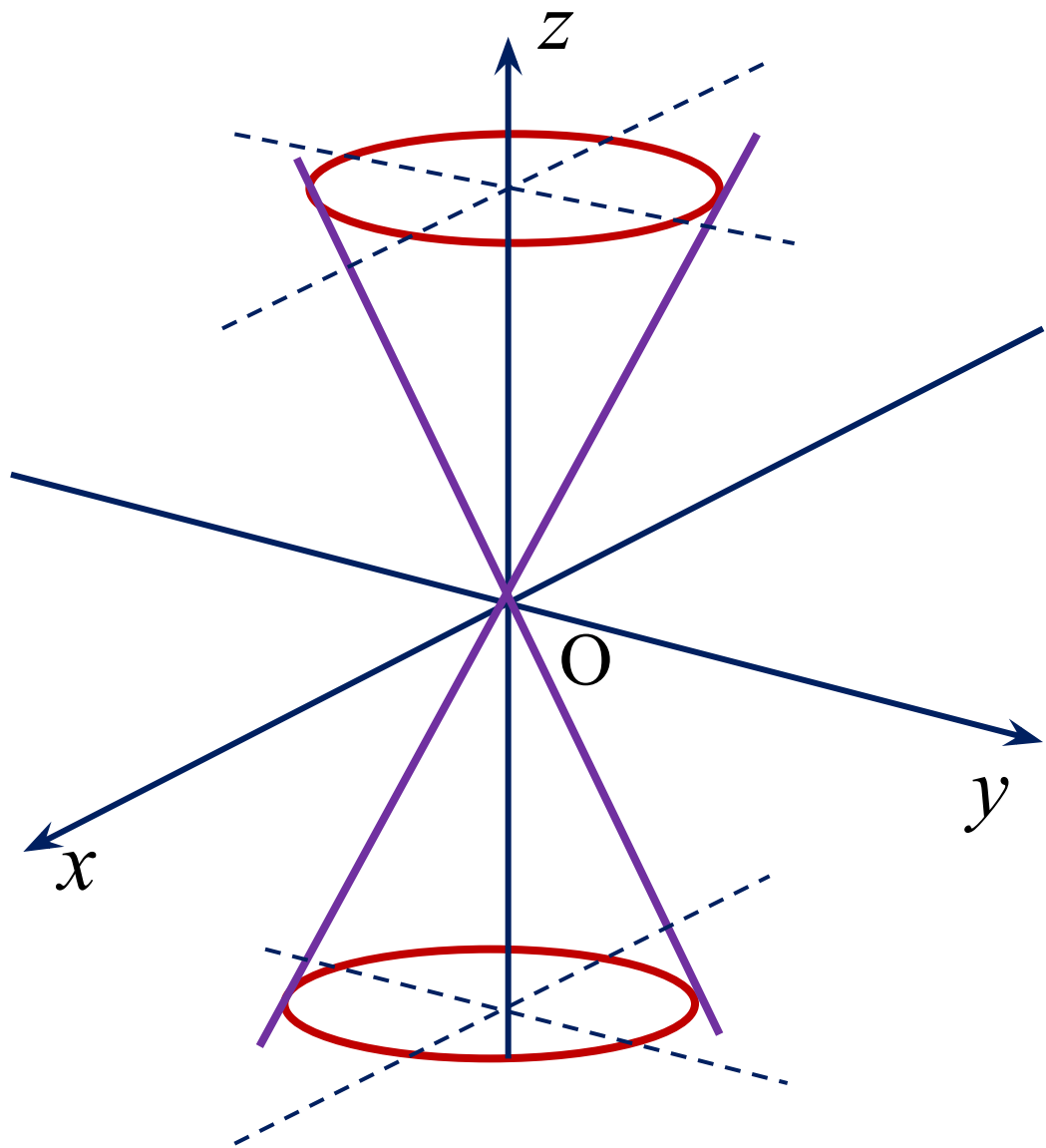
В сечении
действительного
конуса
плоскостями,
параллельными
плоскости Oxy ,
получаются
эллипсы.



В сечении
действительного
конуса
плоскостями,
проходящими
через ось Oz ,
получаются
пары
пересекающихся
прямых.



В сечении
действительного
конуса
плоскостями,
параллельными
оси Oz ,
получаются
гиперболы...



Параболоиды:

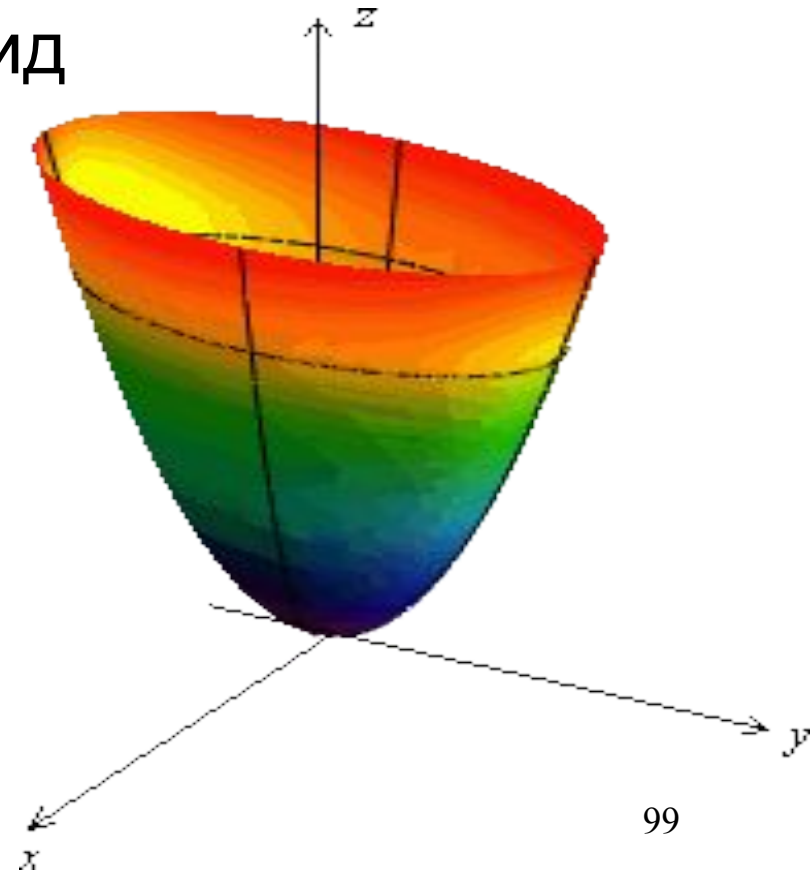
$$\begin{array}{l} 7) \\ 8) \end{array} \frac{\hat{x}^2}{a^2} \pm \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 2z \quad (a \geq b > 0); \quad \left[\begin{array}{l} \text{эллиптический (+)} \\ \text{гиперболический (-)} \end{array} \right.$$

Параболоиды:

$$\begin{array}{l} 7) \\ 8) \end{array} \frac{\hat{x}^2}{a^2} \pm \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 2z \quad (a \geq b > 0); \quad \left[\begin{array}{l} \text{эллиптический (+)} \\ \text{гиперболический (-)} \end{array} \right.$$

7) Эллиптический параболоид

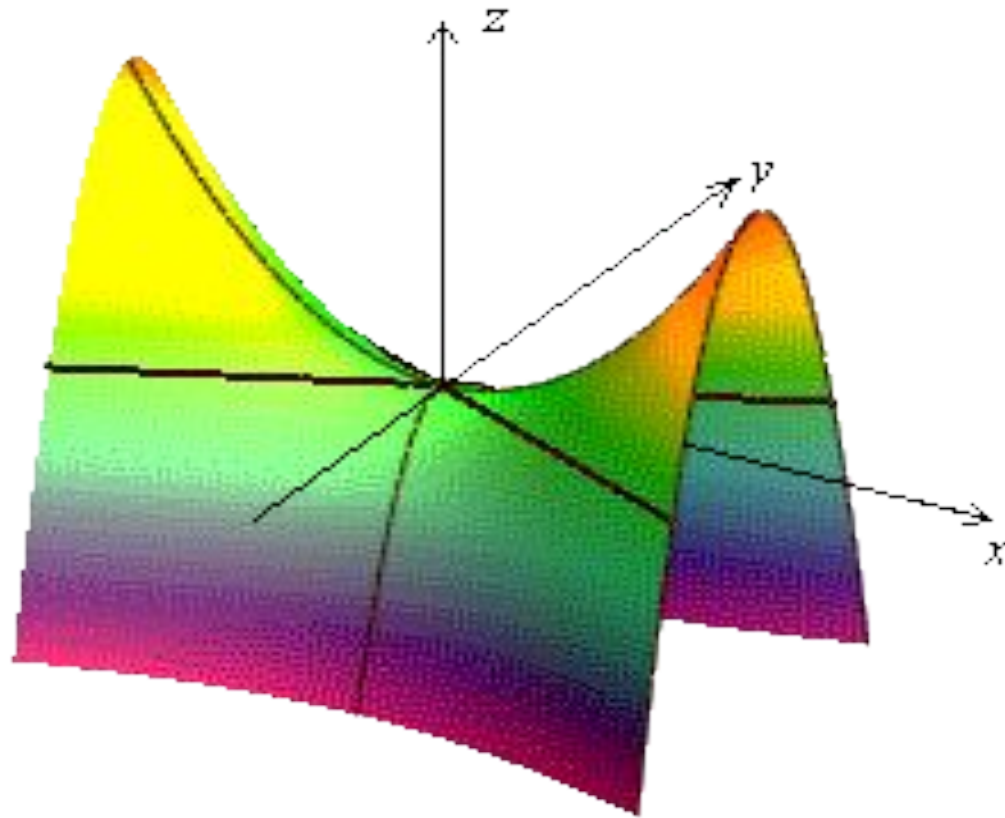
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (a \geq b > 0):$$



8) Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

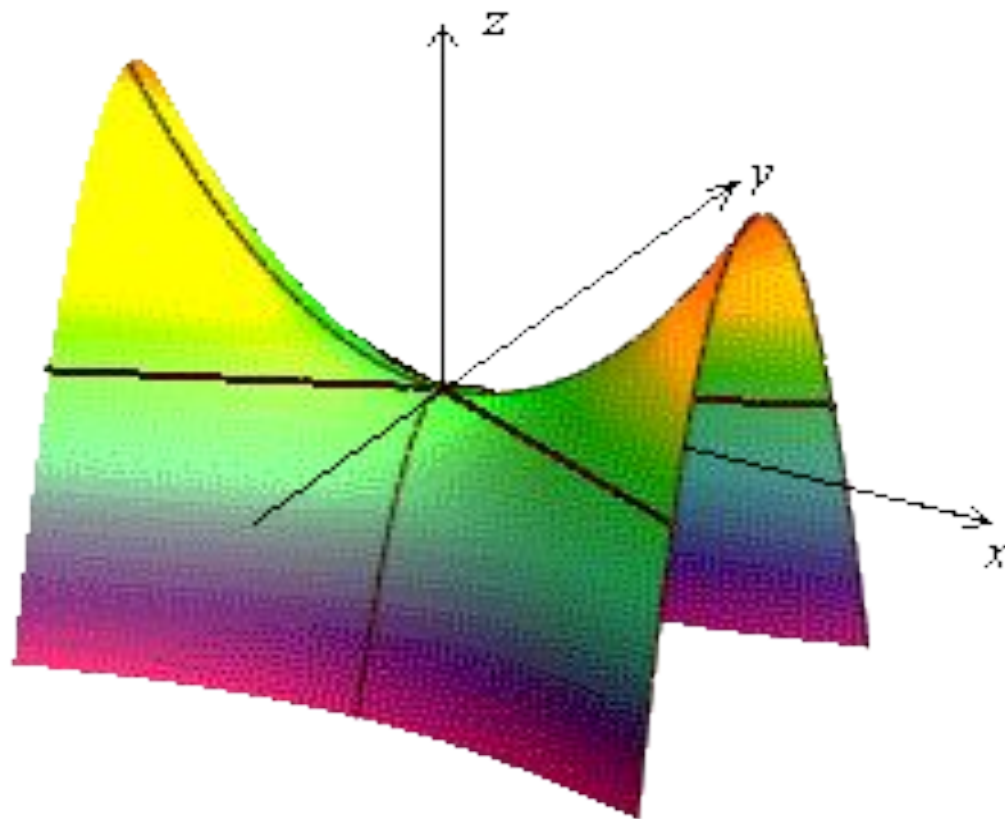
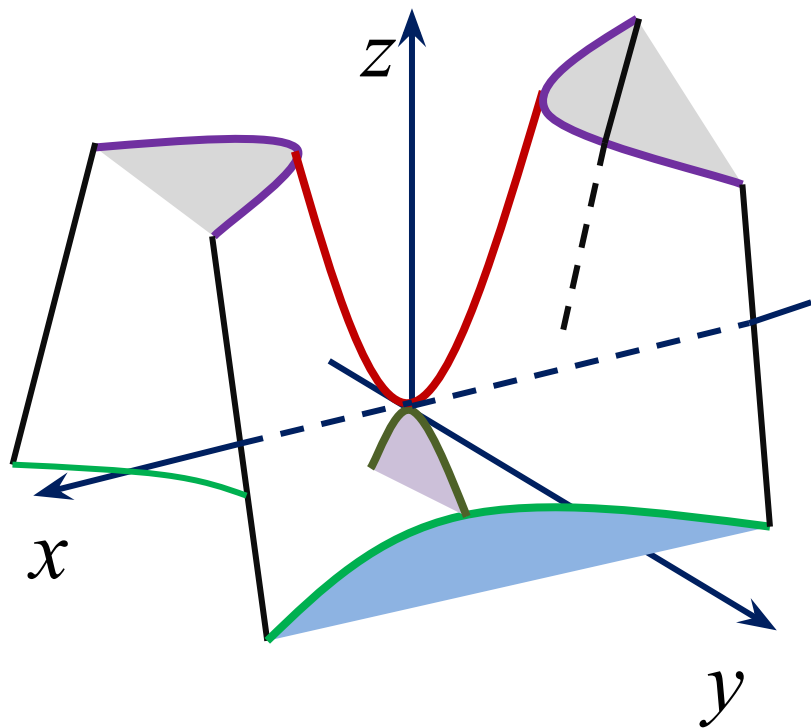
$(a \geq b > 0):$



8) Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

$(a \geq b > 0):$



Цилиндры:

9) $\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1$ эллиптические

действительный (−),
мнимый (+) ($a \geq b > 0$);

Цилиндры:

эллиптические

$$9) \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1$$

действительный (-),
мнимый (+) ($a \geq b > 0$);

$$11) \text{ гиперболический: } \frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1;$$

Цилиндры:

9) $\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1$ эллиптические

действительный (-),
мнимый (+) ($a \geq b > 0$);

11) гиперболический: $\frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1;$

14) $\hat{y}^2 = 2p\hat{x}$ ($p > 0$) – параболический;

Цилиндры:

эллиптические

$$\begin{array}{l} 9) \quad \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \\ 10) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1 \end{array} \left[\begin{array}{l} \text{действительный } (-), \\ \text{мнимый } (+) \quad (a \geq b > 0); \end{array} \right.$$

$$11) \text{ гиперболический: } \frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1;$$

$$14) \quad \hat{y}^2 = 2p\hat{x} \quad (p > 0) \text{ – параболический;}$$

пары плоскостей:

Цилиндры:

эллиптические

$$\begin{array}{l} 9) \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1 \\ 10) \end{array} \left[\begin{array}{l} \text{действительный } (-), \\ \text{мнимый } (+) \quad (a \geq b > 0); \end{array} \right.$$

$$11) \text{ гиперболический: } \frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1;$$

$$14) \hat{y}^2 = 2p\hat{x} \quad (p > 0) \text{ - параболический;}$$

пары плоскостей:

пересекающихся

$$\begin{array}{l} 12) \frac{\hat{x}^2}{a^2} \boxtimes \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0 \\ 13) \end{array} \quad (a \geq b > 0) \left[\begin{array}{l} \text{действительных } (-), \\ \text{мнимых } (+); \end{array} \right.$$

Цилиндры:

эллиптические

$$\begin{array}{l} 9) \quad \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \\ 10) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} \text{действительный } (-), \\ \text{мнимый } (+) \quad (a \geq b > 0); \end{array} \right.$$

$$11) \text{ гиперболический: } \frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1;$$

$$14) \quad \hat{y}^2 = 2p\hat{x} \quad (p > 0) \text{ - параболический;}$$

пары плоскостей:

пересекающихся

$$\begin{array}{l} 12) \quad \hat{x}^2 \boxtimes \hat{y}^2 \\ 13) \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2} \boxtimes \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0 \end{array} \quad (a \geq b > 0) \quad \left[\begin{array}{l} \text{действительных } (-), \\ \text{мнимых } (+); \end{array} \right.$$

параллельных

$$\begin{array}{l} 15) \quad \hat{y}^2 = \pm a^2 \\ 16) \quad \hat{y}^2 = \pm a^2 \end{array} \quad (a > 0) \quad \left[\begin{array}{l} \text{действительных } (-), \\ \text{мнимых } (+); \end{array} \right.$$

Цилиндры:

эллиптические

$$\begin{array}{l} 9) \frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = \pm 1 \\ 10) \end{array} \left[\begin{array}{l} \text{действительный } (-), \\ \text{мнимый } (+) \quad (a \geq b > 0); \end{array} \right.$$

$$11) \text{ гиперболический: } \frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1;$$

$$14) \hat{y}^2 = 2p\hat{x} \quad (p > 0) \text{ - параболический;}$$

пары плоскостей:

пересекающихся

$$\begin{array}{l} 12) \frac{\hat{x}^2}{a^2} \boxtimes \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 0 \\ 13) \end{array} \left[\begin{array}{l} \text{действительных } (-), \\ \text{мнимых } (+); \end{array} \right.$$

параллельных

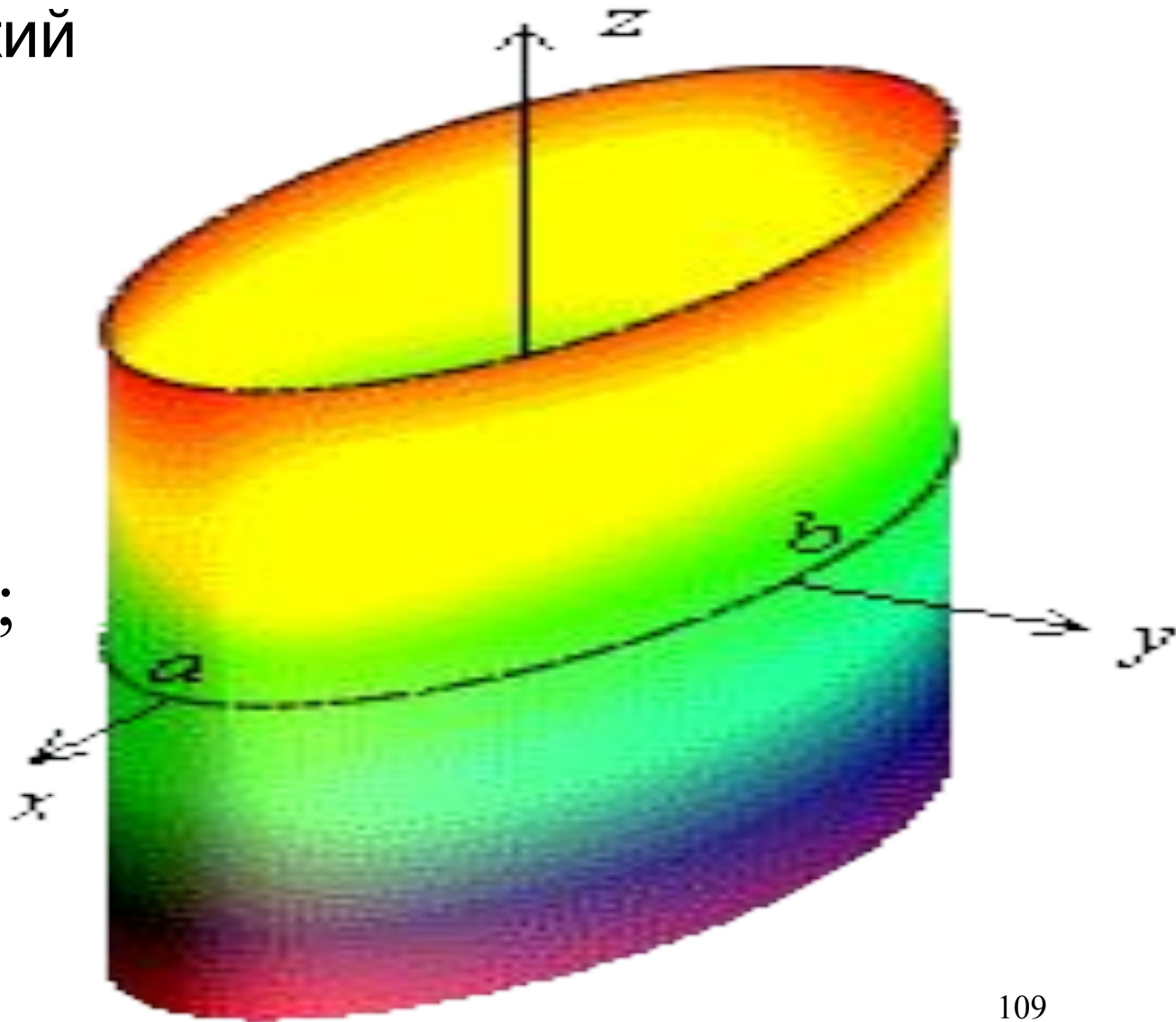
$$\begin{array}{l} 15) \hat{y}^2 = \pm a^2 \quad (a > 0) \\ 16) \end{array} \left[\begin{array}{l} \text{действительных } (-), \\ \text{мнимых } (+); \end{array} \right.$$

$$17) \hat{y}^2 = 0 \text{ - совпавших.}$$

9) Действительный
эллиптический
цилиндр:

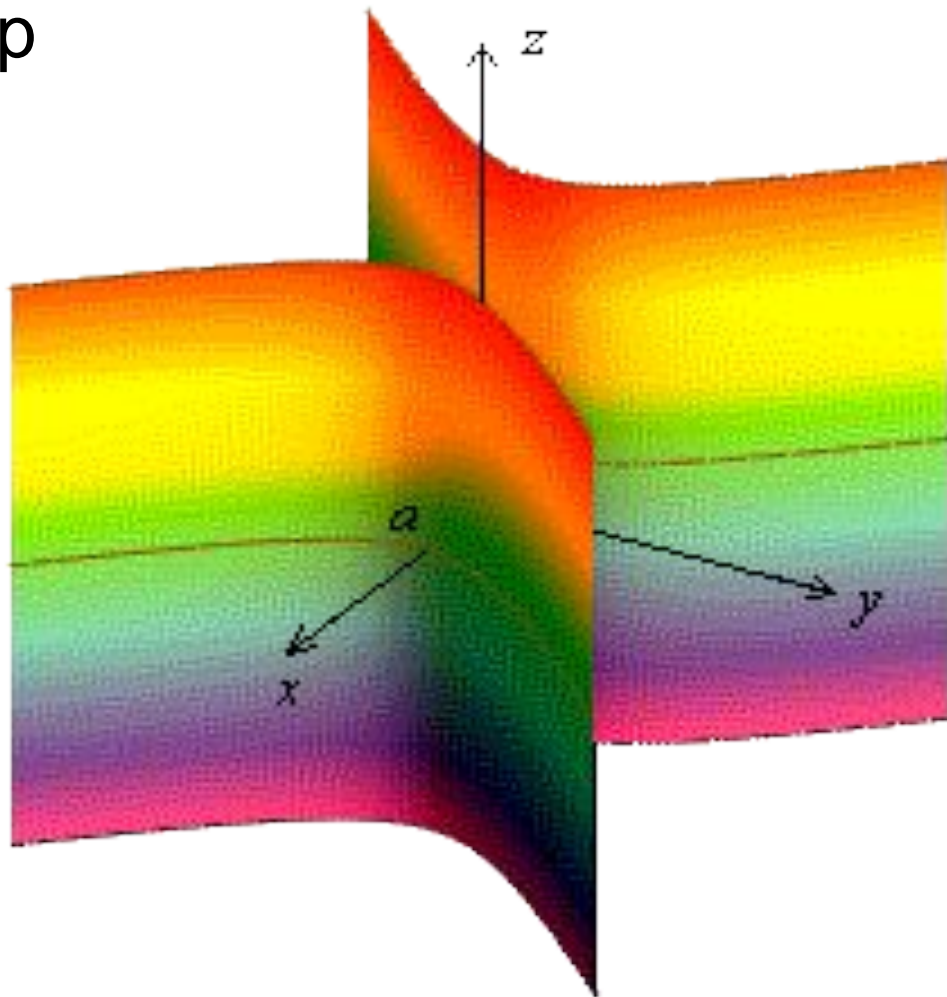
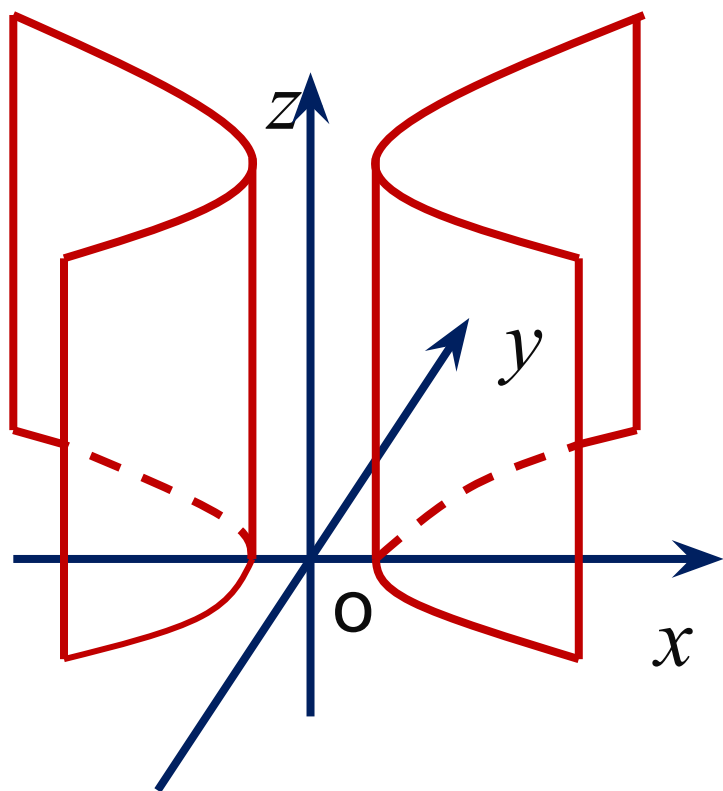
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(a \geq b > 0);$$



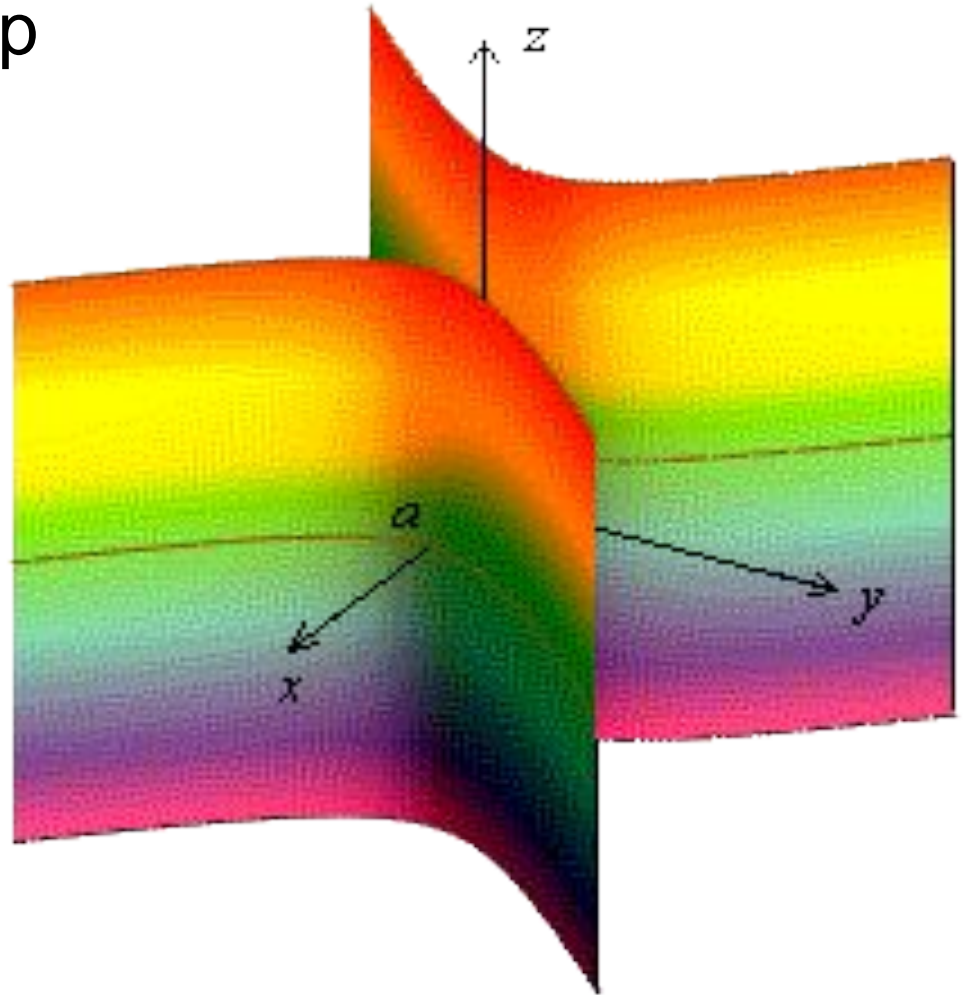
11) Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0):$$



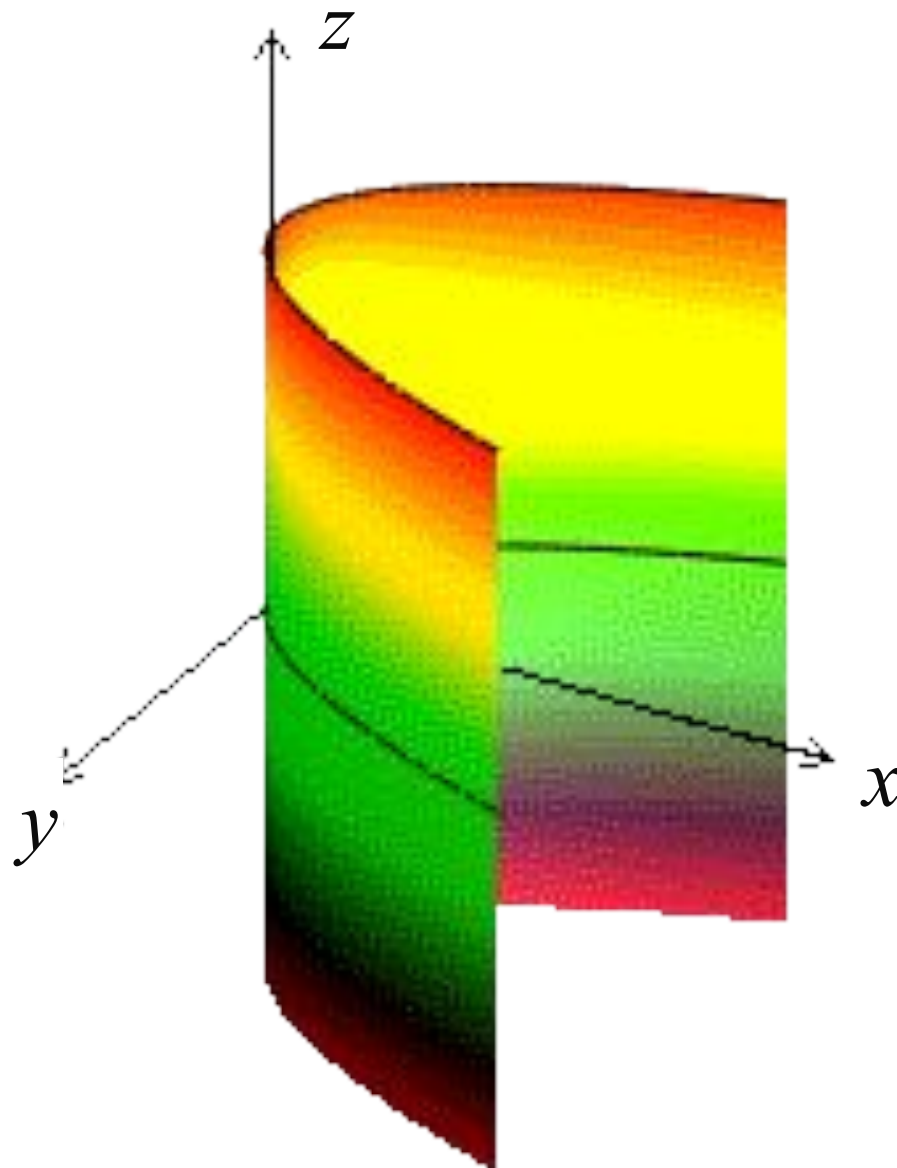
11) Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0):$$



14) Параболический
цилиндр:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0:$$



35.4. Система координат $\hat{O}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, в которой уравнение поверхности второго порядка имеет канонический вид, называется канонической.

35.4. Система координат $\hat{O}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, в которой уравнение поверхности второго порядка имеет канонический вид, называется канонической.

Каноническая система координат определяется, вообще говоря, **неоднозначно**.

36. Квадрики в евклидовых пространствах

36.1. Общее уравнение и матрица

Квадрикой в евклидовом пространстве называется множество точек, задаваемое уравнением

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0, \text{ где}$$

x_i – координаты соответствующих векторов $\bar{x}$ в ортонормированном базисе $\bar{e} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$

евклидова пространства E : $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$.

Расширенной матрицей этой квадрики называют

матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxtimes & a_{1n} & b_1 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & \boxtimes & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \boxtimes & b_n & c \end{pmatrix}.$$

Уравнение квадрики можно переписать в матричном виде,

$$(x_1, x_2, \boxtimes, x_n, 1) \tilde{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \boxtimes \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

а также в функциональной форме $\varphi(\bar{x}) + 2l(\bar{x}) + c = 0$,
 где φ и b — квадратическая и линейная функции,
 $\varphi, l : E \rightarrow E, \varphi(\bar{x}) = \bar{x} \boxtimes A x^\downarrow, l(\bar{x}) = \bar{b} \boxtimes x^\downarrow$.

36.2. Уравнение всякой квадррики в евклидовом пространстве можно привести к одному из трёх

ВИДОВ:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 = 0, \quad \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \lambda_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq r; \\
 & \text{(b)} \quad \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + \mu = 0, \quad \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \mu, \nu \neq 0, \\
 & \text{(c)} \quad \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + 2\nu z_{r+1} = 0, \quad \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix}
 \end{aligned}$$

преобразованием неизвестных $\bar{x} = T \bar{z} + \bar{c}$,

T — ортогональная матрица,
 $\bar{c}$ — координаты вектора сдвига
 к новому началу
 координат.

Благодаря п. 33.6 можем считать, что квадратичная форма $\varphi(\bar{x})$ приведена к главным осям

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_r y_r^2, \quad \lambda_i \neq 0 \quad (1 \leq i \leq r)$$

преобразованием неизвестных $\bar{x} = Q \bar{y}$, Q — матрица перехода к ортонормированному базису $\bar{\mathbf{f}}$, $\bar{f}_k$ — собственный вектор соотв. симметрического преобразования при собственном значении λ_k .

Тогда линейная часть уравнения квадрики преобразуется по известному правилу

$$l(\bar{x}) = b'_1 y_1 + \dots + b'_n y_n, \quad (b'_1, \dots, b'_n) = (b_1, \dots, b_n) Q,$$

и всё уравнение в новых неизвестных приобретает

вид $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + 2b'_1 y_1 + \dots + 2b'_n y_n + c = 0.$

Выделяя полные квадраты,

$$\lambda_i y_i^2 + 2b'_i y_i = \lambda_i \left(y_i^2 + 2 \frac{b'_i}{\lambda_i} y_i + \left(\frac{b'_i}{\lambda_i} \right)^2 \right) - \frac{(b'_i)^2}{\lambda_i} =$$
$$= \lambda_i \left(y_i + \frac{b'_i}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{(b'_i)^2}{\lambda_i}, \text{ и полагая } z_i = y_i + \frac{b'_i}{\lambda_i} \quad (1 \leq i \leq r),$$

получаем уравнение

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + 2b'_{r+1} y_{r+1} + \dots + 2b'_n y_n + c' = 0.$$

Если $b'_{r+1} = \dots = b'_n = 0$, то уравнение приведено к виду (а) или (б). Иначе положим

$\bar{u} = b'_{r+1} \bar{f}_{r+1} + \dots + b'_n \bar{f}_n \neq \bar{0}$ – собственный вектор при нулевом собственном значении, ортогональный векторам $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$. Систему векторов $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r, \frac{1}{|\bar{u}|} \bar{u}$ дополним до ортонормированного базиса $\bar{\mathbf{g}}$,

в котором уравнение квадррики приобретает вид

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + 2\nu y'_{r+1} + c' = 0, \quad \nu \neq 0, -$$

и остается обозначить $2\nu y'_{r+1} + c' = 2\nu z_{r+1}$.