

A thick black L-shaped frame is positioned on the left and right sides of the page. The left part of the frame consists of a vertical line and a horizontal line at the top. The right part consists of a vertical line and a horizontal line at the bottom.

КИНЕМАТИКА

Решение задач

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Движение точки М задано уравнениями:

$$x = f_1(t) = 2 \cdot t$$

$$y = f_2(t) = t^2$$

x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки в момент времени

Движение точки, заданное координатным способом, происходит в плоскости Oxy .

Для определения уравнения траектории выразим время t из уравнения движения вдоль оси x .

$$t = \frac{x}{2} \geq 0$$

и подставив в уравнение движения по оси y , получим

$$y = \frac{x^2}{4}$$

Следовательно, траекторией точки является ветвь параболы (рисунок 1) при $x \geq 0$.

В момент времени $t = 1$ с точка находится в положении $M(2 \ 1)$

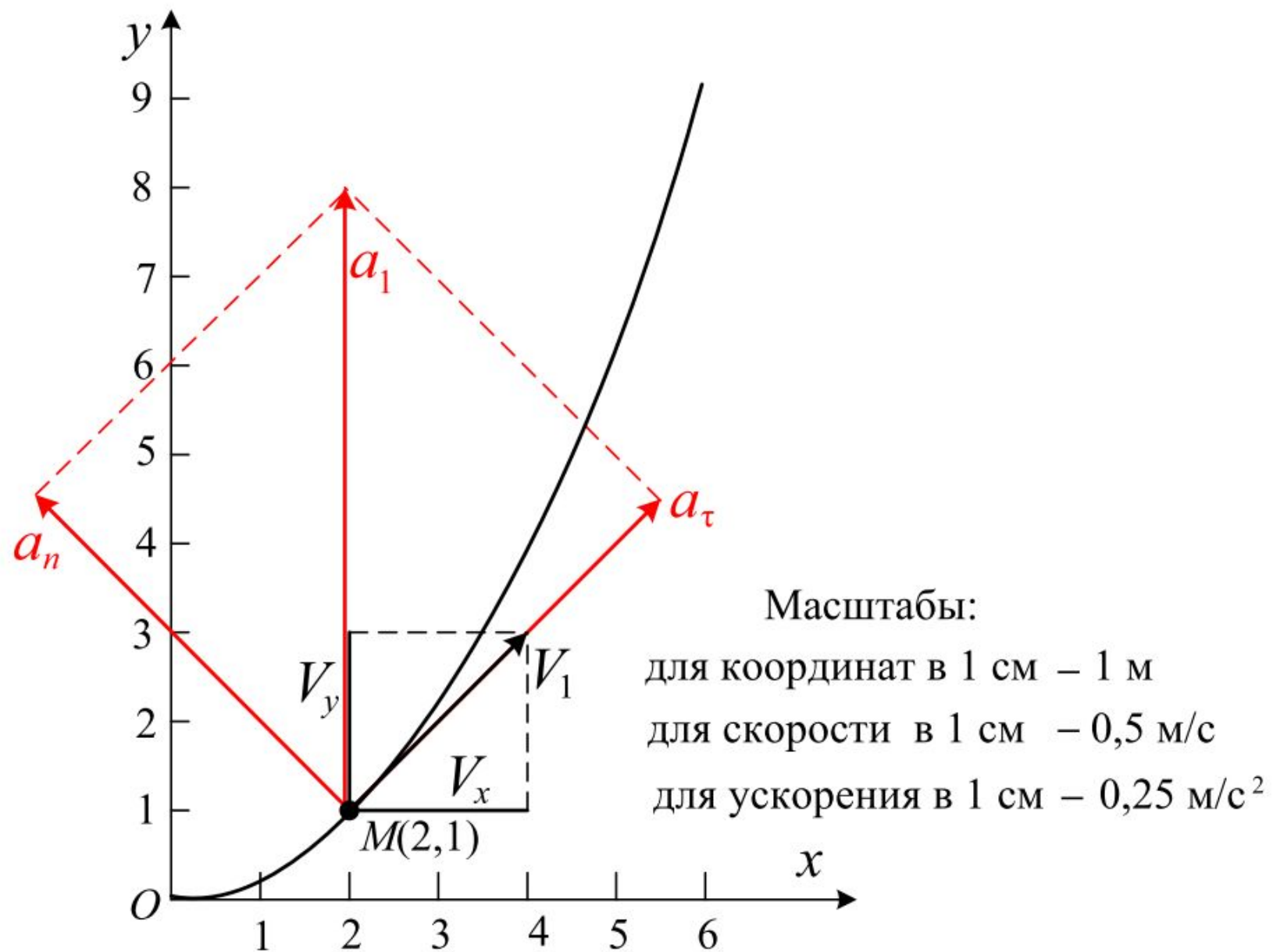


Рисунок 1

Вычислим проекции скорости и ускорения точки на декартовые оси при $t = 1$ с

$$M_x \in \frac{dx}{dt} = \frac{d(2 \cdot t)}{dt} = 2 \quad /$$

$$M_y \in \frac{dy}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2 \cdot t = 2 \cdot 1 = 2 \quad /$$

$$m_x \in \frac{dV_x}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0 \quad /^2$$

$$m_y \in \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(2 \cdot t)}{dt} = 2 \quad /^2$$

Тогда в декартовой системе координат векторы скорости и ускорения точки равны.

Найдем их модули.

$$M_1 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ / м} \quad c_1 = \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{2}{y}} = 2 \text{ /}$$

Определим направления векторов по формулам

$$\cos(\hat{\vec{V}}_1 \vec{i}) = \frac{V_x}{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos(\hat{V}_1^r \vec{j}^r) = \frac{V_y}{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\hat{\vec{a}}_1 \vec{i}) = \frac{a_x}{a_1} = 0 \quad \cos(\hat{a}_1^r \vec{j}^r) = \frac{a_y}{a_1} = 0$$

Следовательно, вектор скорости образует с осями Ox и Oy углы, равные 45° , а вектор ускорения точки M направлен вдоль оси Oy .

Поскольку точка M движется по кривой, то вектор её ускорения разложим на касательное ускорение и нормальное ускорение. Определим касательное ускорение точки в

$$a_\tau = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V} = \frac{0 + 4}{2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ м/с}^2$$

Вычислим нормальное ускорение точки в этот момент времени

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \text{ м/с}^2$$

Тогда в данном положении точки радиус кривизны траектории равен

$$\rho = \frac{V_1^2}{a_n} = \frac{(2 \cdot \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = 5,64 \text{ м} / \text{с}^2$$

ЗАДАЧА РЕШЕНА

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Точка В движется в плоскости ху. Закон движения точки задан уравнениями

$$x = f_1(t) = 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \quad y = f_2(t) = -4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

х и у выражены в сантиметрах, t – в секундах.
Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей

точке траектории

Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения времени t

$$x = 8 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$y = -4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$\left(x = 8 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)\right)^2$$

$$y = -4 \cdot (1 - \cos^2)\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$x^2 = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$y = -4 + 4 \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$x^2 = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$\frac{y + 4}{4} = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$x^2 = \frac{y + 4}{4}$$

$$x^2 \cdot 4 = y + 4$$

$$4 \cdot x^2 - 4 = y$$

Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(6 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right)' = -6 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{6 \cdot \pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = -\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$v_x = -\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) = 1,57 \quad /$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \left(-4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right)' = -4 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{-4 \cdot \pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$$

$$v_y = \frac{-4 \cdot \pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{3}\right) = -1,81 \quad /$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1,57^2 + (-1,81)^2} = 2,396 \approx 2,4 \quad /$$

Аналогично находим ускорение точки

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left(-\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right)' = -\frac{\pi^2}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$a_x = -\frac{\pi^2}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = -1,396 \approx -1,4 \quad / \quad ^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \left(\frac{-4 \cdot \pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \right)' = -\frac{2 \cdot \pi^2}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$$

$$a_y = -\frac{2 \cdot \pi^2}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{3}\right) = -1,095 \quad / \quad ^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-1,4)^2 + (1,095)^2} = 1,77 \text{ см} / \text{с}^2$$

Определяем касательное ускорение

$$a_{\tau} = \epsilon \frac{-1,57 \cdot 1,4 + 1,81 \cdot 1,095}{2,4} = -0,11 \quad / \quad ^2$$

Определяем нормальное ускорение

$$a_n = \epsilon \sqrt{a^2 - a_{\tau}^2} = \sqrt{1,77^2 - (-0,11)^2} = 1,766 \quad / \quad ^2$$

Определяем радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2,4^2}{1,766} = 3,262 \text{ см}$$

ЗАДАЧА РЕШЕНА