

# Векторы в пространстве

*Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"*

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой концом, называется **вектором**



$\vec{AB}$



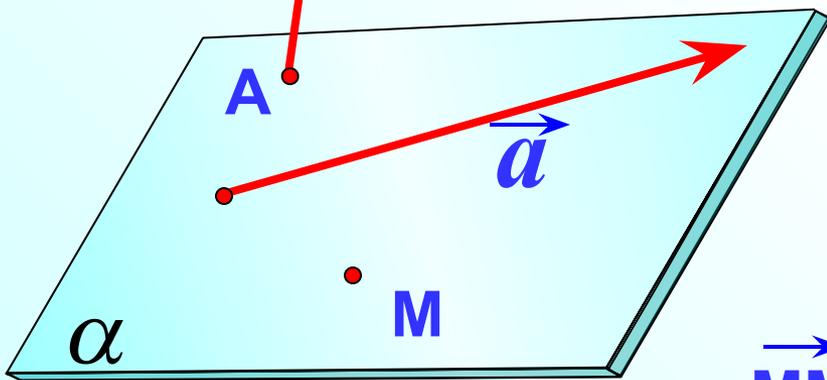
~~$\vec{BA}$~~

**Длиной ненулевого вектора** называется длина отрезка AB

$\vec{AB}$

$$|\vec{AB}| = AB$$

$\vec{a}$



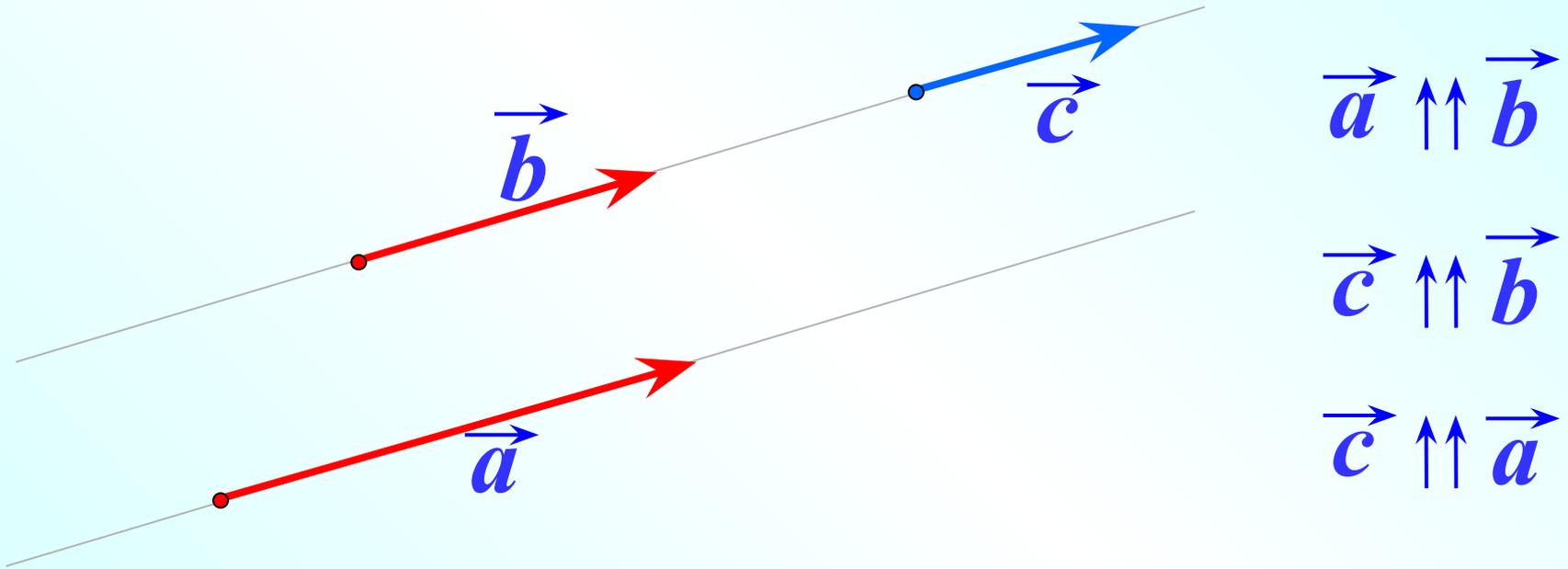
$\vec{MM}$

$\vec{0}$

$$|\vec{MM}| = 0$$

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

### Коллинеарные, сонаправленные векторы



**Нулевой вектор** условимся считать сонаправленным с любым вектором.

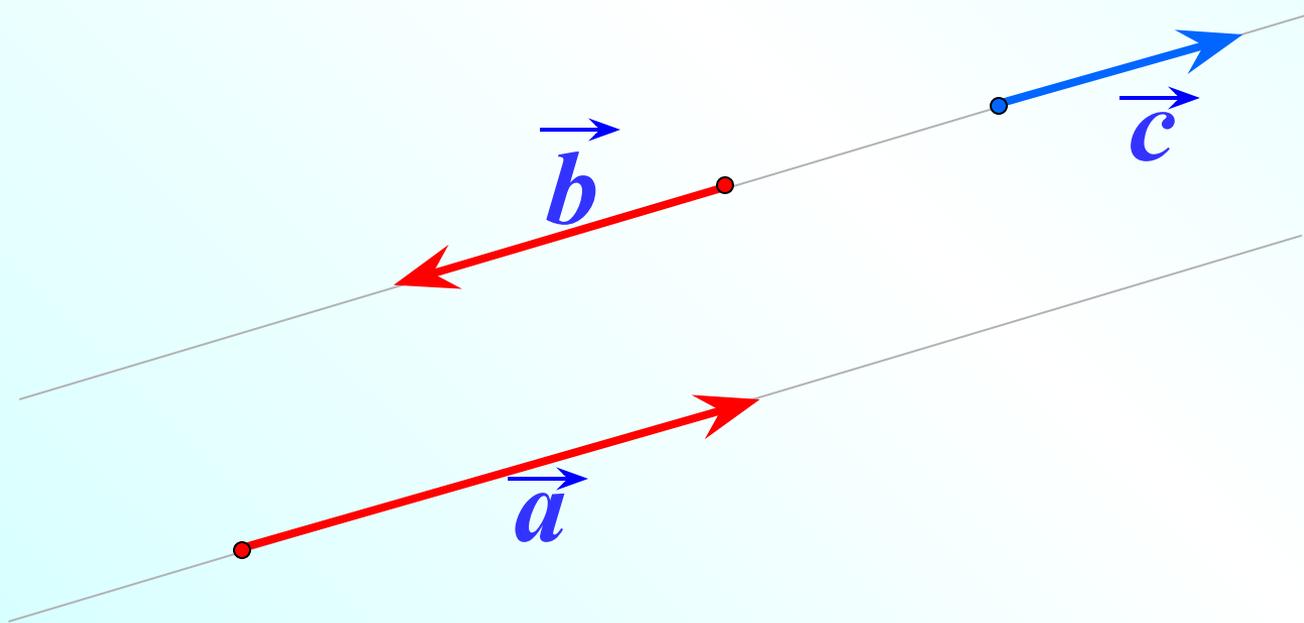
$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a}$$

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{c}$$

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

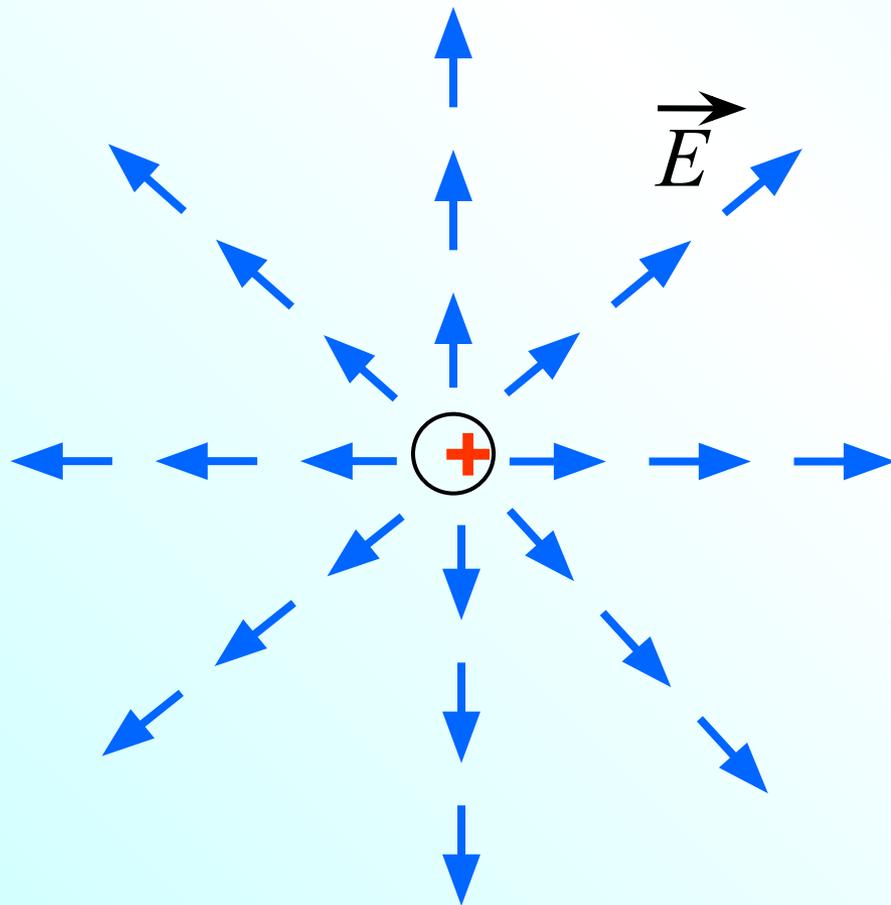
**Коллинеарные, противоположно направленные векторы**



$$\vec{a} \updownarrow \vec{b}$$

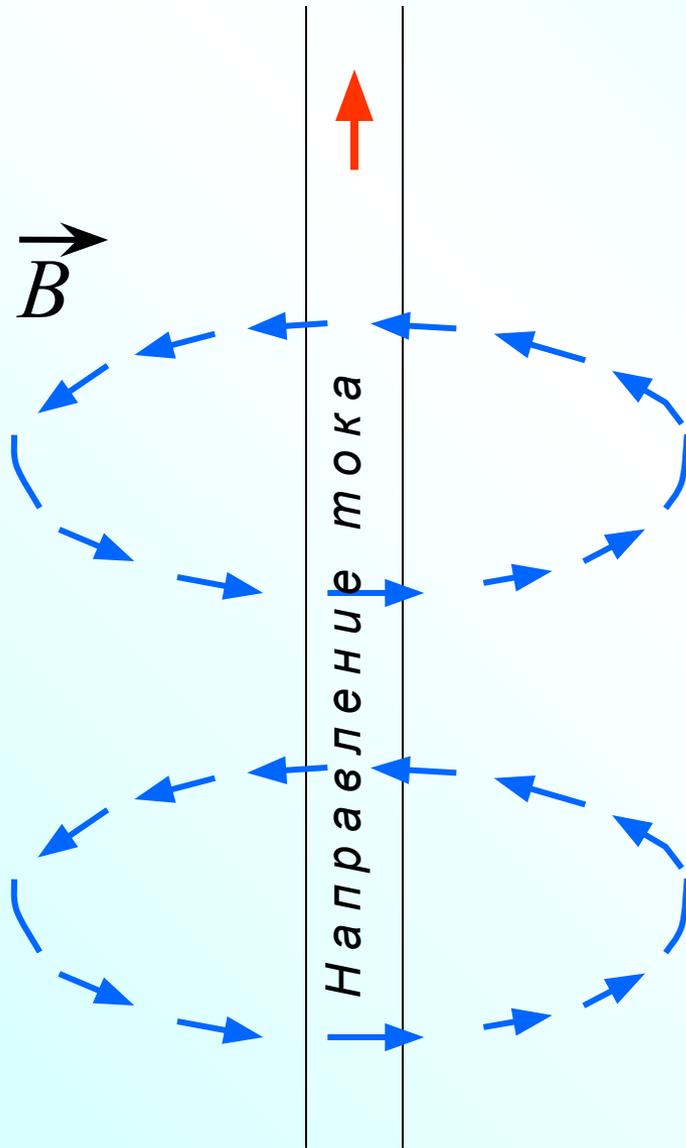
$$\vec{c} \updownarrow \vec{b}$$

Многие физические величины, например сила перемещение, скорость, являются векторными величинами. При изучении электрических и магнитных явлений появляются новые примеры векторных величин.



Электрическое поле, создаваемое в пространстве зарядами, характеризуется в каждой точке пространства вектором напряженности электрического поля.

На рисунке изображены векторы напряженности электрического поля положительного точечного заряда.



Электрический ток, т.е. направленное движение зарядов, создает в пространстве магнитное поле, которое характеризуется в каждой точке пространства вектором магнитной индукции.

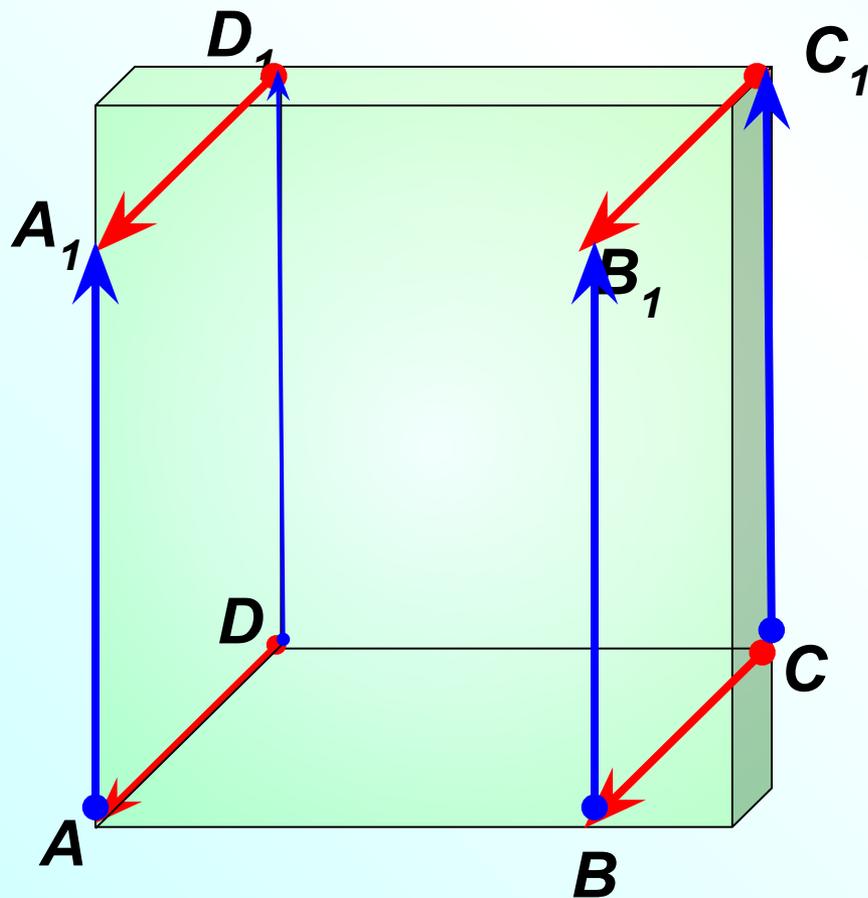
На рисунке изображены векторы магнитной индукции магнитного поля прямого проводника с током.

Векторы называются **равными**,

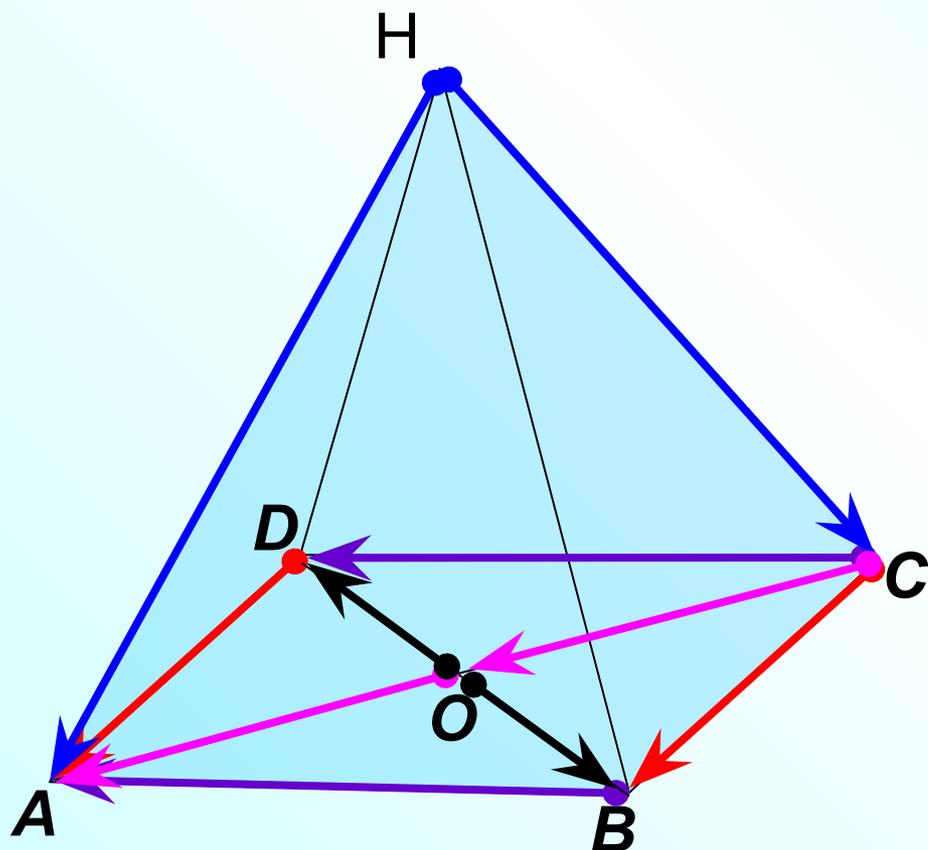
если они сонаправлены и их длины равны.

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$



ABCDH – правильная четырехугольная пирамида.  
Верно ли равенство векторов?



$$\vec{DA} = \vec{CB}$$

$$\vec{CD} = \vec{BA}$$

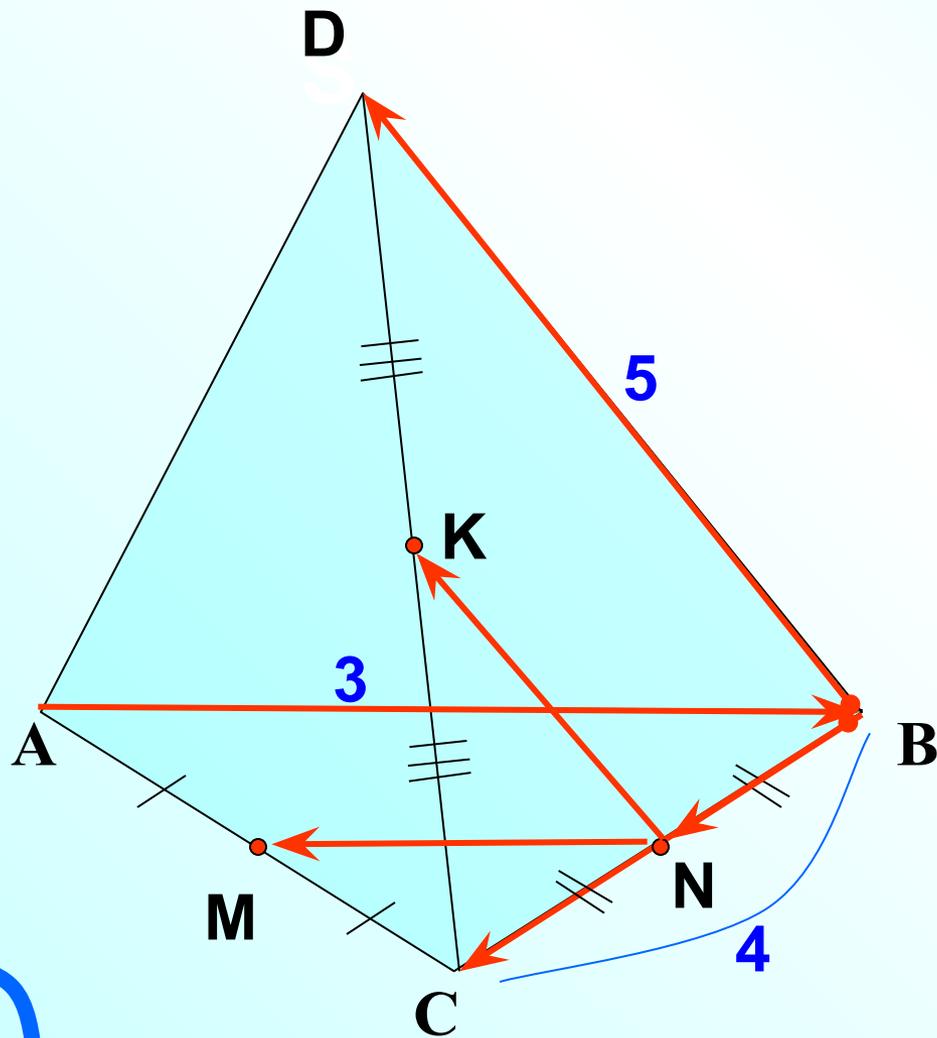
~~$$\vec{HC} = \vec{HA}$$~~

$$\vec{CO} = \vec{OA}$$

~~$$\vec{OD} = \vec{OB}$$~~

**№320**

Найдите длины векторов



$$|\vec{AB}| = 3$$

$$|\vec{BC}| = 4$$

$$|\vec{BD}| = 5$$

$$|\vec{NM}| = 1,5$$

$$|\vec{BN}| = 2$$

$$|\vec{NK}| = 2,5$$

$$|\vec{CB}| =$$

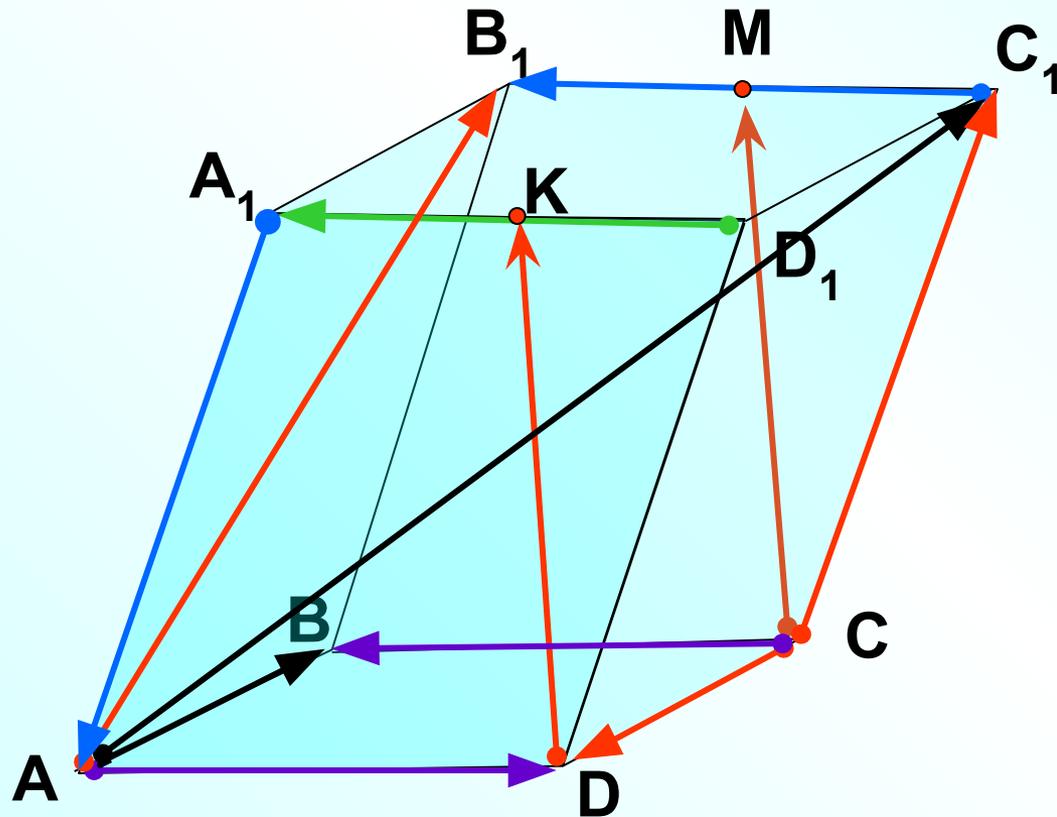
$$|\vec{BA}| =$$

$$|\vec{DB}| =$$

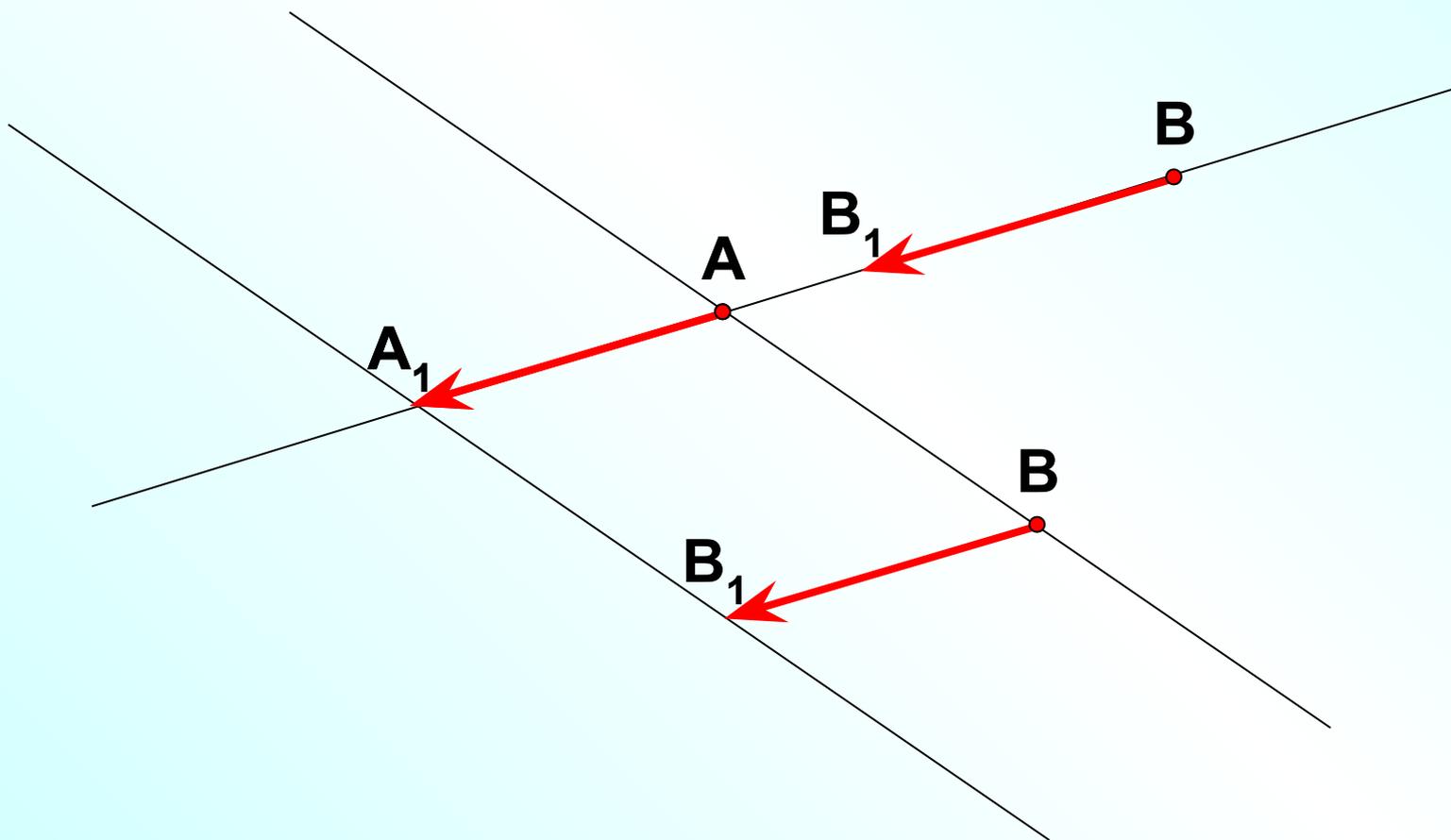
$$|\vec{NC}| =$$

$$|\vec{KN}| =$$

**№322** На рисунке изображен параллелепипед  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Точки  $M$  и  $K$  – середины ребер  $B_1C_1$  и  $A_1D_1$ . Укажите на этом рисунке все пары: а) сонаправленных векторов; б) противоположно направленных векторов; в) равных векторов.



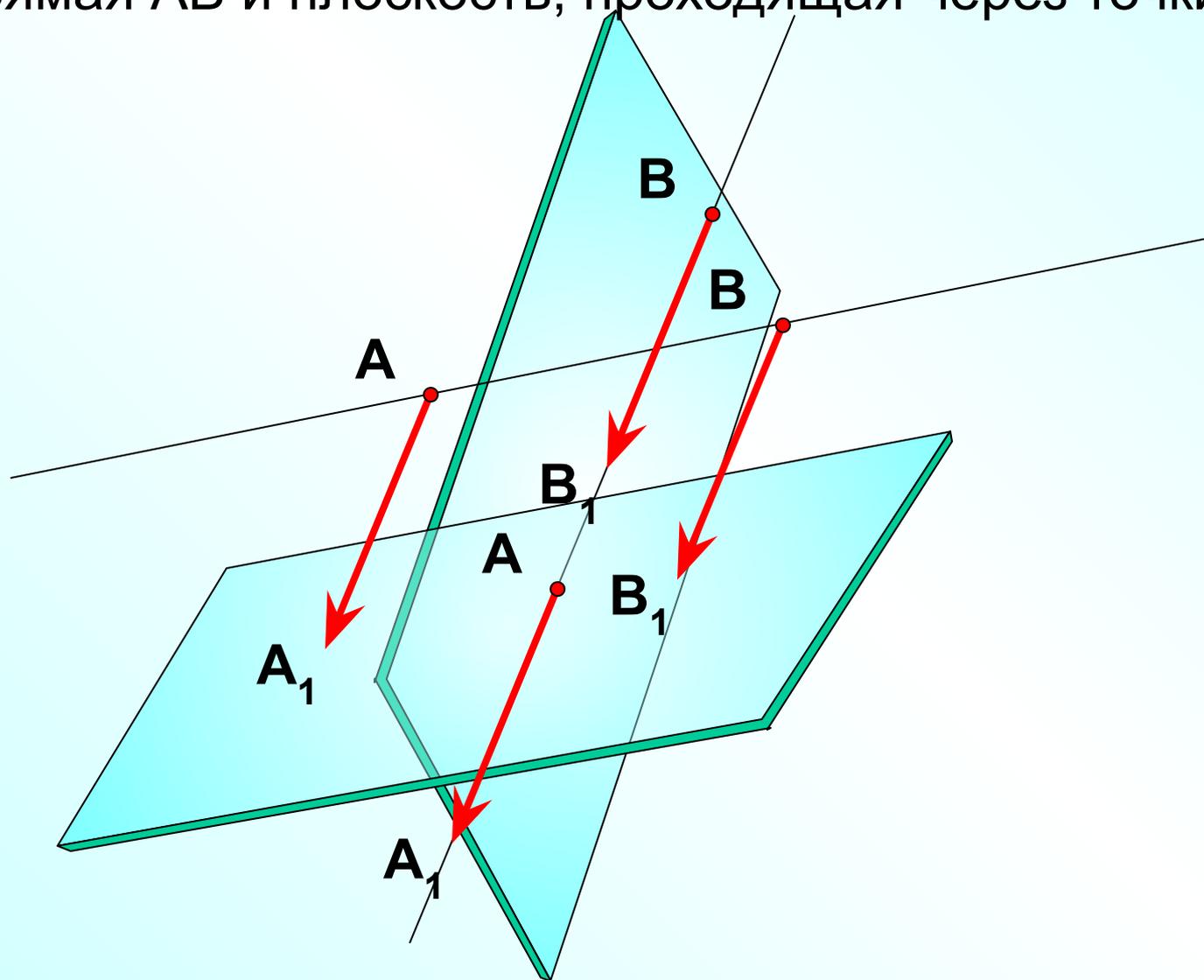
**№325** Известно, что  $\vec{AA}_1 = \vec{BB}_1$ . Как расположены по отношению друг к другу: а) прямые  $AB$  и  $A_1B_1$ ;



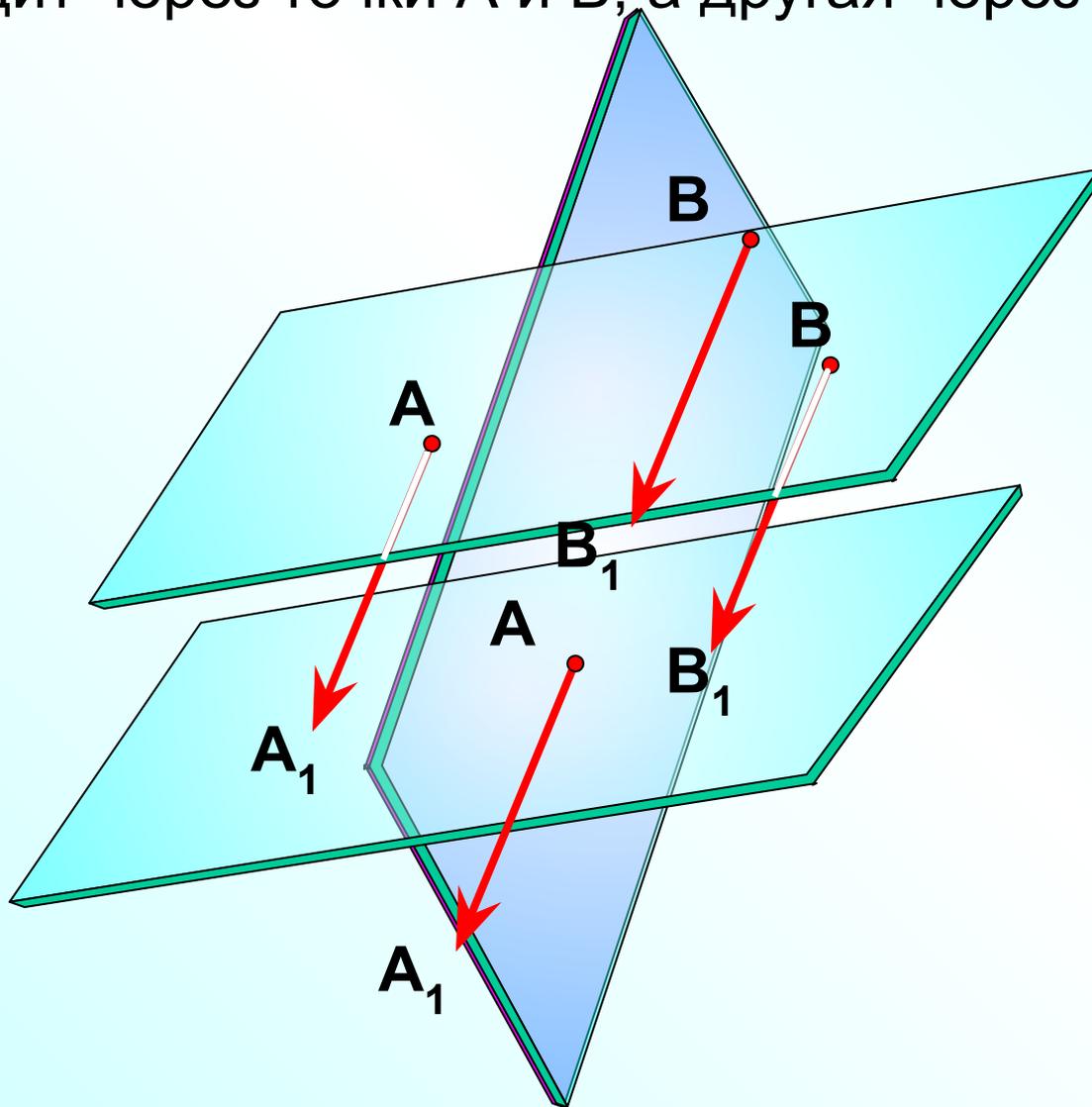
**№325** Известно, что  $\vec{AA}_1 = \vec{BB}_1$ . Как расположены по

отношению друг к другу:

б) прямая  $AB$  и плоскость, проходящая через точки  $A_1$  и  $B_1$ ;



**№325** Известно, что  $\vec{AA}_1 = \vec{BB}_1$ . Как расположены по отношению друг к другу: в) плоскости, одна из которых проходит через точки  $A$  и  $B$ , а другая через точки  $A_1$  и  $B_1$ .



**№326** На рисунке изображен параллелепипед  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Точки  $M$  и  $K$  – середины ребер  $B_1C_1$  и  $A_1D_1$ . Назовите вектор, который получится, если:

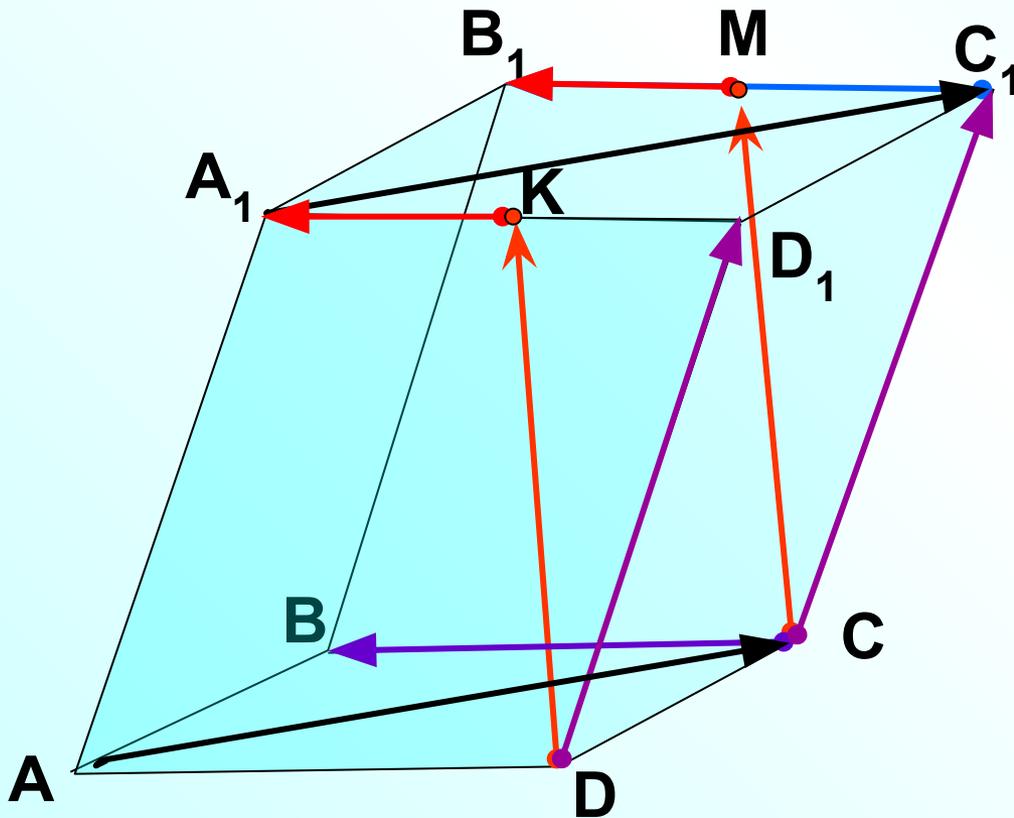
а) от точки  $C$  отложить вектор, равный  $\overrightarrow{DD_1}$ ;

б) от точки  $D$  отложить вектор, равный  $\overrightarrow{CM}$ ;

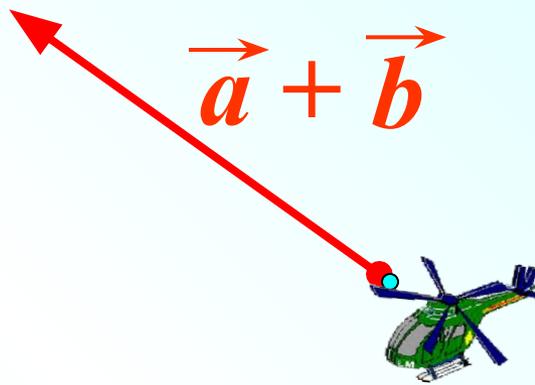
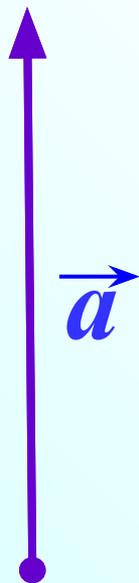
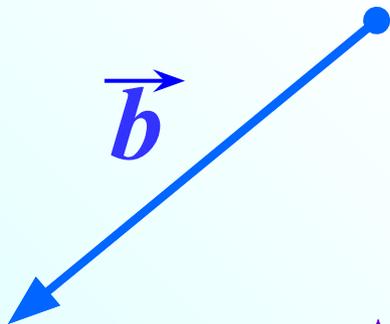
в) от точки  $A_1$  вектор, равный  $\overrightarrow{AC}$ ;

г) от точки  $C_1$  вектор, равный  $\overrightarrow{CB}$ ;

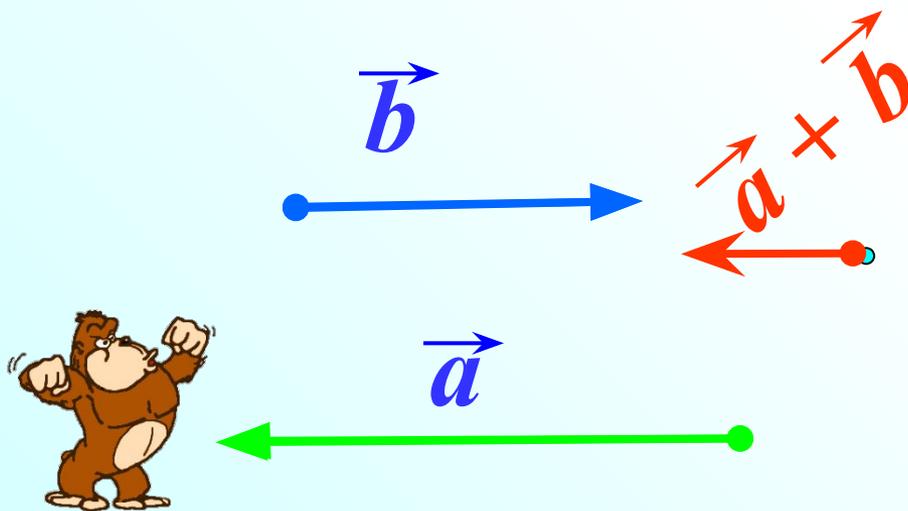
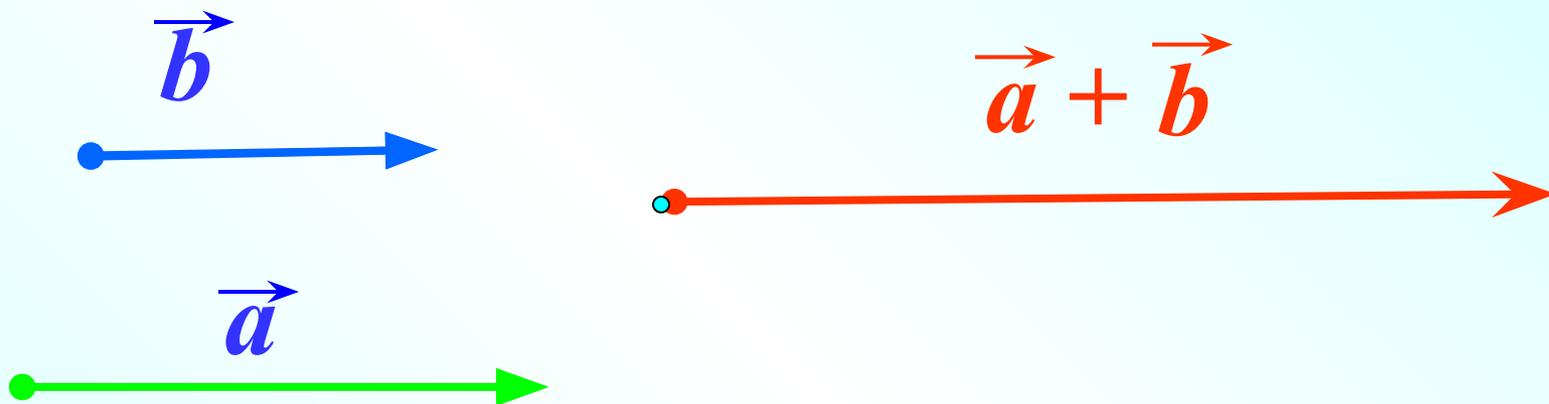
д) от точки  $M$  вектор, равный  $\overrightarrow{KA_1}$ .



Сложение векторов.  
Правило треугольника.



По правилу треугольника складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении треугольника и не получается





$\vec{b}$



$\vec{a} + \vec{b}$

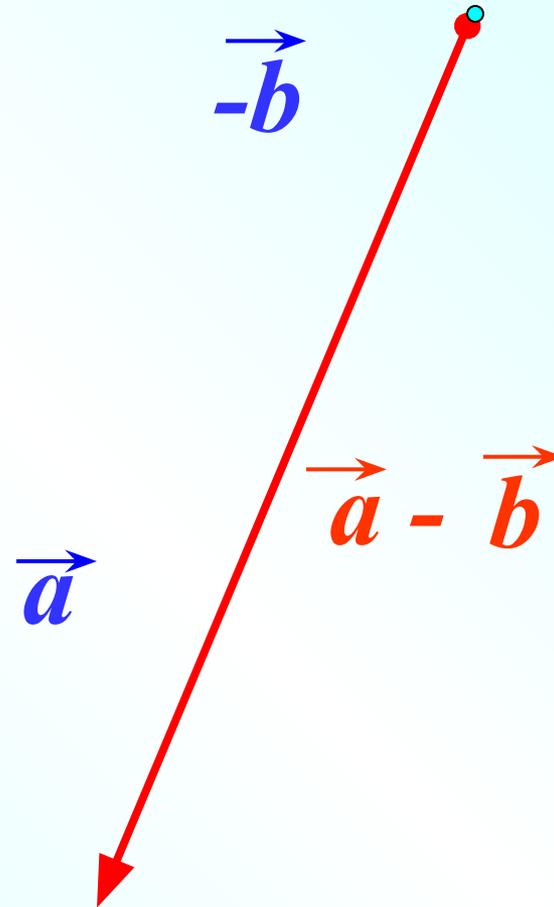
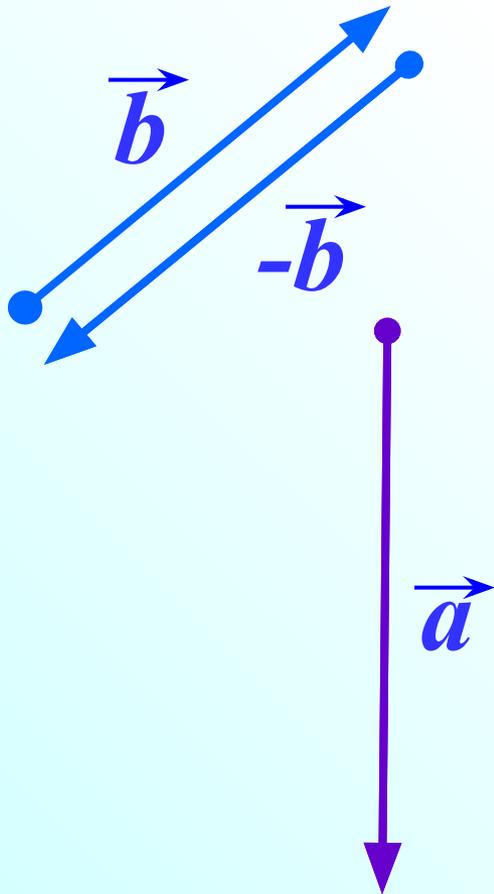


$\vec{a}$



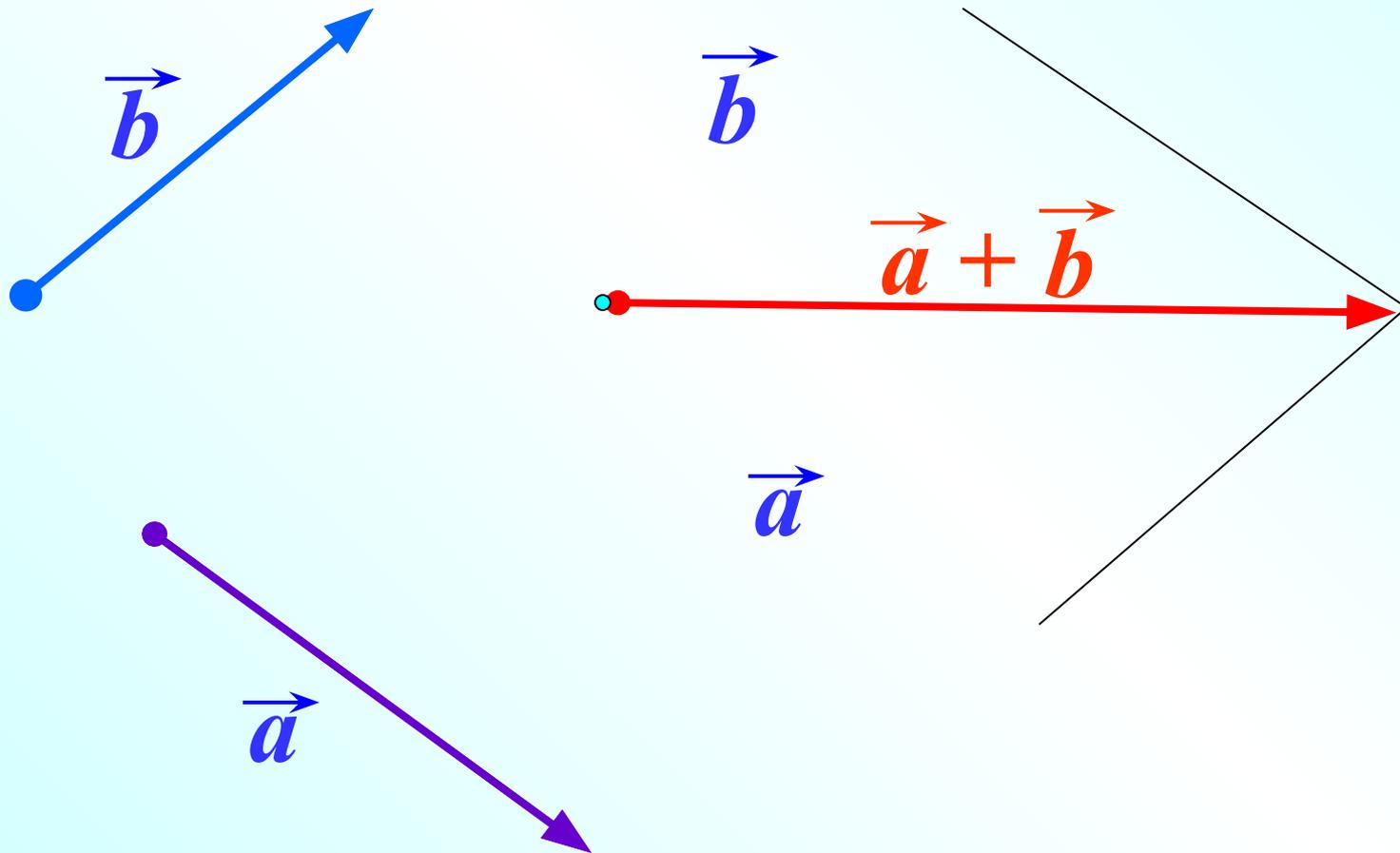
# Вычитание векторов. Правило треугольника.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



# Сложение векторов. Правило параллелограмма.

$$\vec{a} + \vec{b}$$



## Сложение векторов.

### Правило треугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AC}$$

$$\vec{AO} + \vec{OP} = \vec{AP}$$

$$\vec{MN} + \vec{NR} = \vec{MR}$$

$$\vec{MK} + \vec{KM} = \vec{MM} = \vec{0}$$

$$\vec{MK} + \vec{OM} = \vec{OM} + \vec{MK} = \vec{OK}$$

$$\vec{MF} - \vec{SF} = \vec{MF} + \vec{FS} = \vec{MS}$$

$$\vec{RO} - \vec{RM} = \vec{RO} + \vec{MR} = \vec{MR} + \vec{RO} = \vec{MO}$$

**Сложение векторов.  
Правило треугольника.**

$$\vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\text{из } \triangle OBN \quad \vec{ON} = \vec{OB} + \vec{BN}$$

$$\text{из } \triangle ASR \quad \vec{AS} = \vec{AR} + \vec{RS}$$

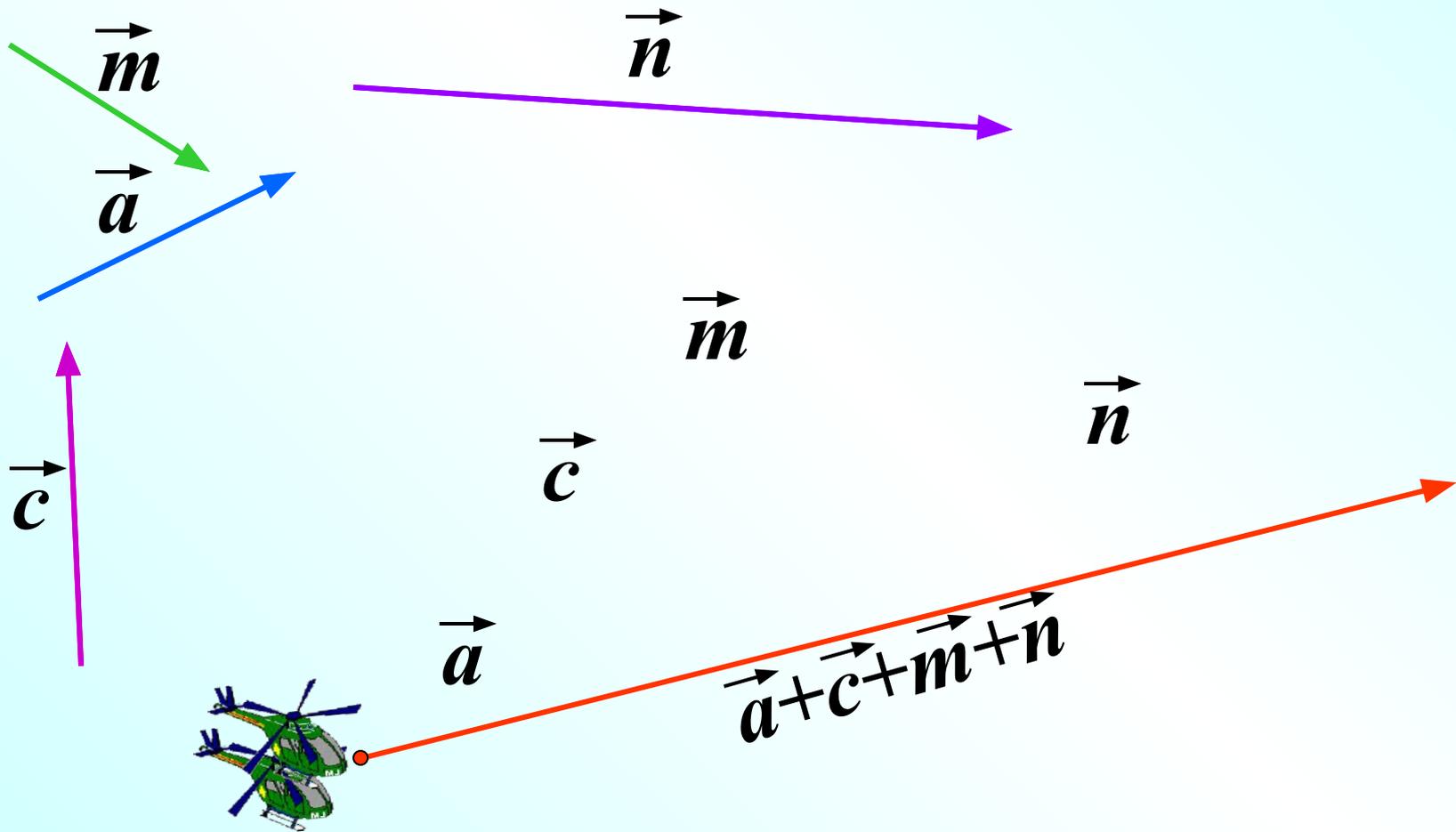
$$\text{из } \triangle XKH \quad \vec{XH} = \vec{XK} + \vec{KH}$$

$$\text{из } \triangle AMD \quad \vec{MD} = \vec{MA} + \vec{AD}$$

$$\text{из } \triangle FPO \quad \vec{OP} = \vec{OF} + \vec{FP}$$

# Сложение векторов. Правило многоугольника.

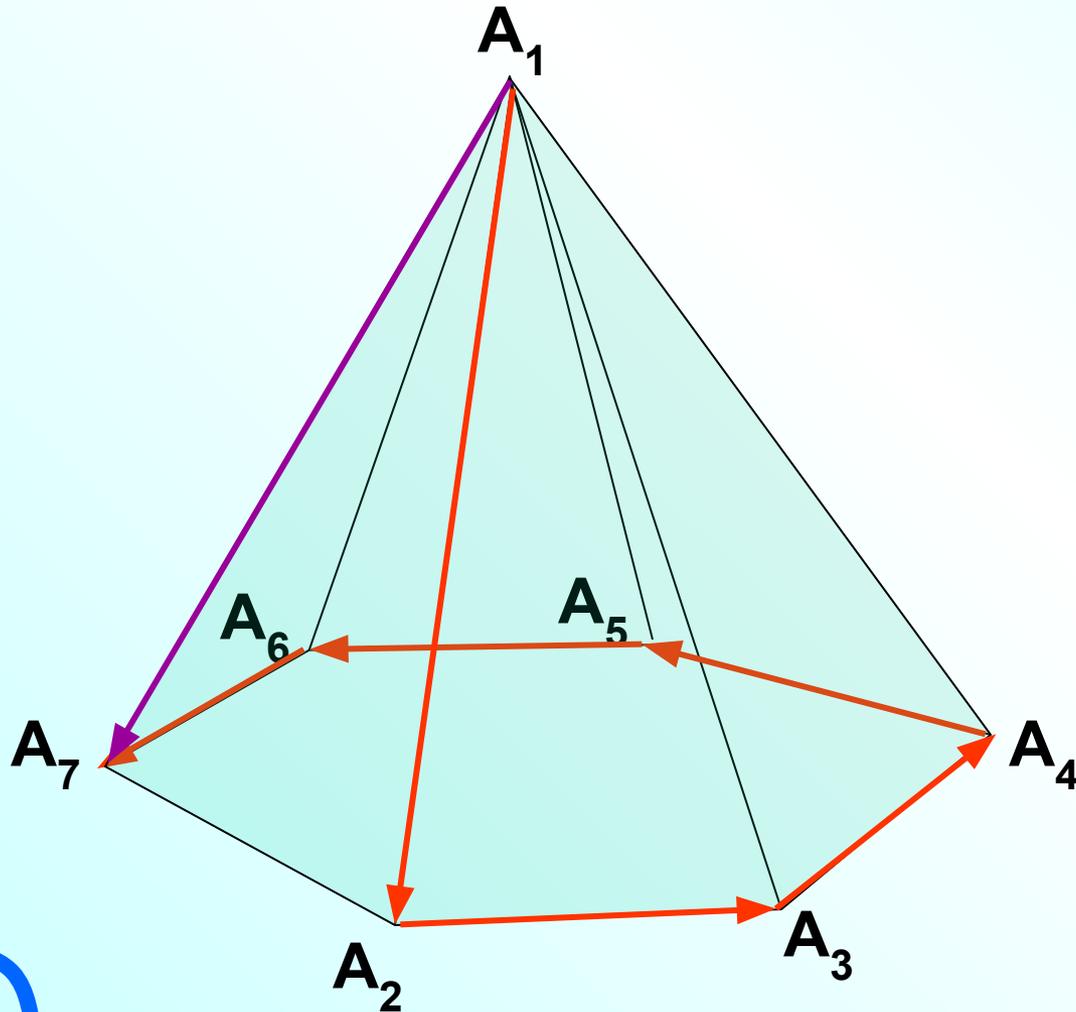
$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{AO}$$



# Сложение векторов.

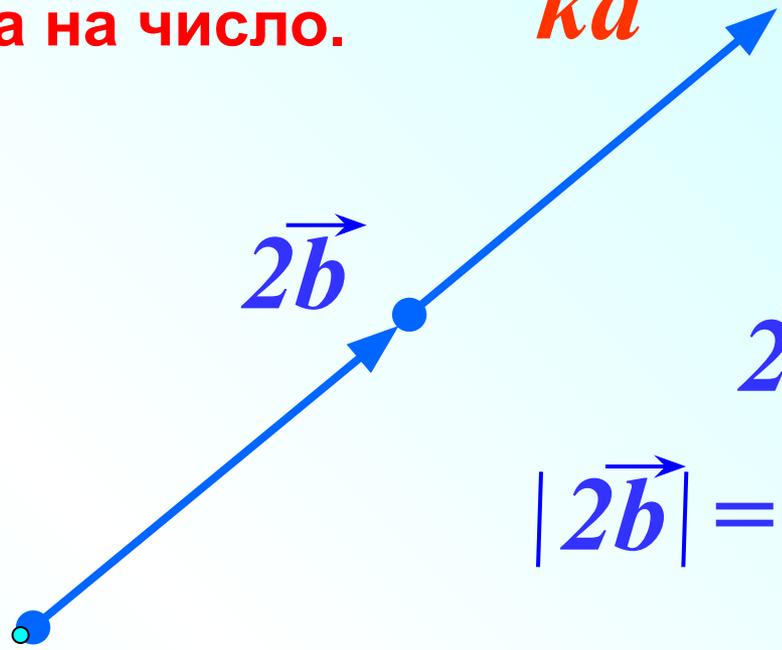
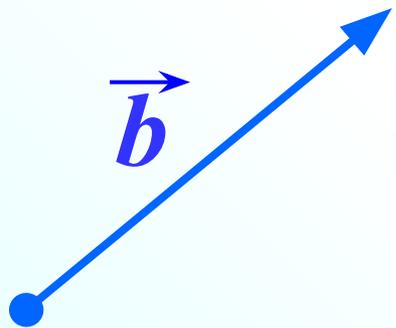
## Правило многоугольника.

$$\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \vec{A_3A_4} + \vec{A_4A_5} + \vec{A_5A_6} + \vec{A_6A_7} = \vec{A_1A_7}$$



Умножение вектора на число.

$k\vec{a}$



$$2\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

$$|2\vec{b}| = |2| \cdot |\vec{b}|$$



$$-\frac{1}{2}\vec{a} \updownarrow \vec{a}$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\left|-\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| \cdot |\vec{a}|$$

## Умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  называется такой вектор  $\vec{b}$ , длина которого равна  $|k| \cdot |\vec{a}|$ , причем векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены при  $k \geq 0$  и противоположно направлены при  $k < 0$ .

Для любого числа  $k$  и любого вектора  $\vec{a}$  векторы  $\vec{a}$  и  $k\vec{a}$  коллинеарны.

## Умножение вектора на число.

Произведение нулевого вектора на любое число считается нулевым вектор.  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор.  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Для любых  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и любых чисел  $k$ ,  $l$  справедливы равенства:

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a}) \quad \text{Сочетательный закон}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \quad \text{Первый распределительный закон}$$

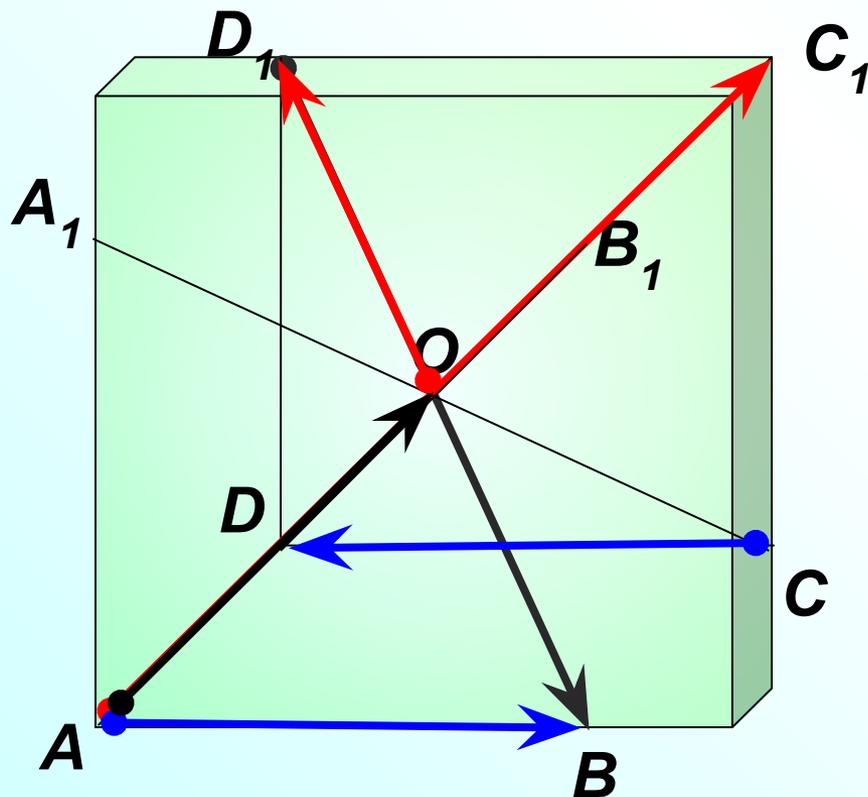
$$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \quad \text{Второй распределительный закон}$$

**№344** Диагонали куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите число  $k$  такое, чтобы равенства были верны.

$$\vec{AB} = -k \cdot \vec{CD}$$

$$\vec{AC_1} = k \cdot \vec{AO}$$

$$\vec{OD_1} = -\frac{k}{2} \cdot \vec{D_1 B}$$



Диагонали параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

пересекаются в точке  $O$ .

При каком значении  $k$

справедливо соотношение  $\vec{AB} + \vec{B_1 C_1} + \vec{CO} = k \vec{C_1 A}$

$$\vec{AB} + \vec{B_1 C_1} + \vec{CO} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CO} = \vec{AO} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{C_1 A}$$

