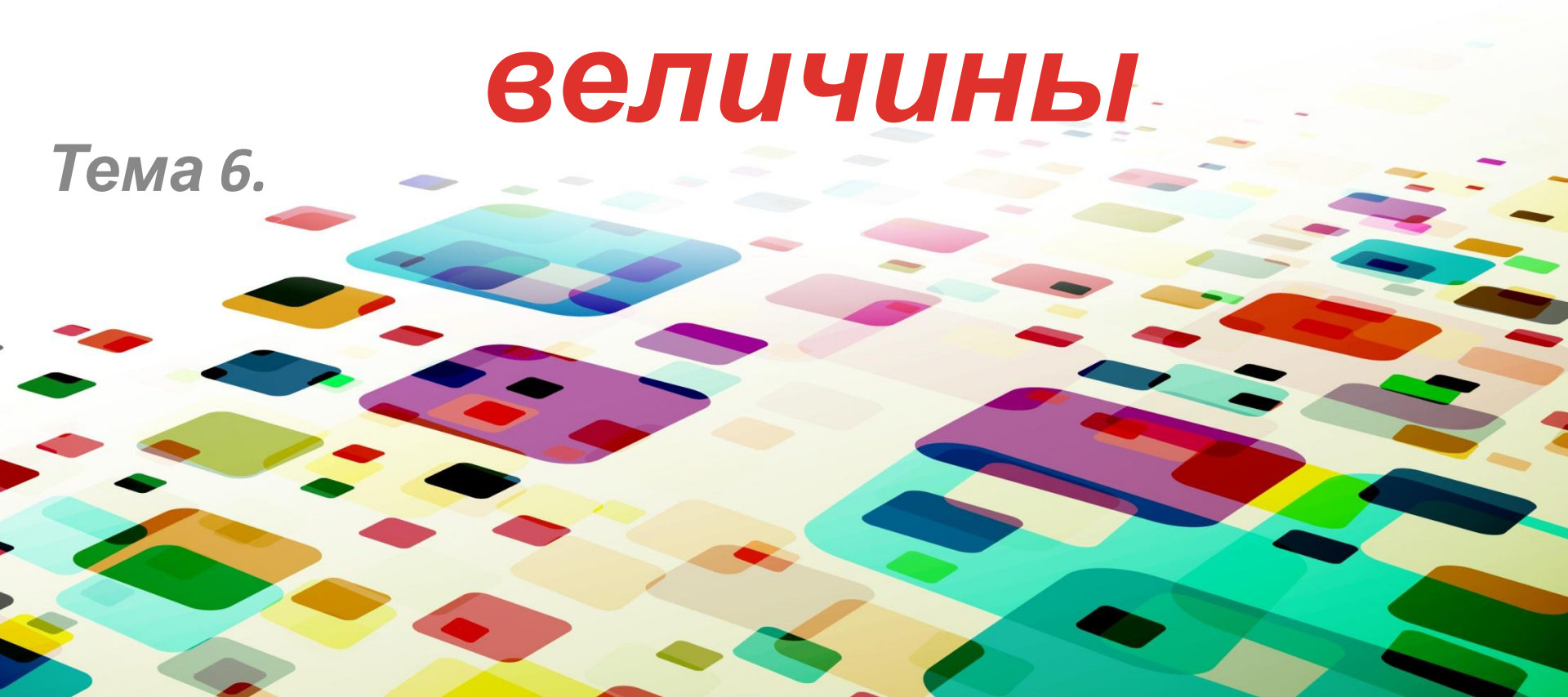


Теория вероятностей и математическая статистика

Случайные величины

Тема 6.



Определение

Случайная величина – это переменная, которая в результате эксперимента принимает одно из своих возможных значений, причем заранее не известно какое именно.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, соответствующие числовые значения – строчными

Дискретные и непрерывные случайные величины

1

Возможные значения **дискретной случайной величины** можно перечислить (перенумеровать натуральными числами)

2

Возможные значения **непрерывной случайной величины** заполняют некоторый промежуток вещественной оси.

Определение

- Пусть X – дискретная случайная величина с возможными значениями

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

- Каждое из этих значений возможно, но не достоверно, и X может принять любое из них с некоторой вероятностью.
- Принятие случайной величиной некоторого числового значения из набора возможных (т.е. выполнение равенства $X = x$) есть случайное событие, характеризующееся вероятностью $P(X=x_i) = p_i$

Закон распределения случайных величин

- ***Законом распределения случайной величины*** называется соотношение устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующей вероятности
- *Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан в виде:*
 1. таблицы
 2. аналитически (в виде формулы)
 3. графически

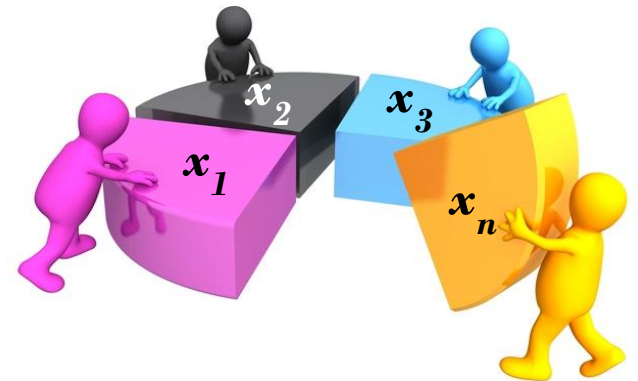
Ряд распределения дискретной случайной величины

- Ряд распределения дискретной случайной величины (ДСВ) представляет собой таблицу, в верхней части которой представлены варианты значений ДСВ, а в нижней – соответствующие вероятности того, что X примет значение x_i .

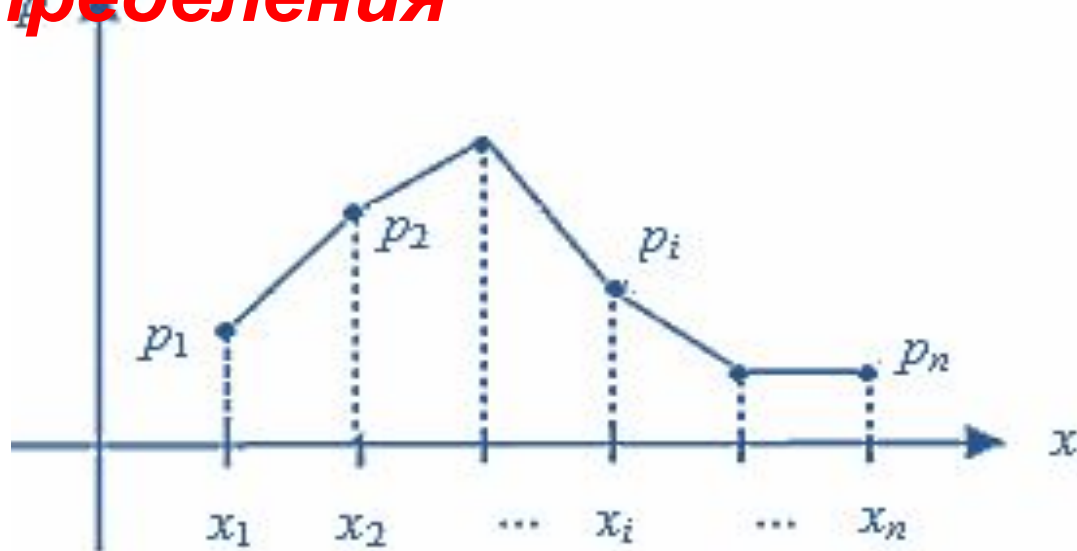
x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P_i = P(x=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Ряд распределения дискретной случайной величины

- При построении ряда распределения необходимо помнить, что:
1. $0 \leq p_i \leq 1$
 2. $\sum p_i = 1$, так как события $(X=x_1), (X=x_2) \dots (X=x_n)$ образуют полную группу несовместных событий



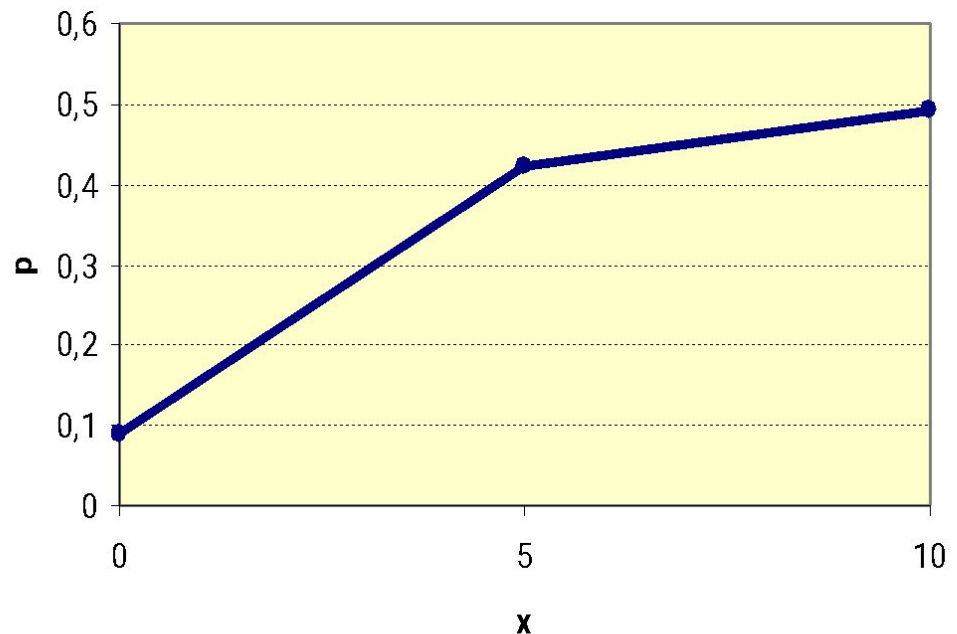
- Графическое представление ряда распределения ДСВ называется **многоугольником (полигоном) распределения**



Пример 2

Стрелок проводит два выстрела по мишени. Вероятность попадания равна 0,7. За каждое попадание стрелку засчитывают 5 очков. Случайная величина X – число выбитых очков.

X	0	5	10
P	0,09	0,42	0,49



Операции над случайными величинами

- Две СВ называются **независимыми**, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае СВ – **зависимые**.
- 1. Произведением kX случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i , с теми же вероятностями p_i ($i = \overline{1, n}$)
- 2. m -й степенью случайной величины X называется случайная величина, которая принимает значения x^m с теми же вероятностями p_i ($i = \overline{1, n}$)

Числовые характеристики дискретной случайной величины

- **Математическое ожидание** ДСВ X – сумма произведений всех ее значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

- Это число, характеризующее среднее значение случайной величины X

Свойства математического ожидания

- 1) $M(C) = C$, где $C = \text{const}$;
- 2) $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;
- 3) $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$, где X и Y – любые случайные величины;
- 4) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, где X и Y – независимые случайные величины;
- 5) $M(X \pm C) = M(X) \pm C$, где $C = \text{const}$.

Дисперсия случайной величины

- **Дисперсией** случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

- характеризует разброс (рассеяние) значений СВ около ее математического ожидания

Свойства дисперсии случайной величины

- 1) $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$;
- 2) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$;
- 3) $D(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_n)$,
если $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимые случайные величины;
- 4) $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ (биномиальный закон распределения)

- Вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаний событие A наступит ровно m раз, равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

где p – вероятность наступления события A в каждом испытании, q – вероятность противоположного события

ТЕОРЕМА ПУАССОНА

- Если вероятность наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \rightarrow 0$), при неограниченном увеличении числа испытаний ($n \rightarrow \infty$), причем $np \rightarrow \lambda$, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях приближенно равно:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

$$e \cong 2,718281828459045..$$

Функция распределения

- Введенный выше ряд распределения пригоден лишь для дискретных случайных величин. Более общей характеристикой является *функция распределения* случайной величины.
- **Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$,** выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее чем x :

$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} P(X = x_i)$$



Таким образом, значение функции распределения в точке x есть вероятность того, что в результате эксперимента X примет значение строго меньшее x , то есть вероятность события $\{X < x\}$.

Функция распределения определена на всей вещественной оси.

Функция распределения – самая универсальная характеристика случайной величины. Она определена как для дискретных так и для непрерывных случайных величин.

Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения.



Функция распределения

- График функции распределения в общем случае представляет собой график неубывающей функции, значения которой начинаются с нуля и доходят до 1, при этом возможны разрывы (справа) в отдельных точках.

Свойства функции распределения

- Функция распределения может принимать любое значение от 0 до 1, т.е. является вероятностью по определению: $0 \leq F(x) \leq 1$;
- Функция распределения является не убывающей

$$\text{при } x_2 > x_1 \quad F(x_2) \geq F(x_1);$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ при $x \rightarrow -\infty \leftrightarrow F(-\infty) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ при $x \rightarrow +\infty \leftrightarrow F(+\infty) = 1$.
- Вероятность попадания ДСВ в интервал $[a; b)$ равна приращению функции распределения на этот интервал: $F(a \leq x < b) = F(b) - F(a)$
- Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b) , то $F(x) = 0$ при $x \leq a$; $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

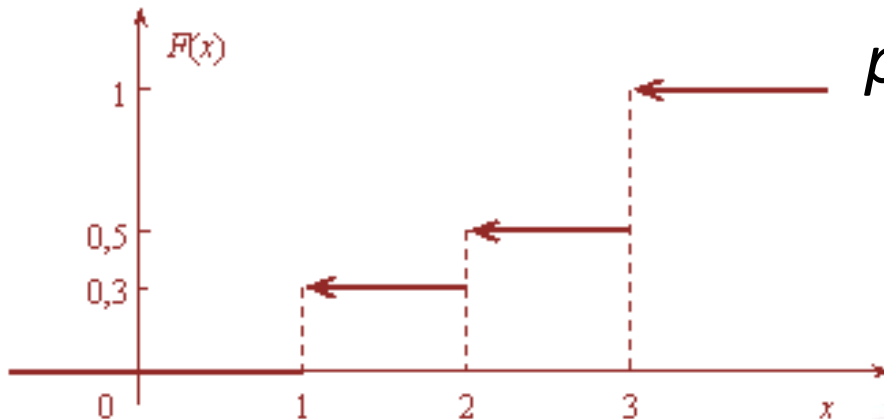
Пример 3

- Дан ряд распределения случайной величины:

X_i	1	2	3
P_i	0,3	0,2	0,5

- Найти и изобразить графически ее функцию

График функции $F(x)$:



Решение:

Пусть $x \leq 1$, тогда $F(x) = 0$,
(так как событие $X < x$ будет невозможным)

Если $1 < x \leq 2$, то $F(x) = p_1 = 0,3$.

Если $2 < x \leq 3$, то $F(x) = p_1 + p_2 = 0,5$.

Если $x > 3$, то $F(x) =$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ 0,3, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 0,5, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$