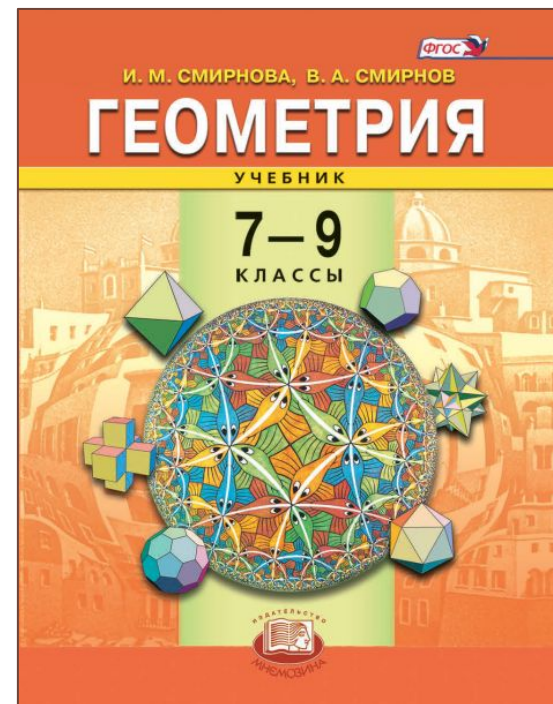




ГРАФЫ. 7 КЛАСС

Презентация к § 24*-26* учебника
«Геометрия. 7-9 классы»

И.М. Смирновой и В.А. Смирнова



ВЕДУЩИЙ: Смирнов Владимир Алексеевич, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики МПГУ, автор учебников по геометрии для 5-6 7-9 и 10-11 классов

E-mail: v-a-smirnov@mail.ru

Сайт: vasmirnov.ru

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии
для 5-11 классов

Авторы:

Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.

Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

Учебно-методический
комплект по геометрии

Программа и тематическое
планирование по геометрии
для 7-9 классов

Программа и тематическое
планирование по геометрии
для 10-11 классов

Программа по геометрии
для 5-6 классов

Дидактические материалы
7-9 классы
7 класс (новые)
8 класс (новые)
9 класс (новые)

Уроки геометрии с "Power
Point"
5-6 классы
7-9 классы
10-11 классы

Геометрия с "GeoGebra".

Элементарная математика
для студентов
педагогических вузов

Статьи и пособия о
преподавании геометрии в
школе

Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru



Видеолекции и вебинары

Подготовка к ОГЭ

Подготовка к ЕГЭ

24. Графы

Теория графов

Теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Одной из таких задач-головоломок была задача о кенигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707-1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни).



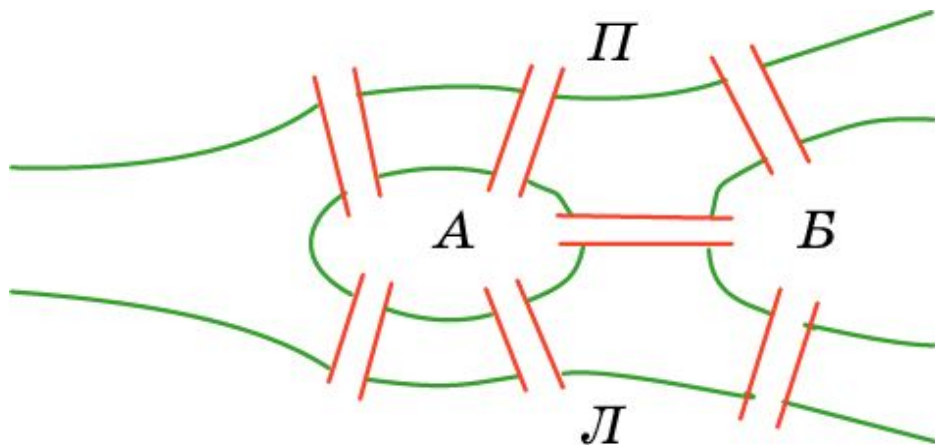
Л.Эйлер был действительным членом Петербургской Академии наук, оказал большое влияние на развитие отечественной математической школы и в деле подготовки кадров ученых-математиков и педагогов в России. Поражает своими размерами научное наследие ученого. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причем последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжелый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчеты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю. Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в произведениях Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский ученый П.С. Лаплас сказал: "Читайте Эйлера, он – учитель всех нас".

Почему нужны графы в геометрии?

1. Геометрические графы являются, в некотором смысле обобщением понятия ломаной.
2. Теория графов – одно из современных направлений развития математики, имеющих приложения в различных её областях.
3. С графами связаны классические задачи, знакомство с которыми должно входить в математическое образование учащихся.
4. Задачи, связанные с графами, включаются в различные олимпиады по математике.
5. Решение таких задач развивает геометрические и комбинаторные представления учащихся, повышает мотивацию к обучению геометрии.

Задача Эйлера о Кёнигсбергских мостах

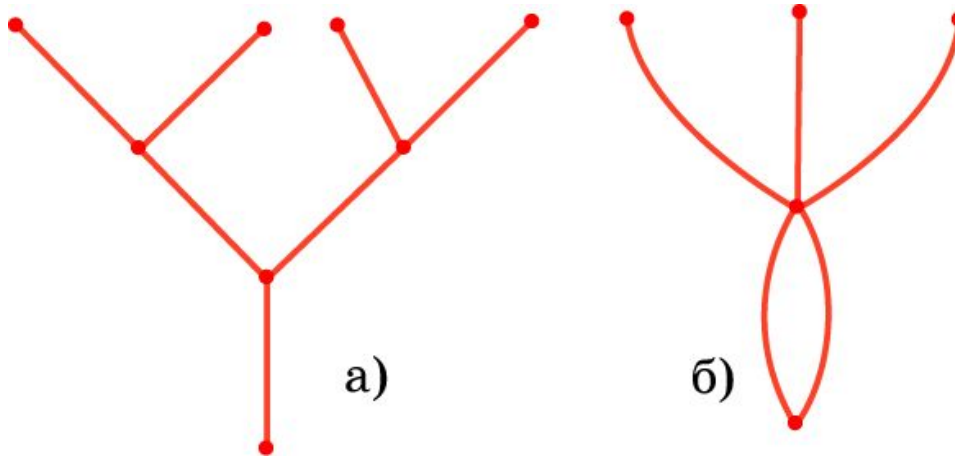
Задача. В г. Кёнигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Прегель (Л - левый берег, П - правый берег, А и Б - острова). Можно ли, прогуливаясь вдоль реки, пройти по каждому мосту ровно один раз?



Для решения задачи Эйлера введем понятие графа.

Фигура, образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые пары из этих точек, называется **плоским графом**, или просто **графом**. Точки называются **вершинами**, а отрезки — **рёбрами** графа.

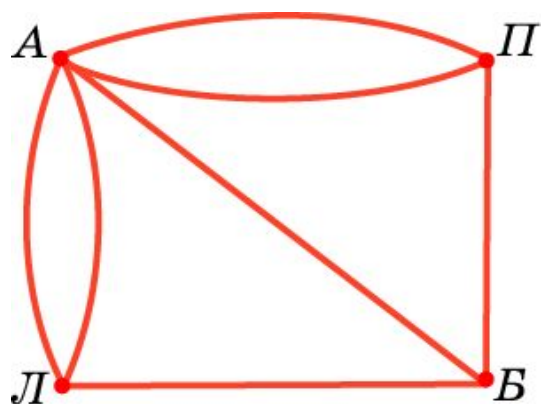
Вместо отрезков в качестве рёбер графов рассматриваются также кривые линии.



Индексом вершины графа называется число ребер, сходящихся в данной вершине графа.

Например, на рисунке 1 индекс вершины A равен 5, индекс вершин $Л$, $Б$, $П$ равен 3.

При этом, при подсчёте индекса ребро-петля учитывается дважды. Например, на рисунке 2 индекс вершины A равен 2.



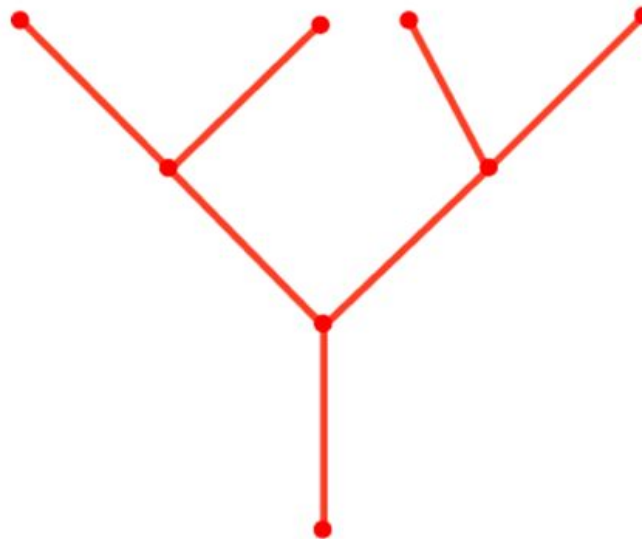
1)



2)

Теорема. Сумма индексов всех вершин графа равна удвоенному числу ребер этого графа.

Доказательство. Индекс вершины это число ребер, выходящих из этой вершины. Сумма индексов всех вершин это число ребер, выходящих из всех вершин. Так как ребра имеют две вершины, то при таком подсчете мы каждое ребро посчитаем дважды. Следовательно, сумма индексов всех вершин графа равна удвоенному числу ребер этого графа.



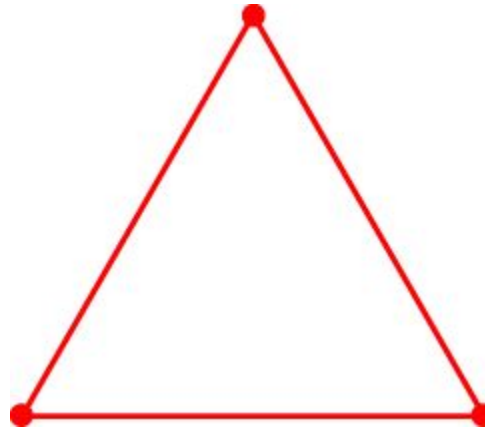
Следствие 1. Сумма индексов всех вершин графа четна.

Следствие 2. Число вершин с нечетным индексом четно.

Доказательство. Действительно, если бы оно было нечетно, то сумма индексов вершин графа с нечетными индексами была бы нечетна. С другой стороны, сумма индексов вершин графа с четными индексами четна. Но тогда сумма всех индексов вершин графа была бы нечетна, что противоречит теореме.

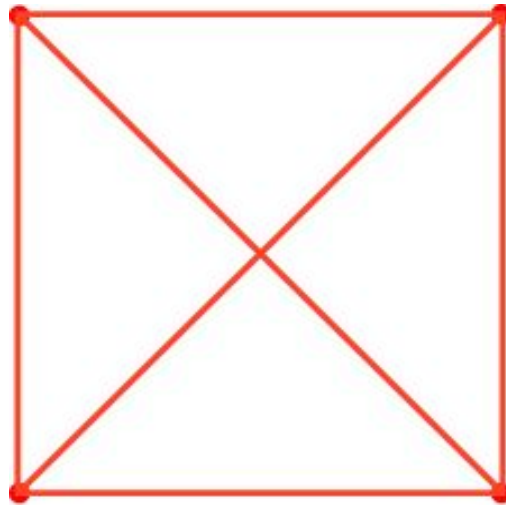
Упражнения

1. В графе 3 вершин, каждая из которых имеет индекс 2. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.



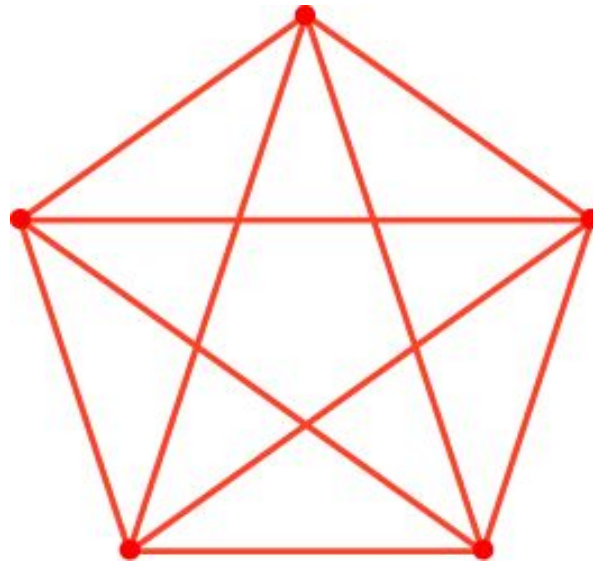
Ответ: 3.

2. В графе 4 вершин, каждая из которых имеет индекс 3. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.



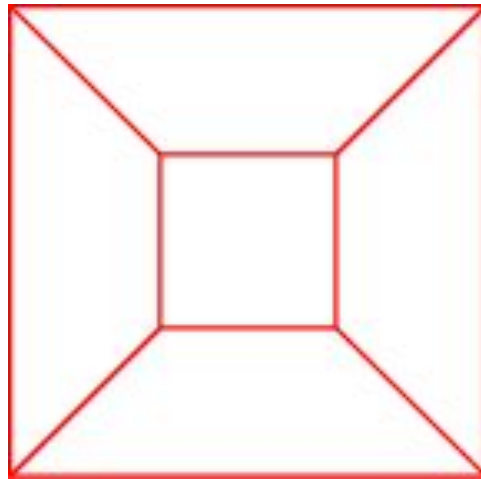
Ответ: 6.

3. В графе 5 вершин, каждая из которых имеет индекс 4. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.



Ответ: 10.

4. В графе 12 рёбер, а каждая вершина имеет индекс 3. Сколько у него вершин? Нарисуйте такой граф.



Ответ: 6.

5. Может ли граф иметь:

- а) одну вершину нечетного индекса;
- б) две вершины нечетного индекса;
- в) три вершины нечетного индекса;
- г) четыре вершины нечетного индекса?

Ответ: а), в) нет; б), г) да.

6. Может ли граф иметь пять вершин, в каждой из которых сходится три ребра?

Ответ: Нет. Число вершин с нечетным индексом должно быть четным.

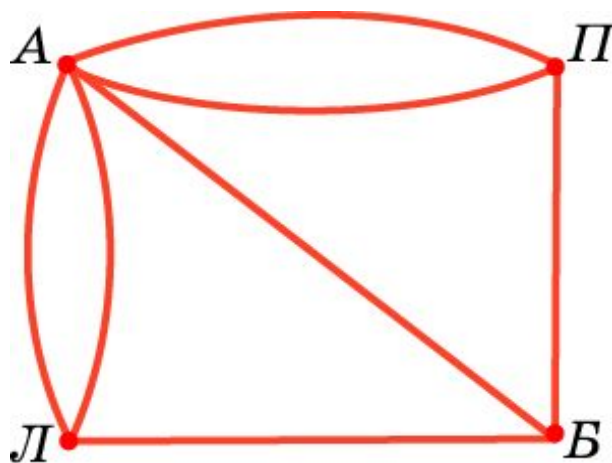
7. В классе 15 компьютеров. Можно ли их соединить друг с другом так, чтобы каждый компьютер был соединен ровно с пятью другими?

Ответ: Нет.

Уникурсальные графы

Граф называется **уникурсальным**, если можно пройти по каждому ребру этого графа ровно один раз, или, что то же самое, можно нарисовать этот граф «одним росчерком», т. е. не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждому ребру ровно один раз.

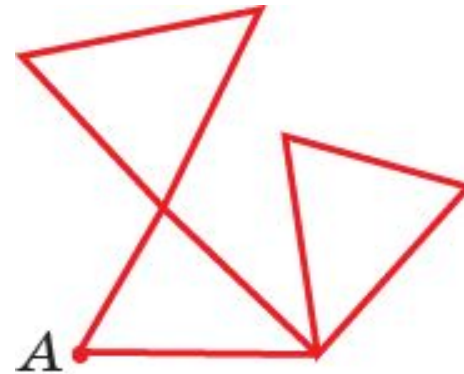
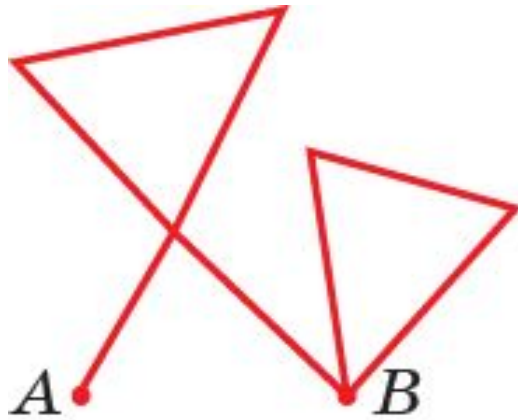
На рисунке представлен граф, соответствующий задаче Эйлера, в котором ребра соответствуют мостам, а вершины – берегам и островам.



Для решения задачи Эйлера требуется выяснить, является ли этот граф уникурсальным.

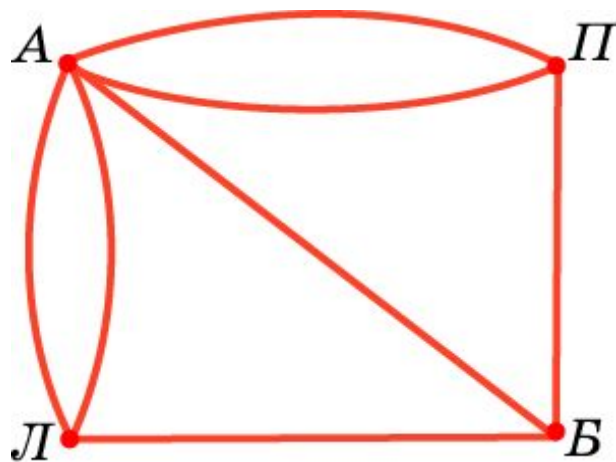
Теорема Эйлера

Теорема. Для уникурсального графа число вершин нечетного индекса равно двум или нулю.



Доказательство. Если граф уникурсален, то у него есть начало и конец обхода. Остальные вершины имеют четный индекс, так как с каждым входом в такую вершину есть и выход. Если начало A и конец B не совпадают, то они являются единственными вершинами нечетного индекса. У начала выходов на один больше, чем входов, а у конца входов на один больше, чем выходов. Если начало A совпадает с концом B , то вершин с нечетным индексом нет.

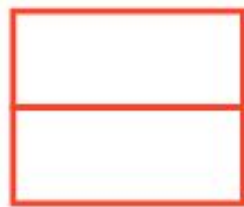
Решение задачи Эйлера. Найдем индексы вершин графа задачи Эйлера. Вершина А имеет индекс 5, Б - 3, П - 3 и Л - 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечетного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Значит, нельзя пройти по каждому из семи мостов только один раз.



8. Выясните, какие графы, изображенные на рисунке, являются уникарсальными?



а)



б)



в)



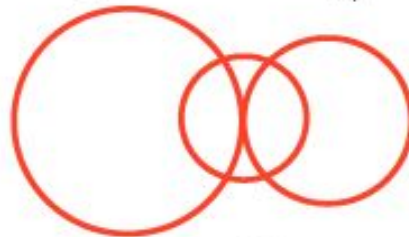
г)



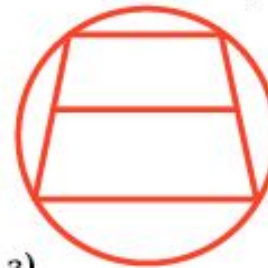
д)



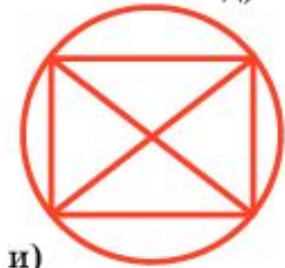
е)



ж)



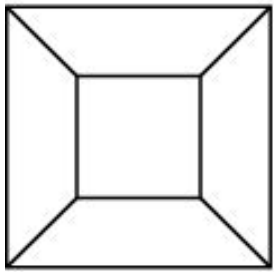
з)



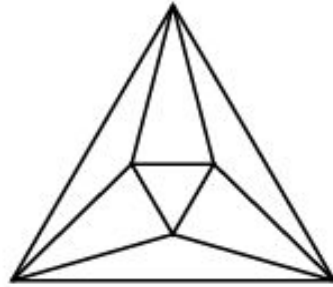
и)

Ответ: а), б), г), д), ж), з).

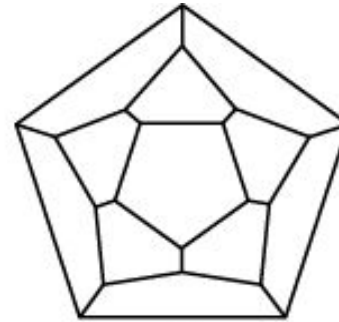
9. Выясните, какие графы, изображенные на рисунке, являются уникарсальными?



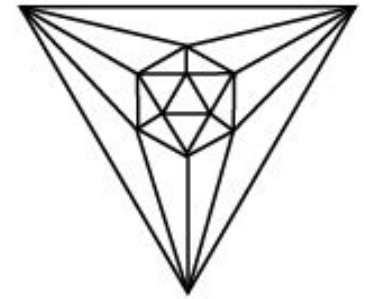
а)



б)



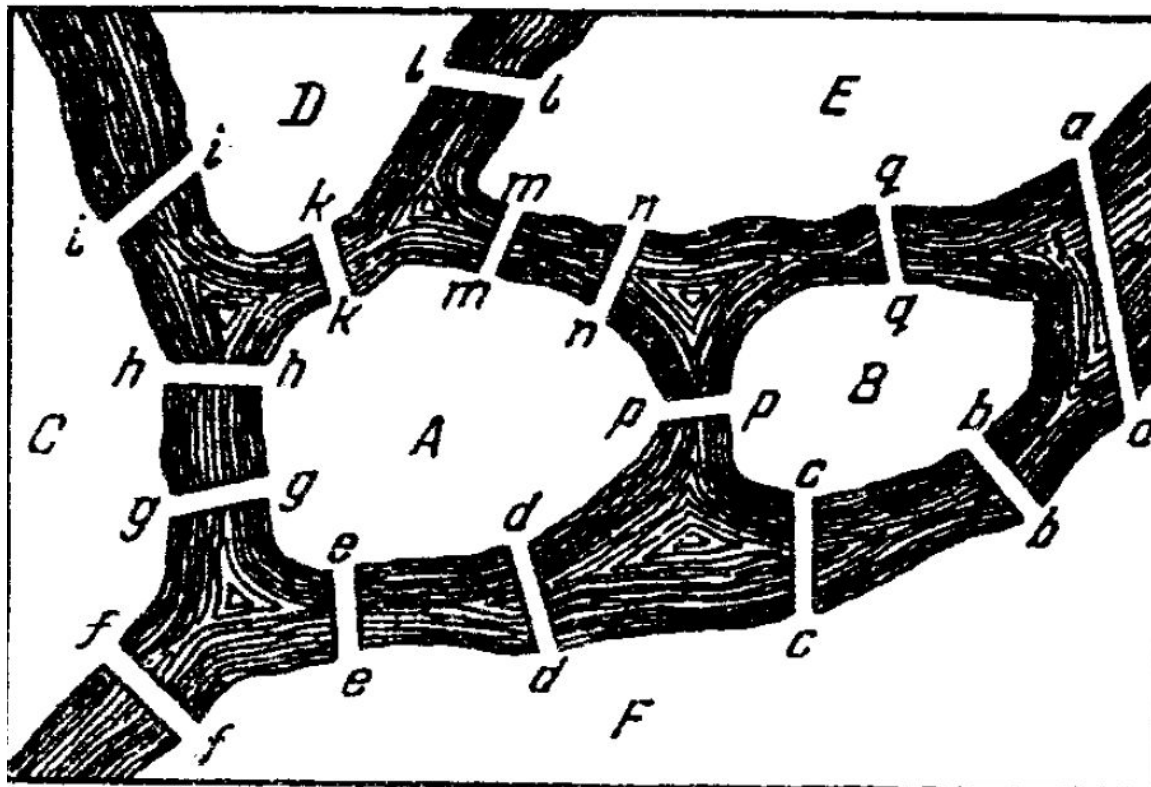
в)



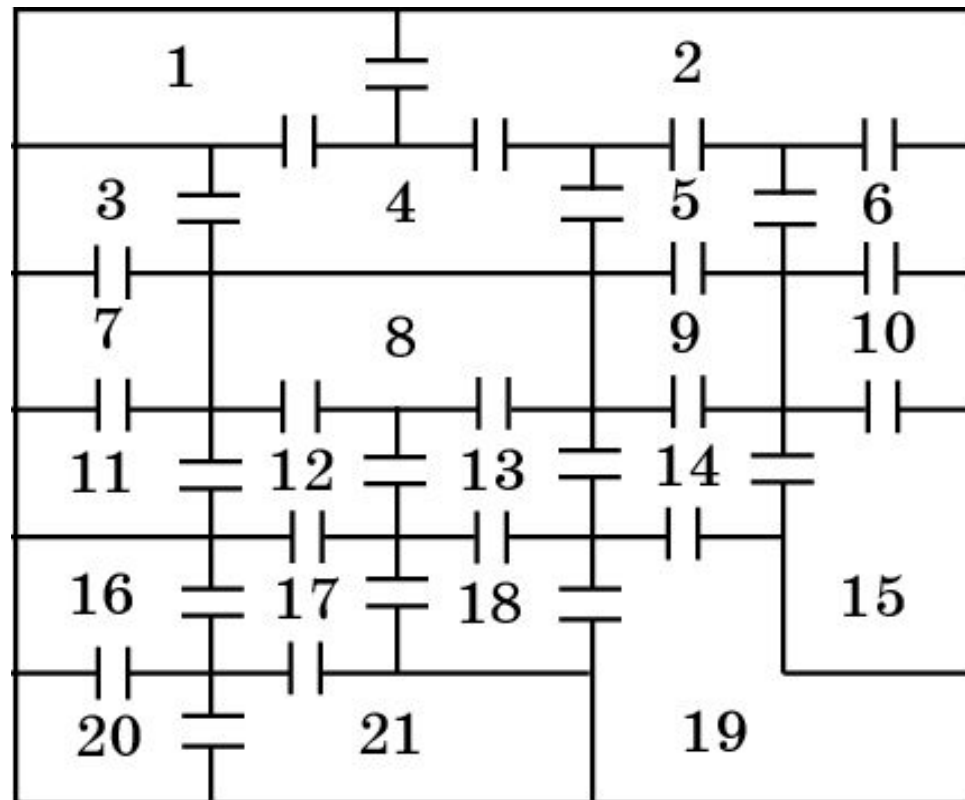
г)

Ответ: б).

10. Решите задачу, аналогичную задаче Эйлера, с пятнадцатью мостами.

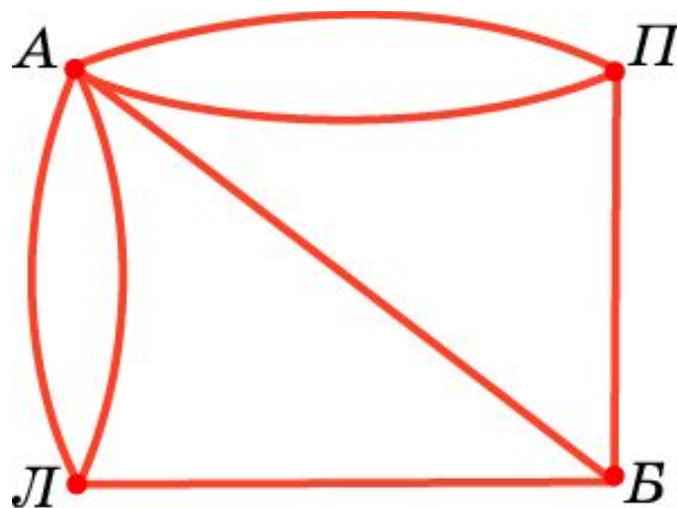


11. На рисунке изображен план подземелья, в одной из комнат которого находится клад, для отыскания которого нужно войти в одну из крайних комнат, пройти через все двери ровно по одному разу через каждую. Клад будет в комнате за последней дверью. В какой комнате находится клад?



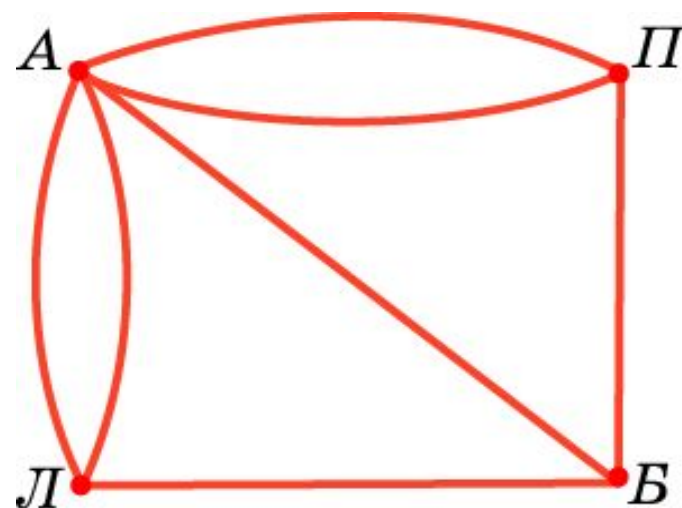
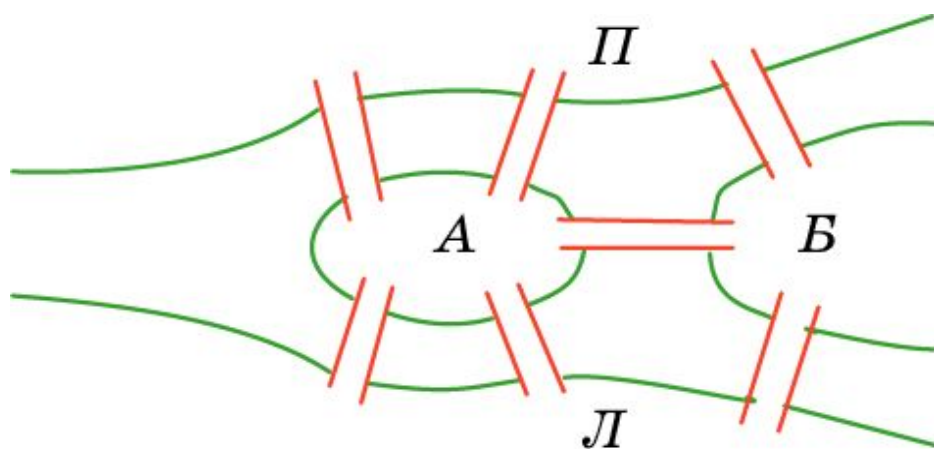
Ответ: 18.

12. Какое наименьшее число мостов в задаче о кёнигсбергских мостах придется пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?

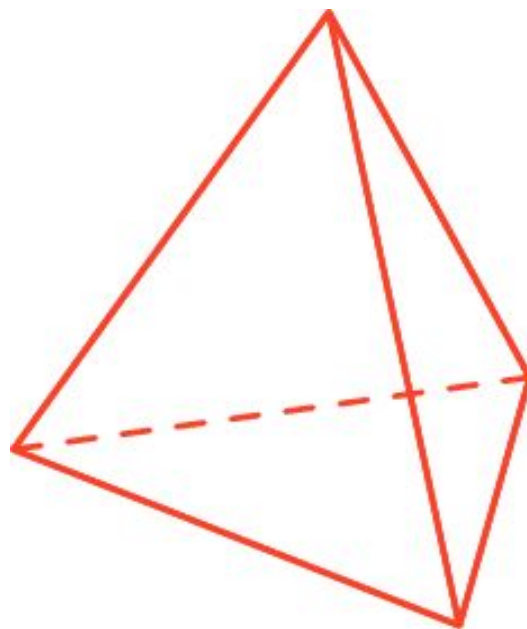


Ответ: Один.

13. Докажите, что если в задаче о кёнигсбергских мостах добавить еще один мост в любом месте реки Прегель, то полученный граф будет уникурсальным.

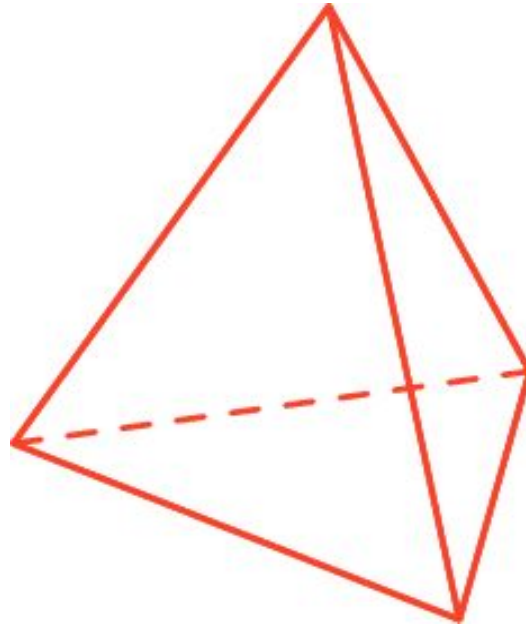


14. Можно ли обойти все рёбра тетраэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



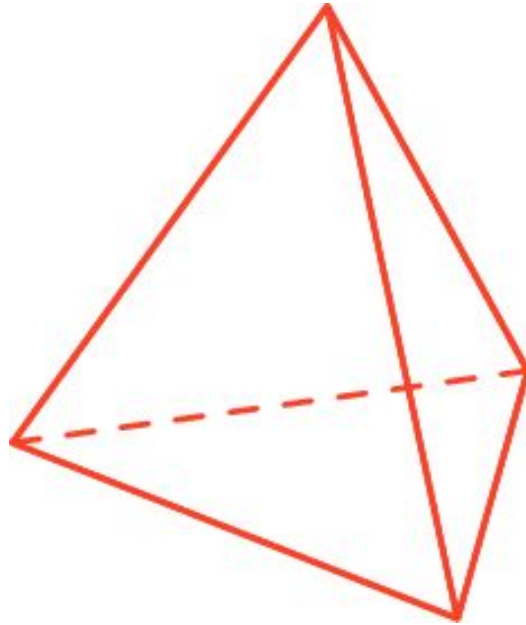
Ответ: Нет.

15. Какое наименьшее число рёбер придется пройти дважды, чтобы обойти все рёбра тетраэдра?



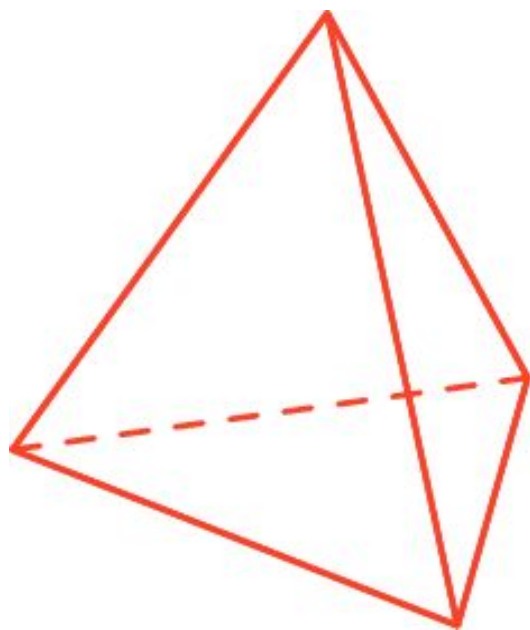
Ответ: Одно.

16. Какое наименьшее число рёбер придется пройти дважды, чтобы обойти все рёбра тетраэдра и вернуться в исходную вершину?



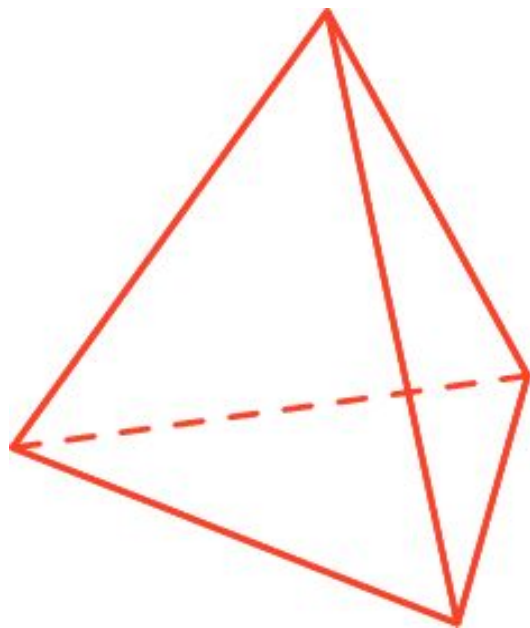
Ответ: Два.

17. Имеется проволока длины 48 см. Можно ли сложить из неё рёберную модель тетраэдра с ребром 8 см?



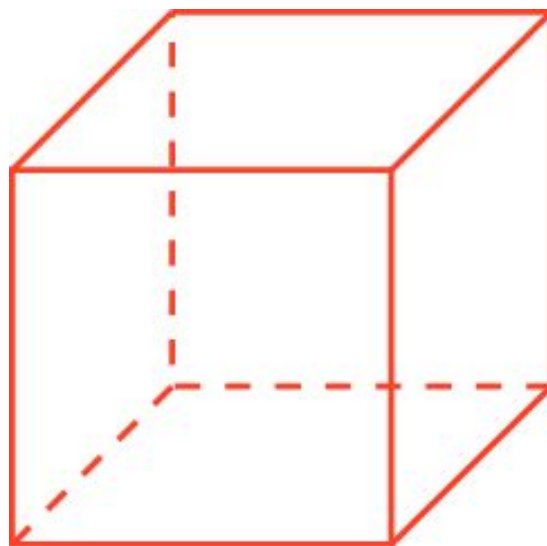
Ответ: Нет.

18. Какой наименьшей длины должна быть проволока, чтобы из неё можно было сложить рёберную модель тетраэдра с ребром 8 см?



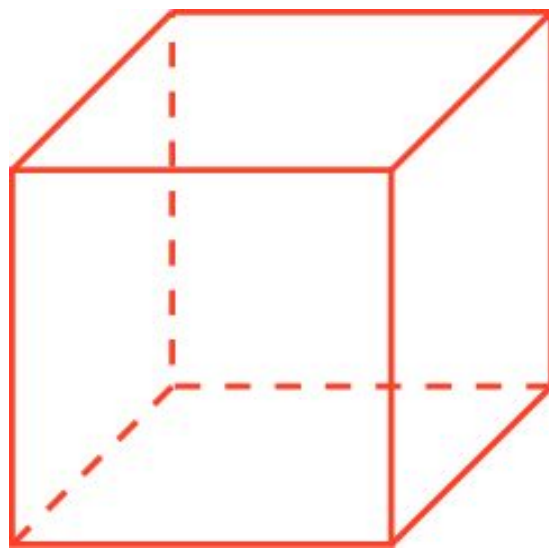
Ответ: 56 см.

19. Можно ли обойти все рёбра куба, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



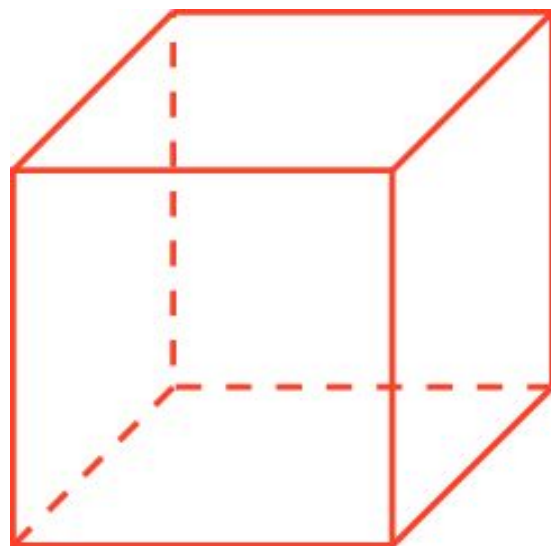
Ответ: Нет.

20. Какое наименьшее число рёбер придется пройти дважды, чтобы обойти все рёбра куба?



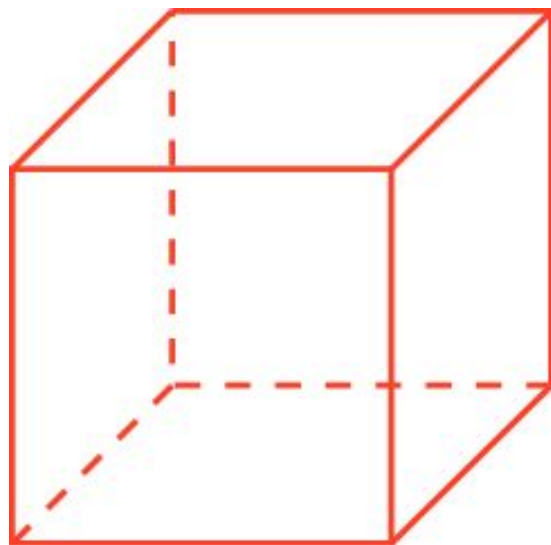
Ответ: Три.

21. Какое наименьшее число рёбер придется пройти дважды, чтобы обойти все рёбра куба и вернуться в исходную вершину?



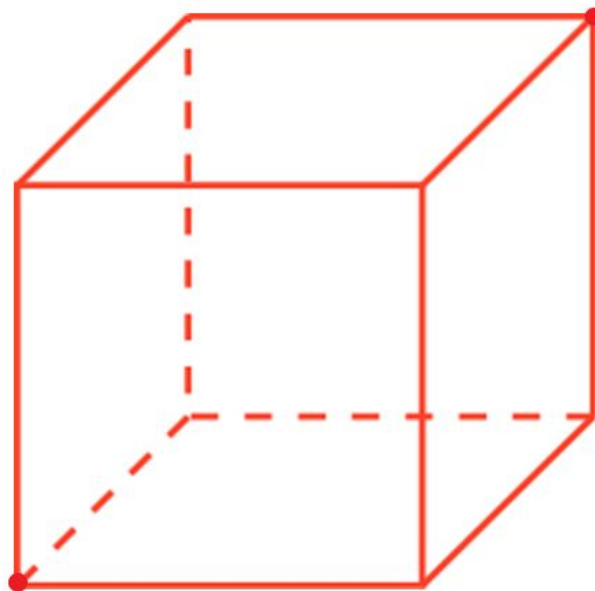
Ответ: Четыре.

22. Какой наименьшей длины должна быть проволока, чтобы из неё можно было сложить рёберную модель куба с ребром 4 см?



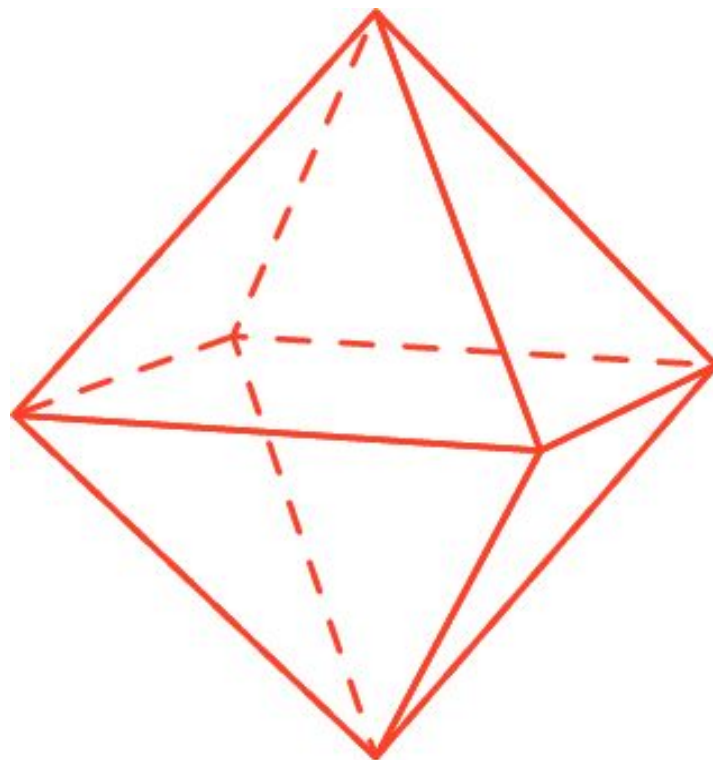
Ответ: 60 см.

23. Сколько имеется кратчайших путей, проходящих по рёбрам куба, из одной его вершины в противоположную?



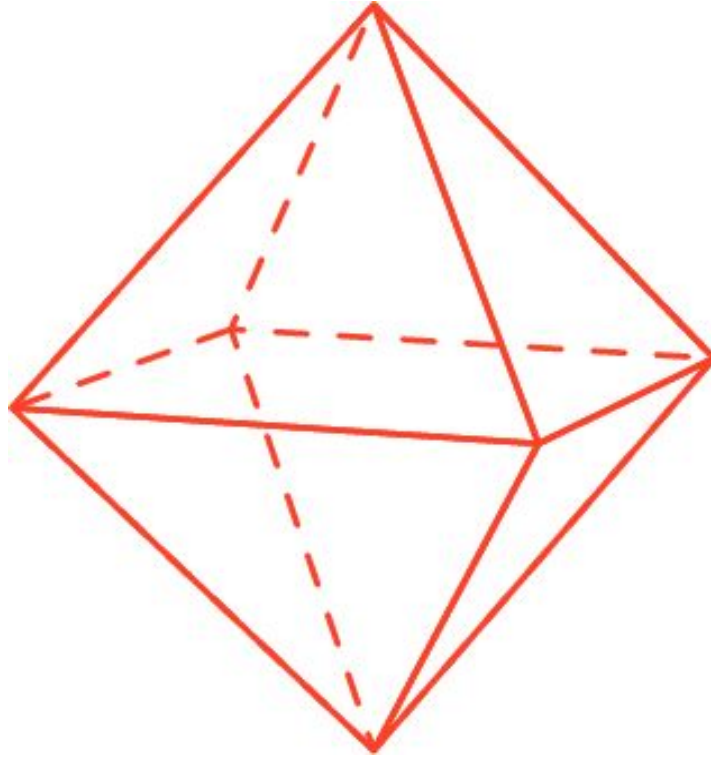
Ответ: 6.

24. Можно ли обойти все рёбра октаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



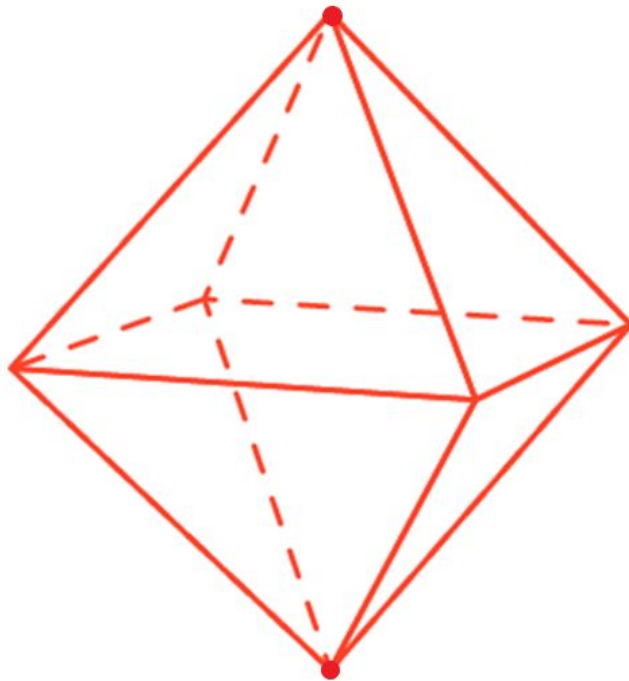
Ответ: Да.

25. Какой наименьшей длины должна быть проволока, чтобы из неё можно было сложить рёберную модель октаэдра с ребром 4 см?



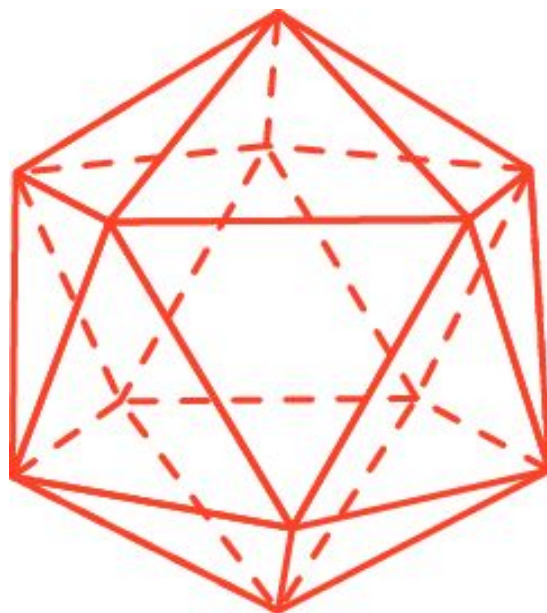
Ответ: 48 см.

26. Сколько имеется кратчайших путей, проходящих по рёбрам октаэдра, из одной его вершины в противоположную?



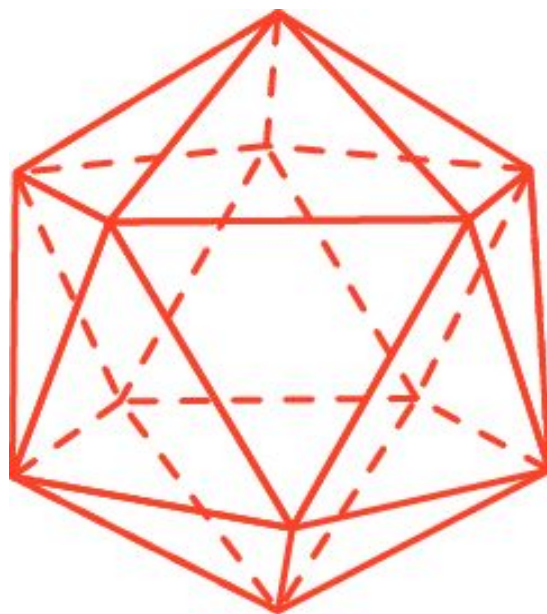
Ответ: 4.

27. Можно ли обойти все рёбра икосаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



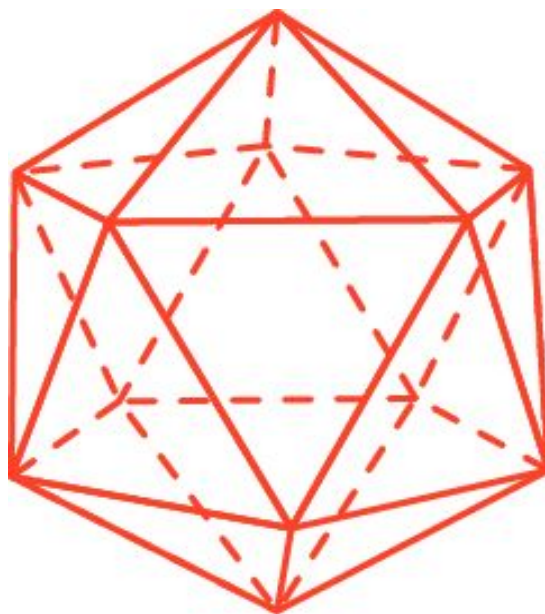
Ответ: Нет.

28. Какое наименьшее число рёбер придется пройти дважды, чтобы обойти все рёбра икосаэдра?



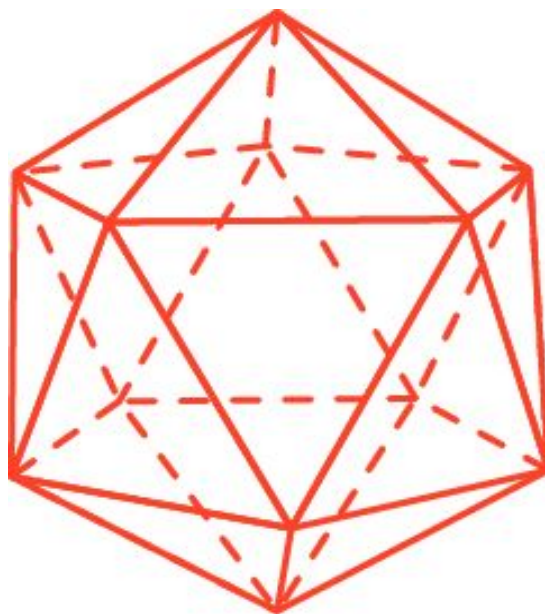
Ответ: Пять.

29. Какое наименьшее число рёбер придется пройти дважды, чтобы обойти все рёбра икосаэдра и вернуться в исходную вершину?



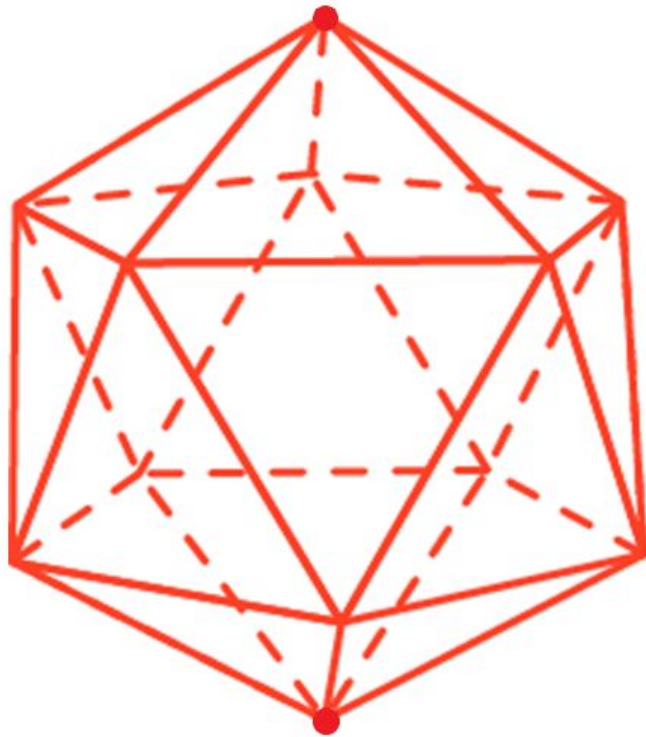
Ответ: Шесть.

30. Какой наименьшей длины должна быть проволока, чтобы из неё можно было сложить рёберную модель икосаэдра с ребром 4 см?



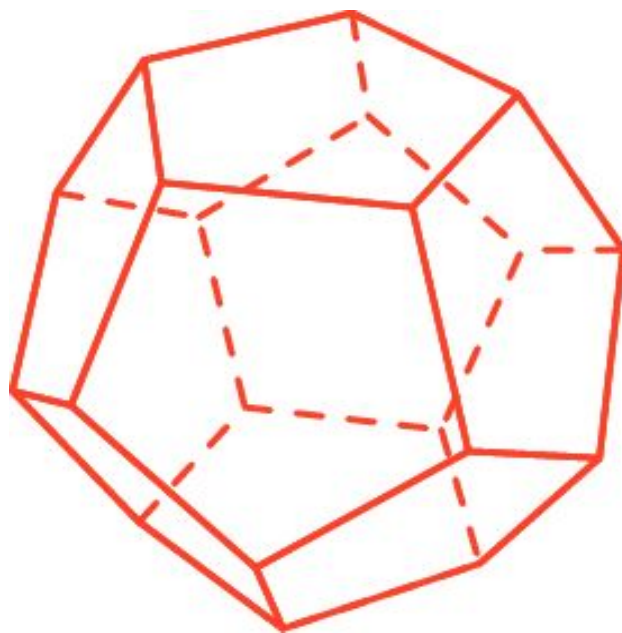
Ответ: 140 см.

31. Сколько имеется кратчайших путей, проходящих по рёбрам икосаэдра, из одной его вершины в противоположную?



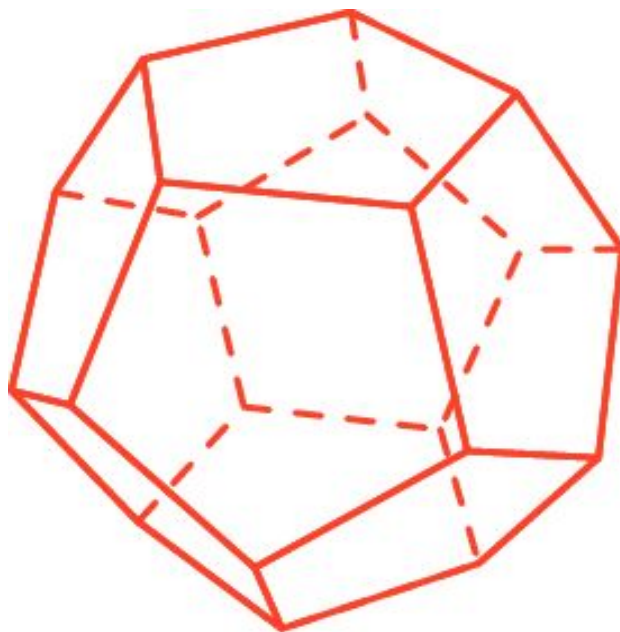
Ответ: 10.

32. Можно ли обойти все рёбра додекаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?



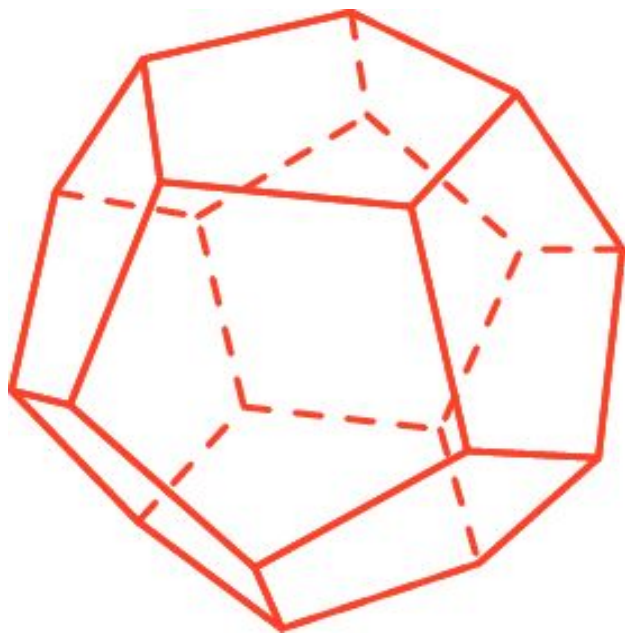
Ответ: Нет.

33. Какое наименьшее число рёбер придется пройти дважды, чтобы обойти все рёбра додекаэдра?



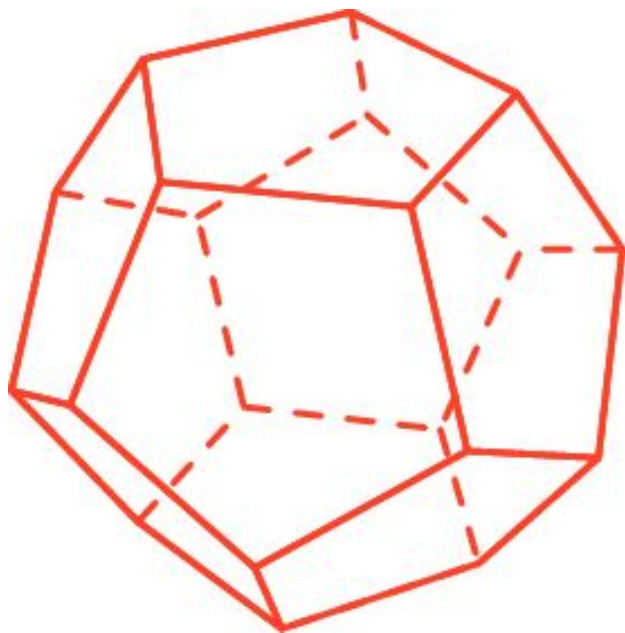
Ответ: Девять.

34. Какое наименьшее число рёбер придется пройти дважды, чтобы обойти все рёбра додекаэдра и вернуться в исходную вершину?



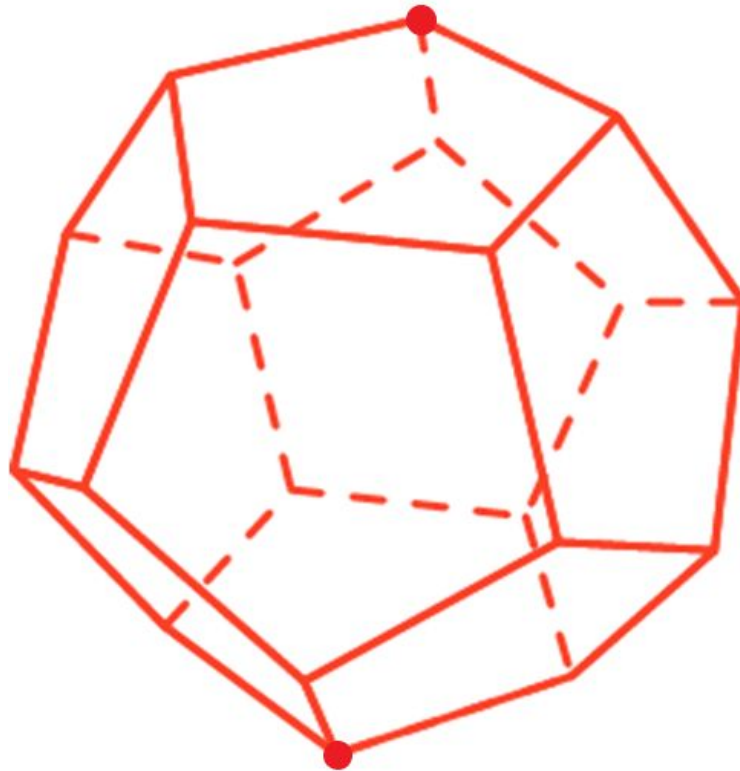
Ответ: Десять.

35. Какой наименьшей длины должна быть проволока, чтобы из неё можно было сложить рёберную модель додекаэдра с ребром 4 см?



Ответ: 156 см.

36. Сколько имеется кратчайших путей, проходящих по рёбрам додекаэдра, из одной его вершины в противоположную?

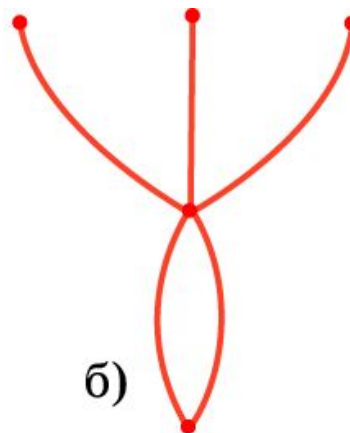
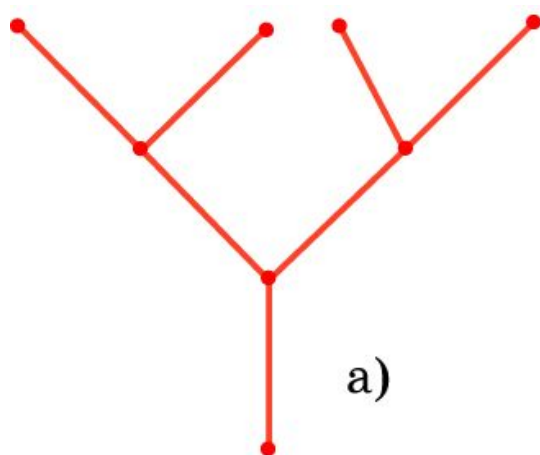


Ответ: 6.

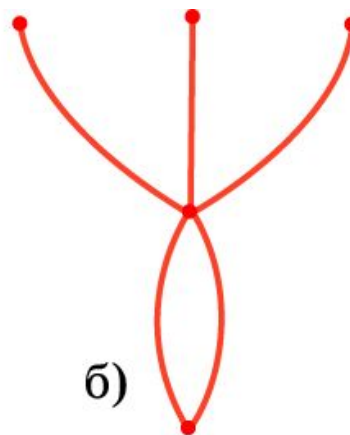
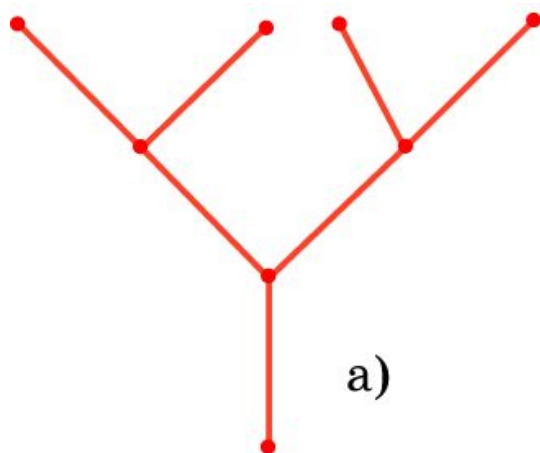
37*. Докажите, что у любого графа, у которого больше одной вершины и ребрами являются отрезки, имеются хотя бы две вершины одинакового индекса.

Доказательство. Пусть A — вершина графа с наибольшим индексом, равным n . Если среди вершин $A_1, \dots, A_n$ имеется вершина индекса n , то мы получим две вершины индекса n . Если индексы всех вершин $A_1, \dots, A_n$ меньше n , то среди этих вершин найдутся две вершины одинакового индекса, так как количество вершин равно n , а индексы этих вершин могут принимать значения только $1, 2, \dots, n - 1$.

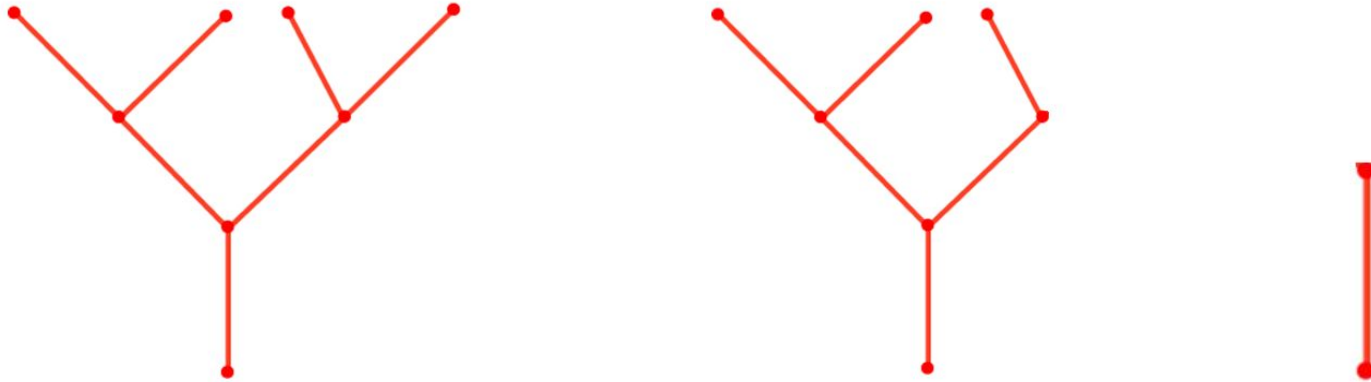
Граф называется **связным**, если любые две его вершины можно соединить ломаной, состоящей из ребер графа. На рисунках изображены связные графы.



Связный граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется **деревом**. На рисунках изображены деревья.



38. Докажите, что для любого дерева, имеющего V вершин и P ребер, справедливо соотношение Эйлера:
 $V - P = 1$.

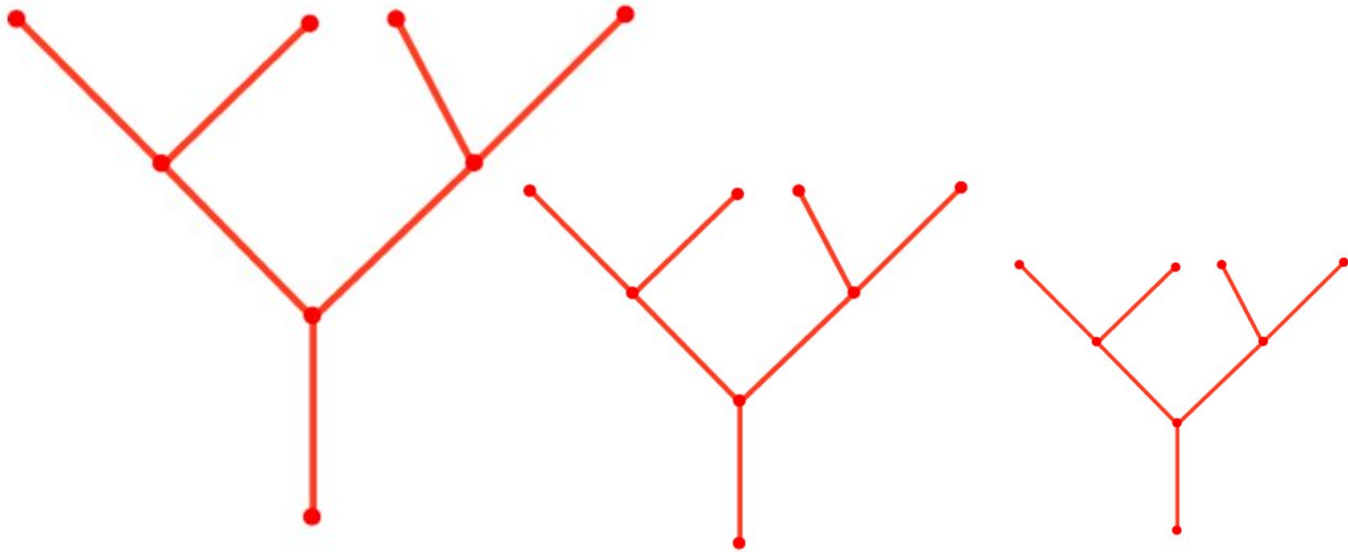


Доказательство. Рассмотрим какое-нибудь крайнее ребро дерева, т. е. такое, у которого имеется вершина индекса 1 (самостоятельно обоснуйте существование такого ребра).

Удалим это ребро. При этом граф останется деревом, а число вершин и число рёбер уменьшатся на единицу. Значит, $V - P$ не изменится.

Повторяя удаление крайних рёбер, мы придём к графу, состоящему из одного ребра и двух его вершин. Для этого графа $V - P = 1$. Следовательно, $V - P = 1$ и для исходного графа.

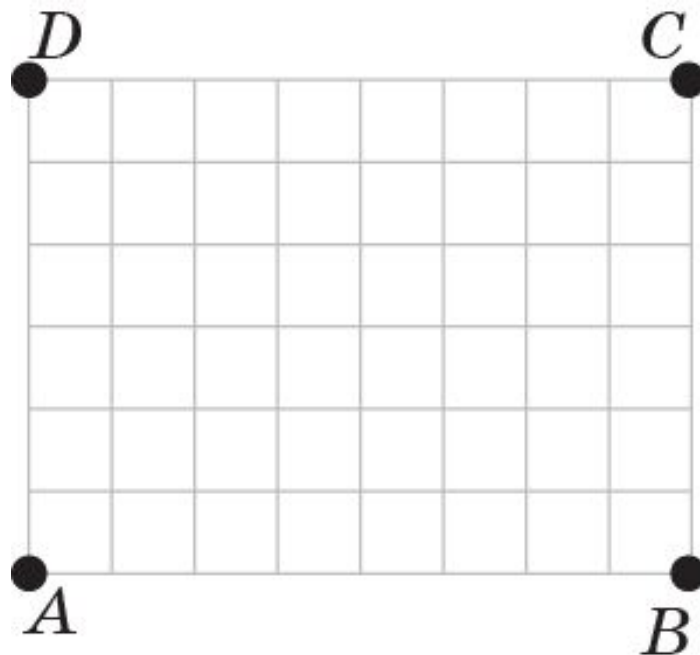
39. Граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется **лесом**. Пусть лес состоит из n деревьев и имеет V вершин и P ребер. Чему равно $V - P$?



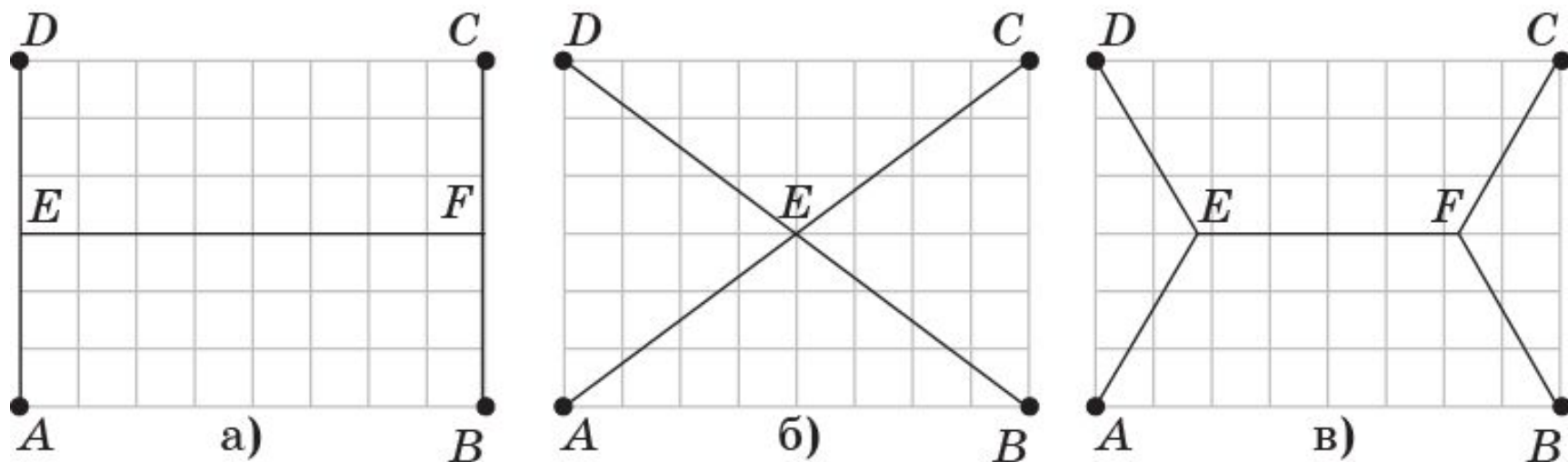
Ответ: n .

Одной из задач, связанных с графами, является задача прокладки сетей (дорог, трубопроводов и др.), соединяющих данные пункты и имеющих наименьшую возможную длину.

40*. Попробуйте изобразить сеть дорог (связный граф), соединяющих данные населённые пункты A , B , C , D , с наименьшей суммарной длиной.



41. Оцените, какой из графов, изображённых на рисунке, имеет наименьшую сумму длин рёбер. Проверьте ответ с помощью линейки.



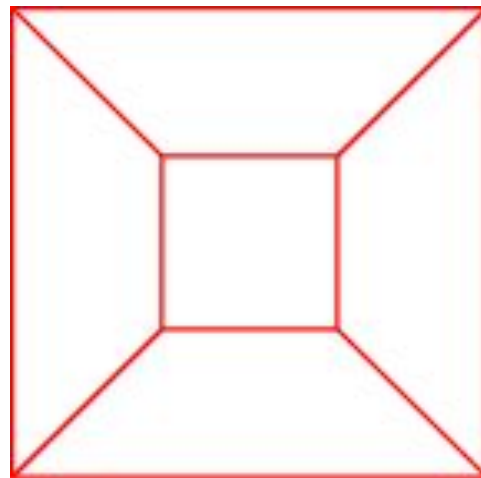
Ответ: в). Оказывается, что этот граф имеет наименьшую сумму длин рёбер из всех связных графов, соединяющих вершины A, B, C, D . Углы, образованные рёбрами этого графа, с вершинами в точках E и F , равны 120° .

25. Теорема Эйлера

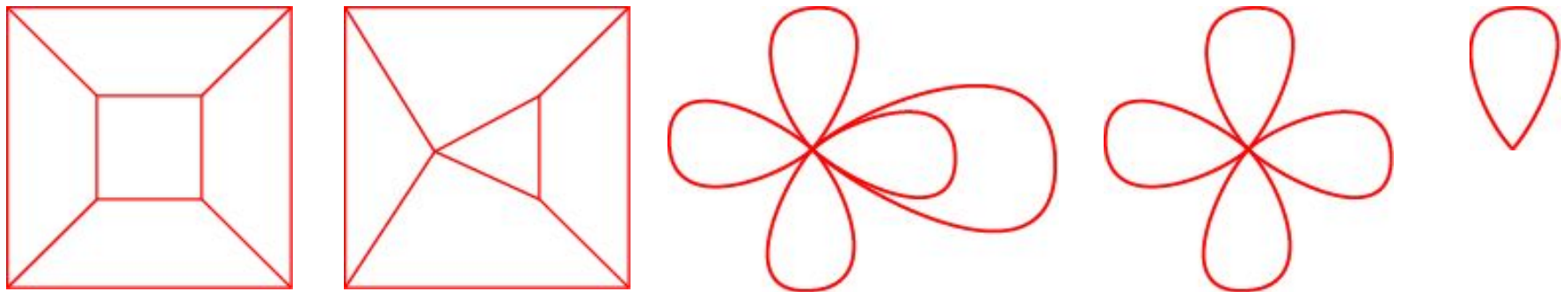
Граф называется **простым**, если его ребра или не имеют общих точек, или имеют только общие вершины.

Теорема Эйлера. Для связного простого графа имеет место равенство $V - P + \Gamma = 2$, где V - число вершин, P - общее число ребер, Γ - число областей, на которые граф разбивает плоскость.

Например, для графа, изображенного на рисунке, $V = 8$, $P = 12$, $\Gamma = 6$.

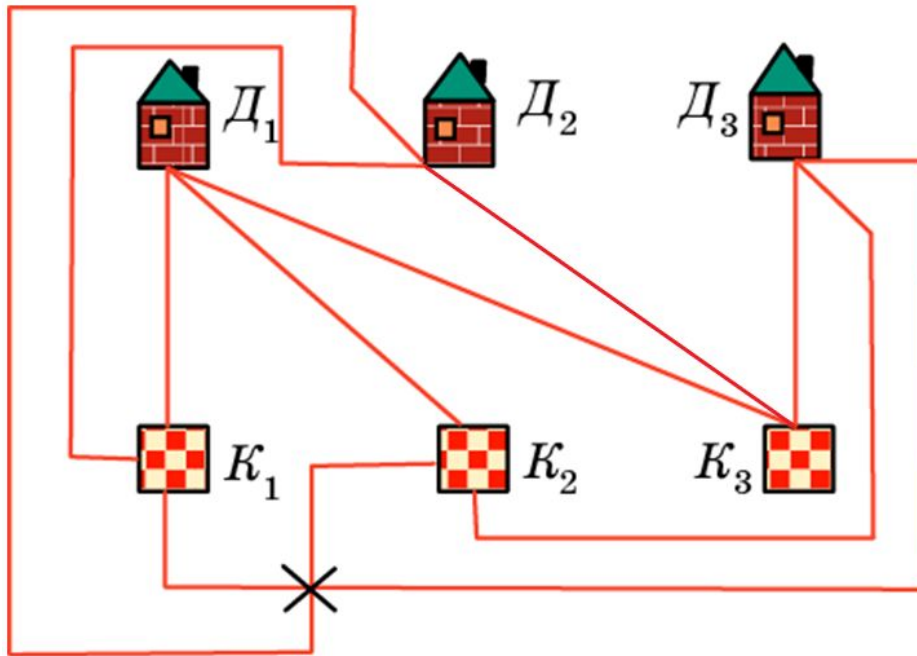


Доказательство теоремы. Стянем какое-нибудь ребро связного простого графа, соединяющее две его вершины, в точку. При этом число ребер и число вершин уменьшаться на единицу, а число областей не изменится. Следовательно, $V - P + \Gamma$ не изменится. Продолжая стягивать ребра, мы придем к графу, у которого имеется одна вершина, а ребрами являются петли. Уберем какое-нибудь ребро. При этом число ребер и число областей уменьшаться на единицу. Следовательно, $V - P + \Gamma$ не изменится. Продолжая убирать ребра, мы придем к графу, у которого имеется одна вершина и одно ребро. У этого графа $V = 1$, $P = 1$, $\Gamma = 2$ и, следовательно, $V - P + \Gamma = 2$. Значит, для исходного графа также выполняется равенство $V - P + \Gamma = 2$.



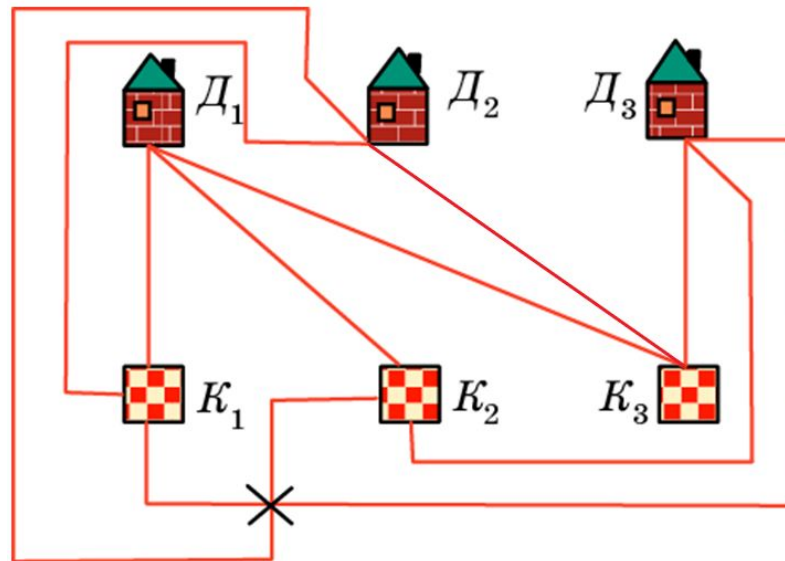
Задача Эйлера

Задача. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



То, что не получилось на рисунке, не является доказательством невозможности соединения дорожками домиков и колодцев. Для доказательства воспользуемся следующей теоремой Эйлера.

Решение. Предположим, что можно провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу. Рассмотрим граф, вершинами которого являются домики и колодцы, а ребрами – дорожки. У него $V = 6$, $P = 9$ и, следовательно, $\Gamma = 5$. Каждая из пяти областей ограничена, по крайней мере, четырьмя ребрами, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро разделяет две области, то количество ребер должно быть не меньше $(5 \cdot 4)/2 = 10$, что противоречит тому, что их число равно 9.

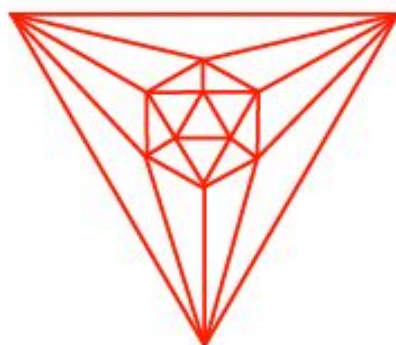


Упражнения

1. Посчитайте число вершин (V), ребер (P) и областей (Γ) для графов, изображенных на рисунке. Убедитесь, что $V - P + \Gamma = 2$.



а)



б)

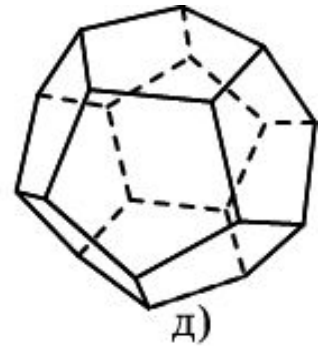
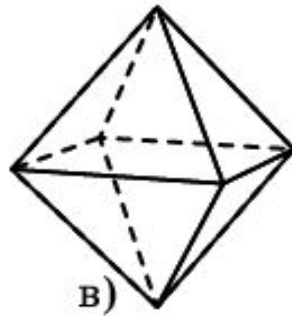
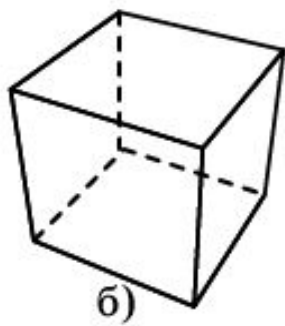
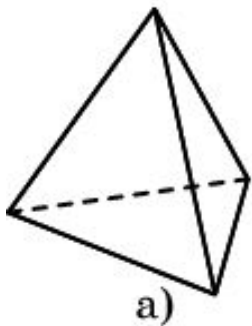


в)

Ответ: а) $V = 6$, $P = 12$, $\Gamma = 8$;

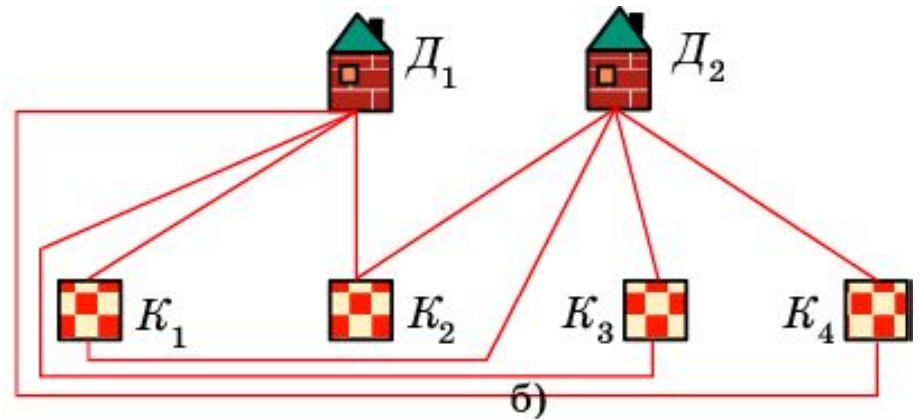
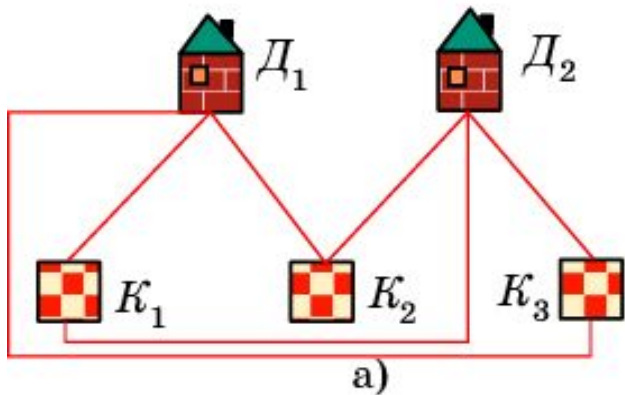
б) $V = 20$, $P = 30$, $\Gamma = 12$; в) $V = 12$, $P = 30$, $\Gamma = 20$.

2. Посчитайте число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) для многогранников, изображенных на рисунке. Чему равно $V - P + G$?



Ответ: а) $V = 4, P = 6, G = 4$; б) $V = 8, P = 12, G = 6$;
в) $V = 6, P = 12, G = 8$; г) $V = 20, P = 30, G = 12$;
д) $V = 12, P = 30, G = 20$.

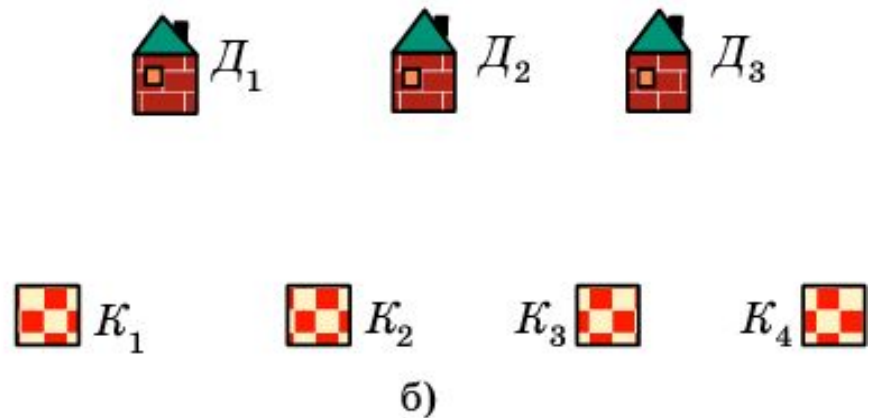
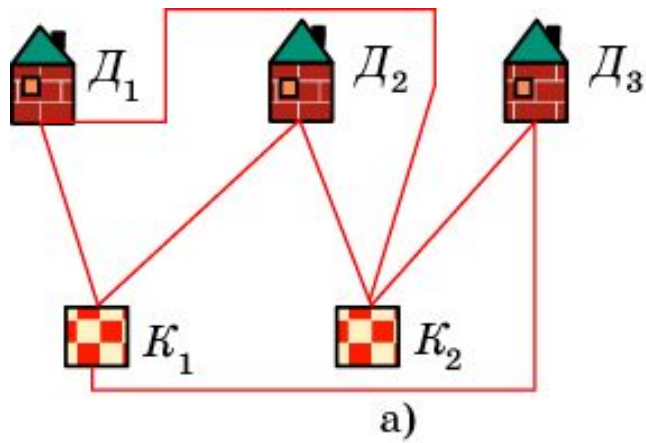
3. Два соседа имеют: а) три общих колодца;
б) четыре общих колодца.
Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



Ответ: а), б) Да.

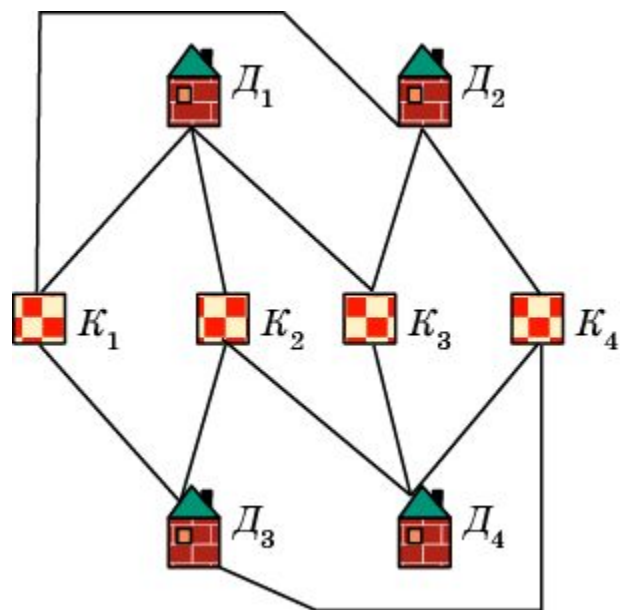
4. Три соседа имеют: а) два общих колодца; б) четыре общих колодца.

Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



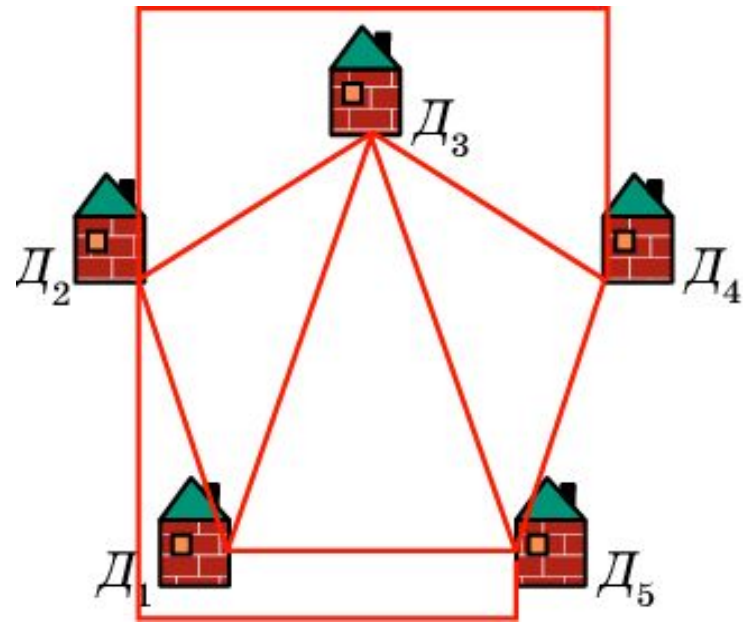
Ответ: а) да; б) нет.

5. Четыре соседа имеют четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки так, чтобы каждый домик был соединен с тремя колодцами и каждый колодец соединен с тремя домиками?



Ответ: Да.

6. Докажите, что пять домиков нельзя соединить непересекающимися дорожками так, чтобы каждый домик был соединен со всеми другими домиками.



Предположим, что это сделать можно. Тогда мы имеем связный простой граф, у которого $V = 5$, $P = 10$ и, следовательно, $\Gamma = 7$. С другой стороны, поскольку каждая область ограничена, по крайней мере тремя ребрами, то число ребер должно быть больше или равно

Противоречие.
 $\frac{7}{2} > 10.$

7. Пять соседей имеют пять общих колодцев. Можно ли провести непересекающиеся дорожки так, чтобы каждый домик был соединен с четырьмя колодцами и каждый колодец соединен с четырьмя домиками?

Решение. Если это сделать можно, то для соответствующего графа $V = 10$, $P = 20$, следовательно, $\Gamma = 12$. С другой стороны, поскольку каждая область ограничена, по крайней мере четырьмя ребрами, то число ребер должно быть больше или равно 24. Противоречие.

8. Шесть соседей имеют шесть общих колодцев. Можно ли провести непересекающиеся дорожки так, чтобы каждый домик был соединен с четырьмя колодцами и каждый колодец соединен с четырьмя домами?

Ответ. Нет. Решение аналогично предыдущему.

9. Имеется 100 домиков и 100 колодцев. Можно ли провести непересекающиеся дорожки так, чтобы каждый домик был соединен с тремя колодцами и каждый колодец соединен с тремя домиками?

Ответ. Да. Разобьем домики и колодцы на 25 групп по 4 домика и 4 колодца в каждой. В этих группах, согласно упражнению 5, можно провести дорожки. Следовательно, дорожки можно провести для всех домиков и колодцев.

10. Имеется 100 домиков и 100 колодцев. Можно ли провести непересекающиеся дорожки так, чтобы каждый домик был соединен с четырьмя колодцами и каждый колодец соединен с четырьмя домиками?

Ответ. Нет.

26. Проблема четырех красок

В 1850 году шотландский физик Фредерик Гутри обратил внимание на то, что задачи раскрашивания карт очень популярны среди студентов-математиков в Лондоне, а сформулировал проблему четырех красок его брат Фрэнсис Гутри, который, раскрасив карту графств Англии четырьмя красками, выдвинул гипотезу о том, что этого количества красок достаточно для раскраски любой карты. Он привлек к проблеме внимание своего преподавателя математики А. Де Моргана, а тот сообщил о ней своему другу В. Гамильтону и тем самым способствовал ее широкому распространению.

Годом рождения проблемы четырех красок считается 1878 год (в некоторых изданиях указывается 1879). Именно тогда на одном из заседаний Британского географического общества выдающийся английский математик А.Кэли четко сформулировал поставленную задачу: "Доказать, что любую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить четырьмя красками". Раскраска карты называется правильной, если любые две страны, имеющие на карте общую границу, окрашены в различные цвета. Именно с этого момента проблема привлекла к себе внимание многих крупных математиков.

В 1890 году английский математик П. Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить пятью красками. Однако долгое время проблема четырех красок не поддавалась решению.

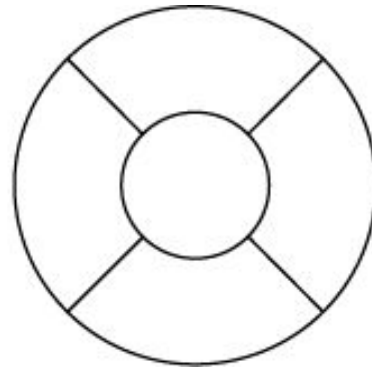
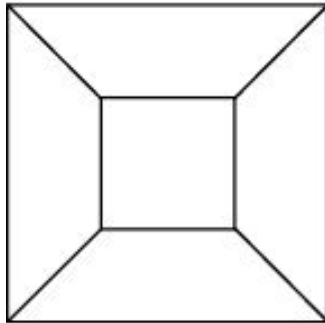
В 1968 году американские математики Оре и Стемпл показали, что любую карту, имеющую не более 40 стран, можно раскрасить четырьмя красками.

В 1976 году американскими учеными К. Аппелем и В. Хакеном было получено решение проблемы четырех красок. С помощью компьютера они просматривали различные типы карт, и для каждого из них компьютер решал, может ли в данном типе найтись карта, которая не раскрашивается четырьмя красками. Было просмотрено почти 2000 типов карт, и для всех был получен ответ: "Нет", - что и позволило объявить о компьютерном решении проблемы четырех красок.

Определение карты

Пусть на плоскости задан связный простой граф, каждая вершина которого имеет индекс, больший двух. Этот граф разбивает плоскость на несколько областей. Области будем называть странами, а само разбиение — картой на плоскости.

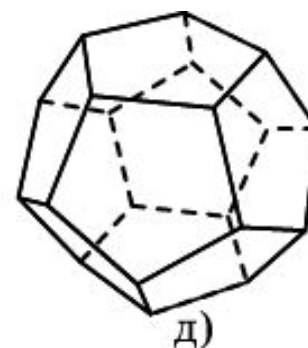
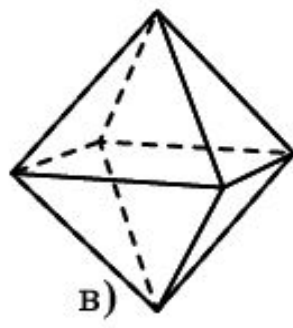
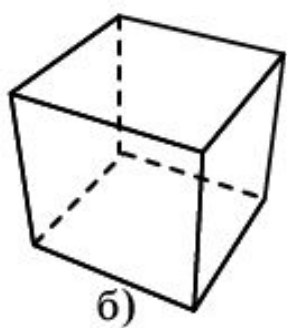
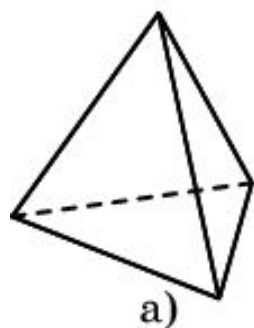
Примеры карт приведены на рисунке.



Помимо плоскости, карты рассматривают и на других поверхностях, например, на сфере.

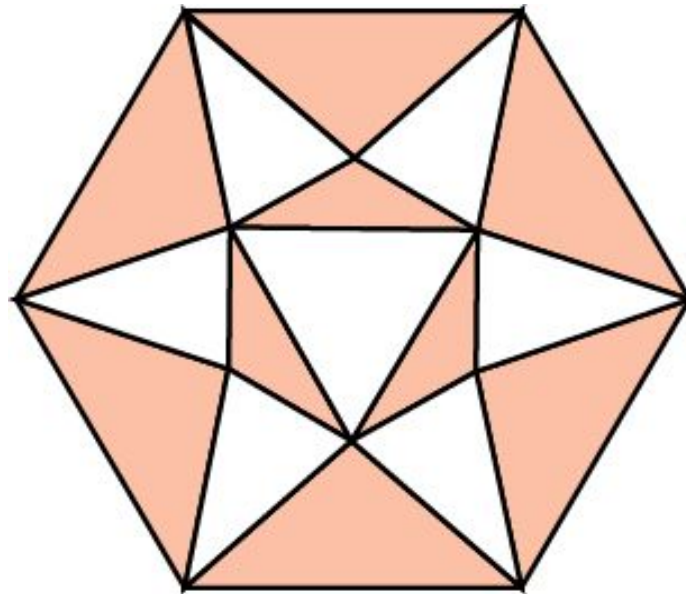
Поверхность многогранника можно рассматривать как карту, странами которой являются грани многогранника, а границами – его ребра.

На рисунке показаны карты, образованные поверхностями правильных многогранников: тетраэдра, куба, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра.



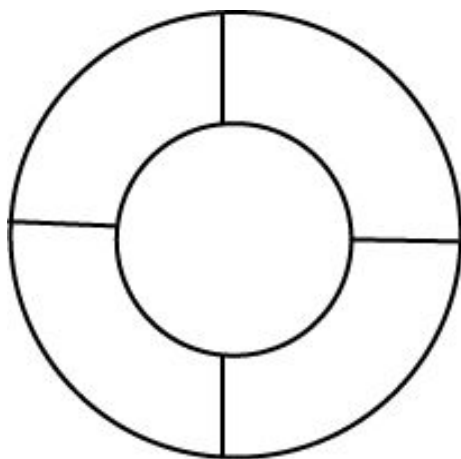
Упражнения

1. Какое наименьшее число красок потребуется для правильной раскраски карты, изображенной на рисунке?

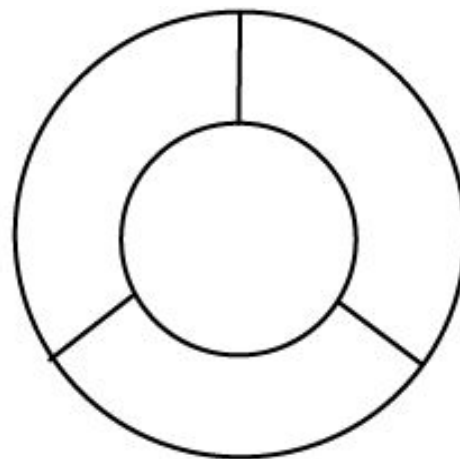


Ответ: 2.

2. Какое наименьшее число красок потребуется для правильной раскраски карт, изображенных на рисунке?



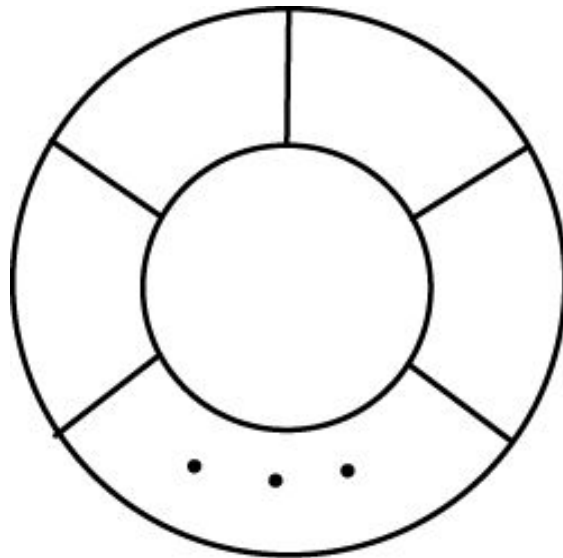
а)



б)

Ответ: а) 3; б) 4.

3. Какое наименьшее число красок потребуется для правильной раскраски карты, образованной двумя концентрическими окружностями, имеющими n перегородок?



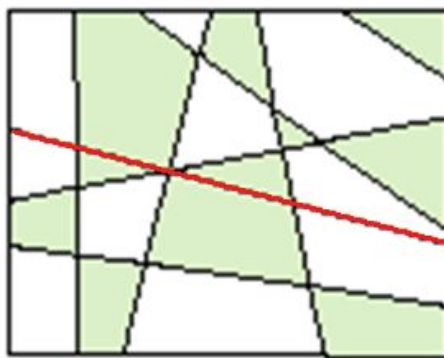
Ответ: 3, если n чётно и 4, если n нечётно.

4. Докажите, что любую карту, образованную прямыми, можно правильно раскрасить двумя красками.

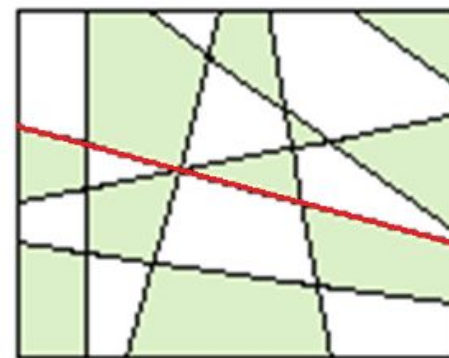
Доказательство. Ясно, что карту, образованную одной прямой можно раскрасить в два цвета (рис. а). Докажем, что если карта, образованная прямыми, раскрашена в два цвета, то карта, полученная из нее добавлением новой прямой также может быть раскрашена в два цвета (рис. б).



а)



б)



в)

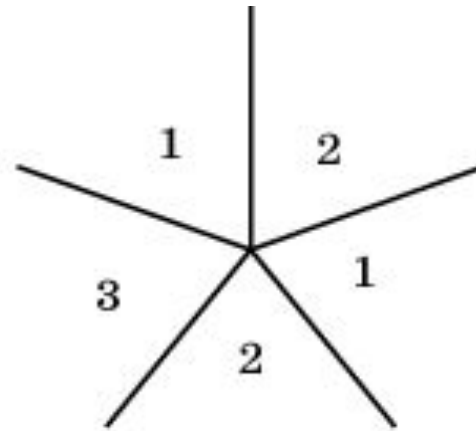
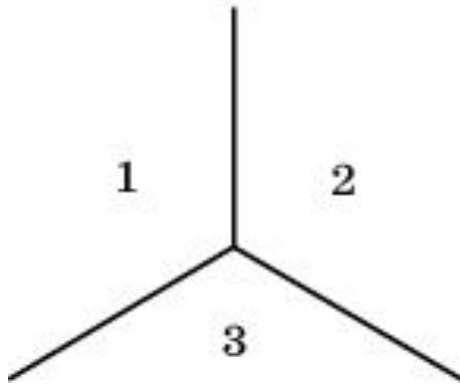
Действительно, новая прямая делит раскрашенную карту на две карты, каждая из которых раскрашена в два цвета. Однако к самой прямой примыкают пары областей, закрашенные в один цвет. Перекрасим одну из карт-половинок, изменив цвет каждой области на противоположный. Получим раскраску в два цвета всей карты (рис. в). Поскольку любую карту, образованную прямыми можно получить последовательным добавлением прямых, то всякая такая карта может быть раскрашена в два цвета.

5. Докажите, что любую карту, образованную окружностями, можно правильно раскрасить двумя красками.

Решение аналогично решению предыдущей задачи.

6. Докажите, что если карту можно правильно раскрасить двумя красками, то каждая её вершина имеет четный индекс (т. е. в ней сходится четное число ребер).

Доказательство. Если хотя бы одна вершина карты имела бы нечетный индекс, то для правильной раскраски такой карты потребовалось бы более двух красок.

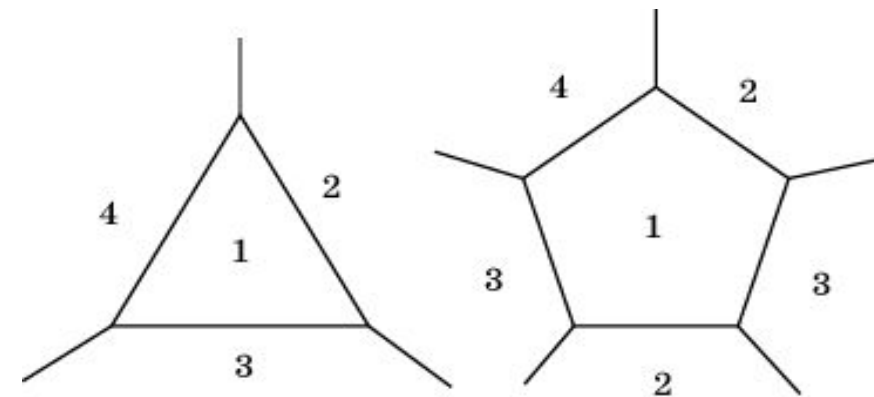


Верно и обратное. Если каждая вершина карты имеет четный индекс, то такую карту можно правильно раскрасить двумя красками.

Попробуйте доказать это самостоятельно.

7. Докажите, что если регулярную карту (т. е. такую, в каждой вершине которой сходится три ребра), можно правильно раскрасить тремя красками, то каждая её страна имеет четное число сторон.

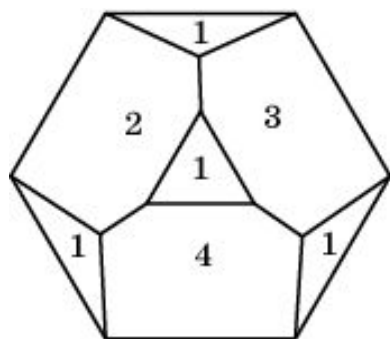
Доказательство. Если хотя бы одна страна карты имела бы нечетное число сторон, то для правильной раскраски такой карты потребовалось бы более трёх красок.



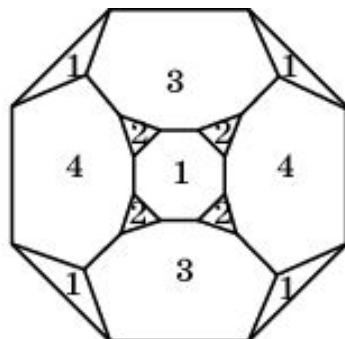
Верно и обратное. Если каждая страна регулярной карты имеет четное число сторон, то такую карту можно правильно раскрасить тремя красками.

Попробуйте доказать это самостоятельно.

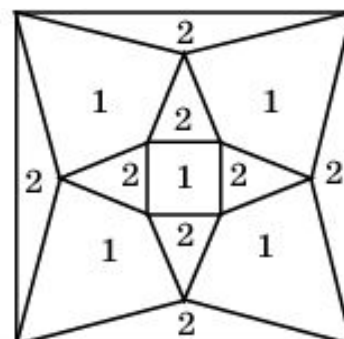
8. Какое наименьшее число красок потребуется для правильной раскраски карт, изображенных на рисунке?



а)



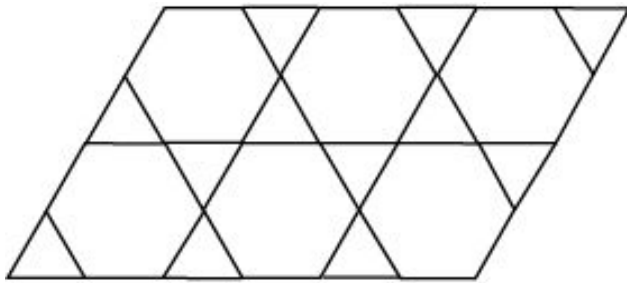
б)



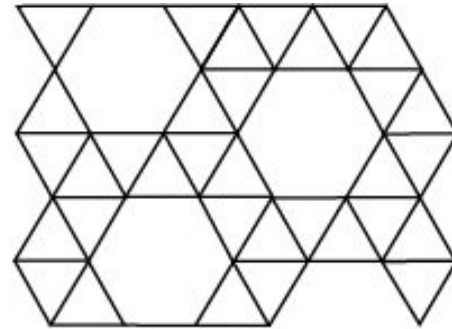
в)

Ответ: а) 4; б) 4; в) 2.

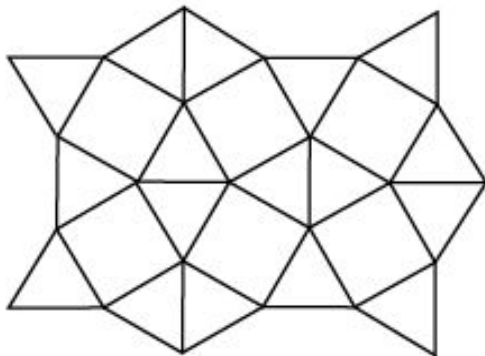
9. Какое наименьшее число красок потребуется для правильной раскраски паркетов, части которых изображены на рисунке?



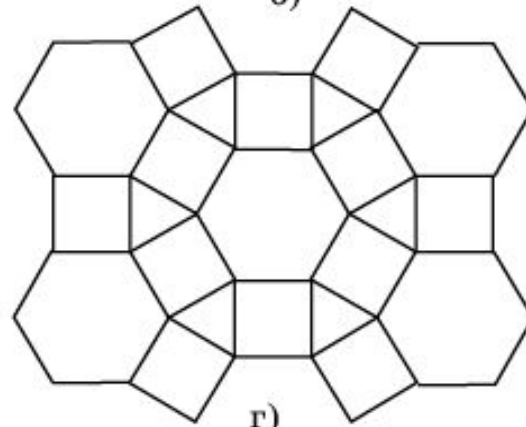
а)



б)



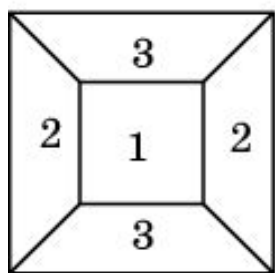
в)



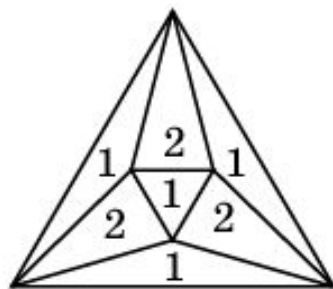
г)

Ответ: а) 2; б) 3; в) 3; г) 2.

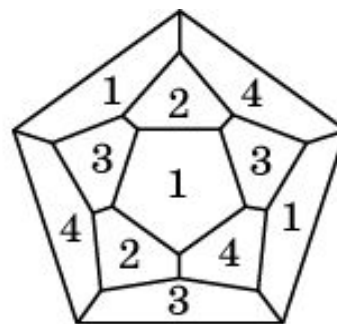
10. Какое наименьшее число красок потребуется для правильной раскраски карт, изображенных на рисунке?



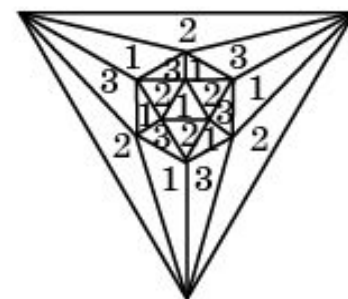
а)



б)



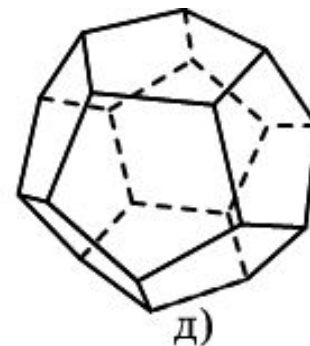
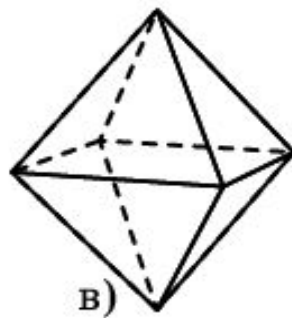
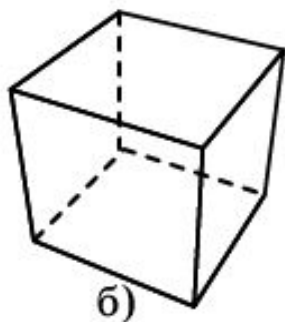
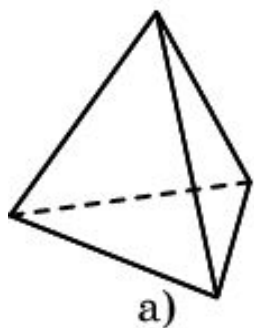
в)



г)

Ответ: а) 3; б) 2; в) 4; г) 3.

11. Какое наименьшее число красок потребуется для правильной раскраски граней правильных многогранников?



Ответ: а) 4; б) 3; в) 2; г) 3; д) 4.



Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:

105043, Москва, ул. 6-я Парковая, д. 29 Б

Тел.: 8 (499) 367–67–81

Е-mail: ioc@mnemozina.ru

Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:

Е-mail: td@mnemozina.ru

Тел.: 8 (495) 644–20–26

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте «Школа в кармане»:

<http://pocketschool.ru>