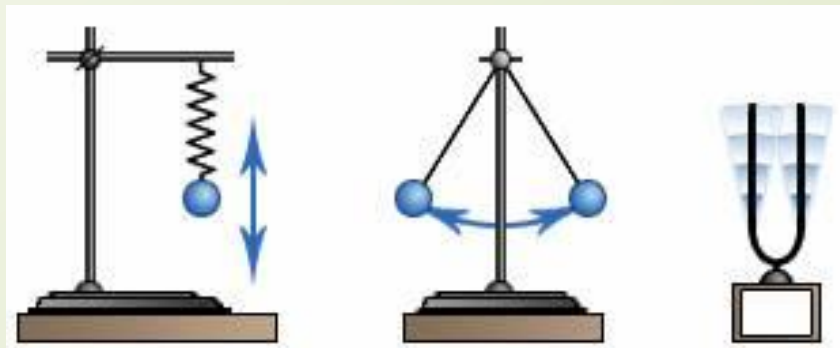
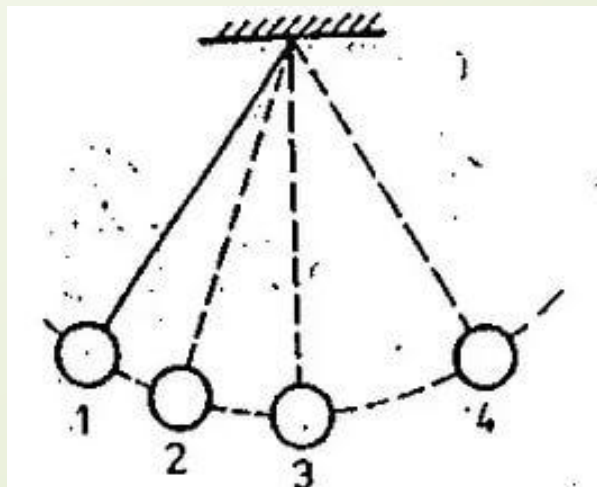
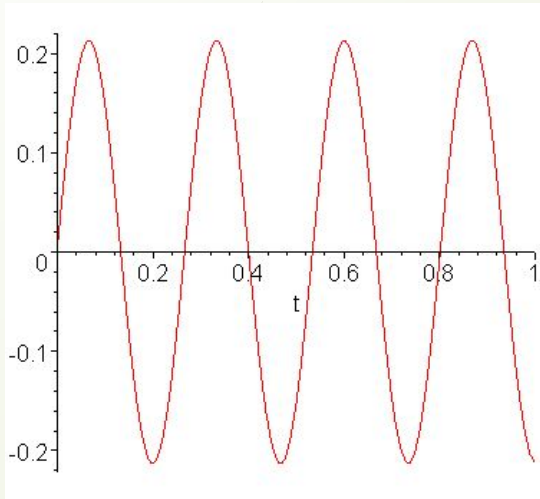


Колебания

- Колебания — это повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия. Например, при колебаниях маятника повторяются отклонения его в ту и другую сторону от вертикального положения; при колебаниях в электрическом колебательном контуре повторяются величина и направление тока, текущего через катушку.





□ Колебания почти всегда связаны с попеременным превращением энергии од ной формы проявления в другую форму. Колебания различной физической природы имеют много общих закономерностей и тесно взаимосвязаны с волнами. Поэтому исследованиями этих закономерностей занимается обобщённая теория колебаний и волн. Принципиальное отличие от волн: при колебаниях не происходит переноса энергии, это, так сказать, «местные» преобразования.



Виды колебаний



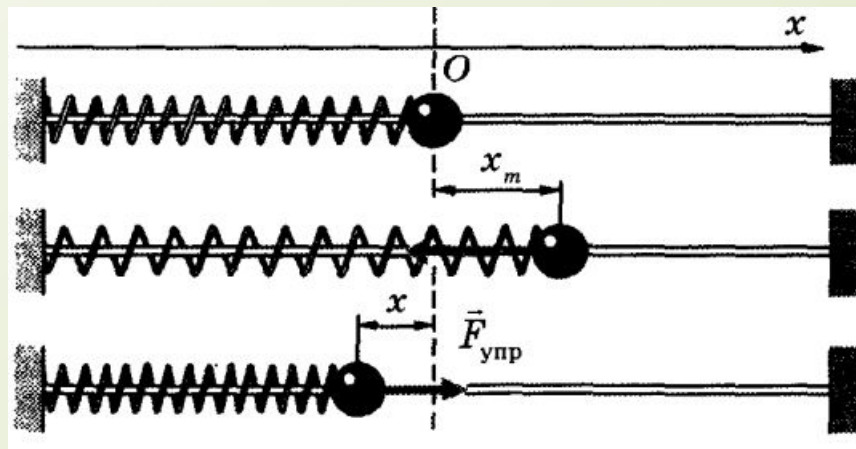
- Свободные
- Вынужденные
- Гармонические
- Резонанс
- Автоколебания
- Параметрические

Свободные колебания

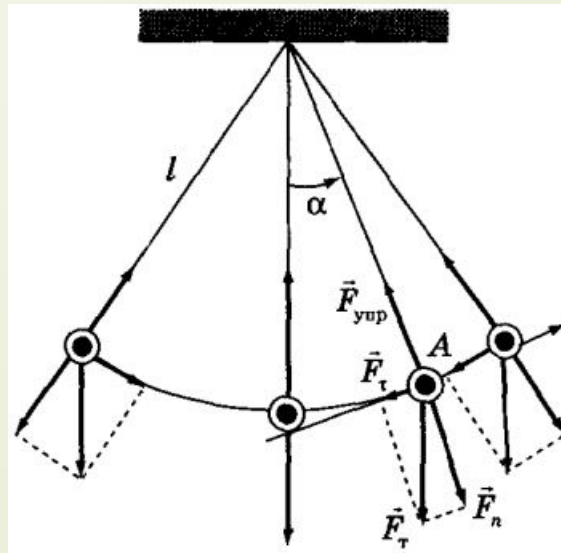
- **Свободные колебания (или собственные колебания)** — это колебания колебательной системы, совершаемые только благодаря первоначально сообщенной энергии (потенциальной или кинетической) при отсутствии внешних воздействий.
- Потенциальная или кинетическая энергия может быть сообщена, например, в механических системах через начальное смещение или начальную скорость.
- Свободно колеблющиеся тела всегда взаимодействуют с другими телами и вместе с ними образуют систему тел, которая называется **колебательной системой**.
- Силы, действующие между телами колебательной системы, называются **внутренними силами**. **Внешними силами** называются силы, действующие на систему со стороны тел, не входящих в нее. С этой точки зрения свободные колебания можно определить как колебания в системе под действием внутренних сил после того, как система выведена из положения равновесия.
- Условиями возникновения свободных колебаний являются:
- 1) возникновение в них силы, возвращающей систему в положение устойчивого равновесия, после того как ее вывели из этого состояния;
- 2) отсутствие трения в системе.



- Например, пружина, шарик и вертикальная стойка, к которой прикреплен верхний конец пружины (см. рис. ниже), входят в колебательную систему. Здесь шарик свободно скользит по струне (силы трения пренебрежимо малы). Если отвести шарик вправо и предоставить его самому себе, он будет совершать свободные колебания около положения равновесия (точки O) вследствие действия силы упругости пружины, направленной к положению равновесия.

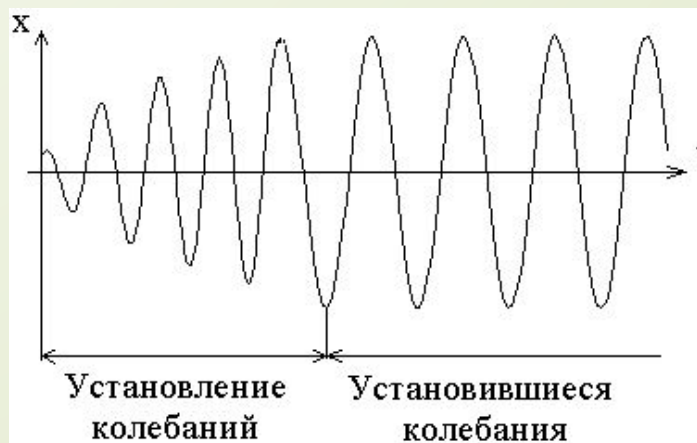


- Другим классическим примером механической колебательной системы является математический маятник (см. рис. ниже). В данном случае шарик совершает свободные колебания под действием двух сил: силы тяжести и силы упругости нити (в колебательную систему входит также Земля). Их равнодействующая направлена к положению равновесия.



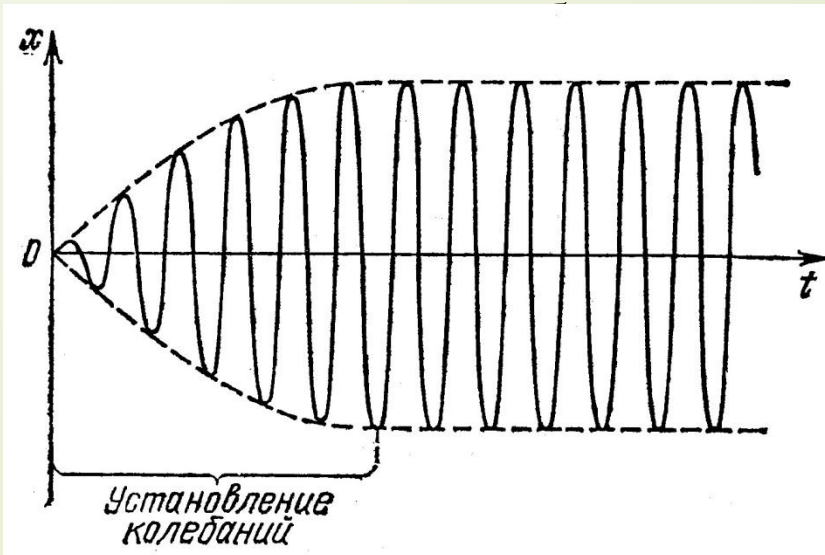
Вынужденные колебания

- *Вынужденными* называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы.
- Эта сила, как правило, выполняет двойную роль: она раскачивает систему и сообщает ей определенный запас энергии, а также она периодически восполняет потери энергии (расход энергии) на преодоление сил сопротивления и трения.
- Периодическая внешняя сила может изменяться во времени по различным законам. Особый интерес представляет случай, когда внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону с частотой ω , воздействует на колебательную систему, способную совершать собственные колебания на некоторой частоте ω_0 .
- Если свободные колебания происходят на частоте ω_0 , которая определяется параметрами системы, то **установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте ω внешней силы.**

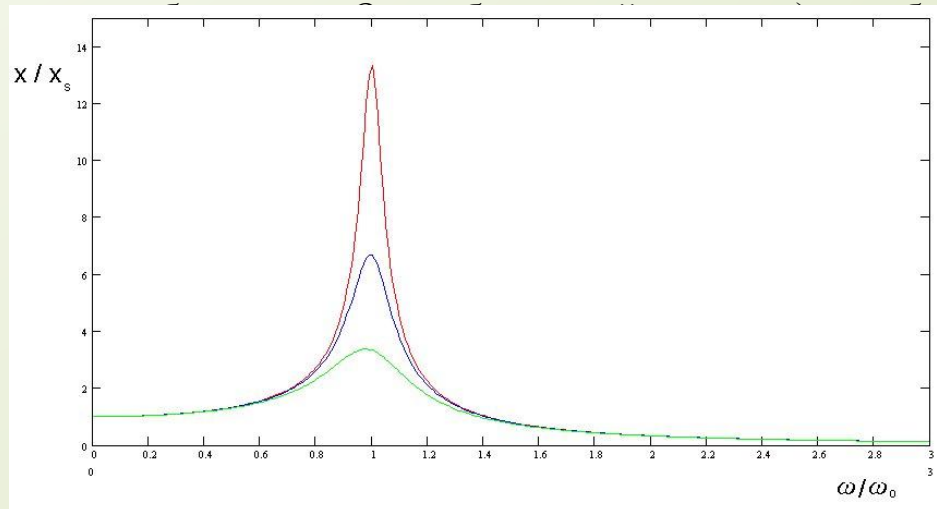


- После начала воздействия внешней силы на колебательную систему необходимо некоторое время Δt для установления вынужденных колебаний. Время установления по порядку величины равно времени затухания τ свободных колебаний в колебательной системе.
- В начальный момент в колебательной системе возбуждаются оба процесса – вынужденные колебания на частоте ω и свободные колебания на собственной частоте ω_0 . Но свободные колебания затухают из-за неизбежного наличия сил трения. Поэтому через некоторое время в колебательной системе остаются

е ω внешней



□ Если частота ω внешней силы приближается к собственной частоте ω_0 , возникает резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называется **резонансом**. Зависимость амплитуды x_m вынужденных колебаний от частоты ω вынуждающей силы называется **резонансной характеристикой** или **резонансной кривой**. При резонансе амплитуда x_m колебания груза может во много раз превосходить амплитуду y_m колебаний свободного (левого) конца пружины, вызванного внешним воздействием. В отсутствие трения амплитуда вынужденных колебаний при резонансе должна неограниченно возрастать. В реальных условиях амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется условием: работа внешней силы в течение периода колебаний должна равняться потерям механической энергии за то же время из-за трения. Чем меньше трение (т. е. чем выше



льше амплитуда

Гармонические колебания

- ➤ **Гармонические колебания** — это колебания, при которых физическая величина меняется во времени по синусоидальному закону:

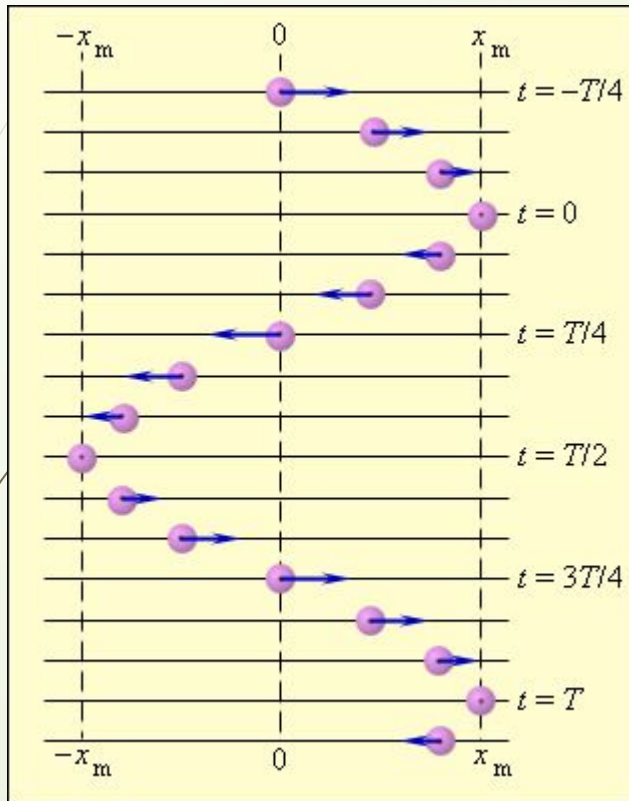
$$➤ x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

■ где x — значение колеблющейся величины в момент времени t , A — амплитуда, ω — круговая частота, φ — начальная фаза колебаний, $(\omega t + \varphi)$ — полная фаза колебаний. При этом величины A , ω и φ — постоянные.

■ Для механических колебаний колеблющейся величиной x являются, в частности, смещение и скорость, для электрических колебаний — напряжение и сила тока.

■ Гармонические колебания занимают особое место среди всех видов колебаний, т. к. это единственный тип колебаний, форма которых не искажается при прохождении через любую однородную среду, т. е. волны, распространяющиеся от источника гармонических колебаний, также будут гармоническими. Любое негармоническое колебание может быть представлено в виде сумм (интеграла) различных гармонических колебаний (в виде спектра гармонических колебаний).



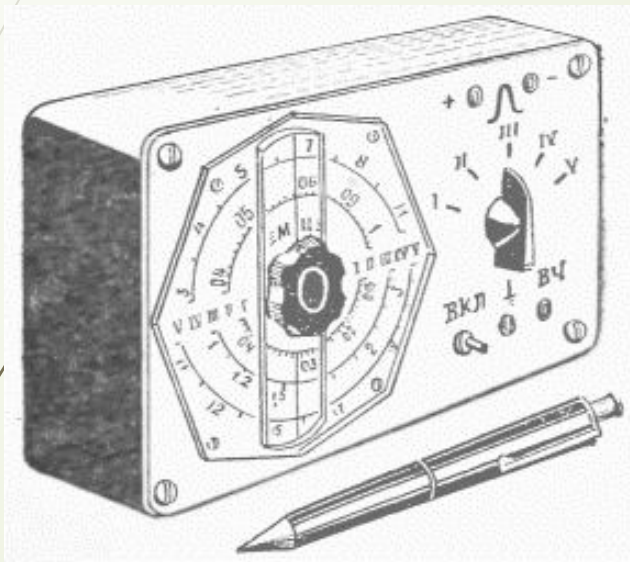


□ На рисунке изображены положения тела через одинаковые промежутки времени при гармонических колебаниях. Такую картину можно получить экспериментально при освещении колеблющегося тела короткими периодическими вспышками света (**стробоскопическое освещение**). Стрелки изображают векторы скорости тела в различные моменты времени.

Резонанс

- **Резонанс** — явление, при котором амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум при некотором значении частоты вынуждающей силы. Часто это значение близко к частоте собственных колебаний, фактически может совпадать, но это не всегда так и не является причиной резонанса.
- В результате резонанса при некоторой частоте вынуждающей силы колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие этой силы. Степень отзывчивости в теории колебаний описывается величиной, называемой добротностью. При помощи резонанса можно выделить и/или усилить даже весьма слабые периодические колебания.
- Явление резонанса впервые было описано Галилео Галилеем в 1602 г. в работах, посвященных исследованию маятников и музыкальных струн.

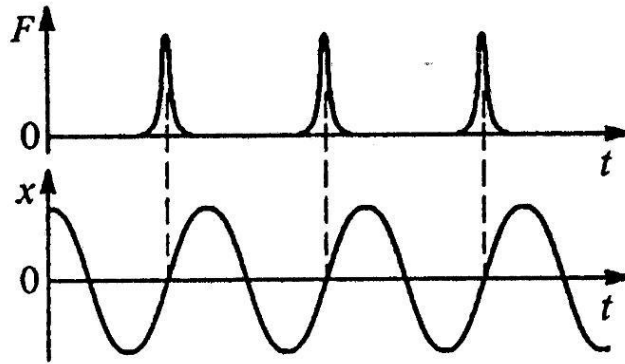




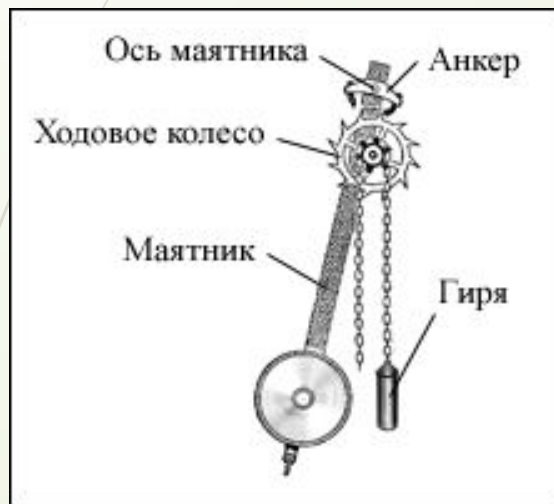
□ На явлении резонанса основано действие прибора, предназначенного для определения частоты переменного тока, сила которого изменяется по гармоническому закону. Такие приборы, носящие название язычковых частотомеров, обычно применяются для контроля постоянства частоты в электрической сети. Прибор состоит из набора упругих пластинок с грузиками на концах (язычков), причем массы грузиков и жесткости пластинок подобраны так, что частоты соседних язычков отличаются на одно и то же число герц.

Автоколебания

автоколебания



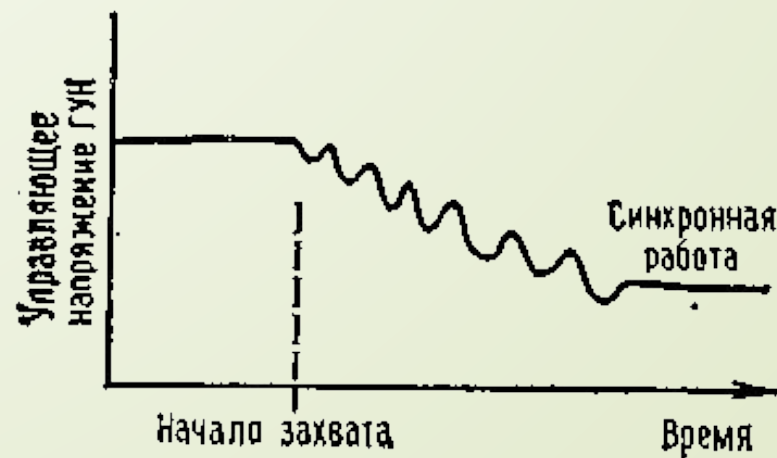
- Автоколебания — незатухающие колебания в диссипативной динамической системе с нелинейной обратной связью, поддерживающиеся за счёт энергии постоянного, то есть неперiodического внешнего воздействия.
- Автоколебания отличаются от вынужденных колебаний тем, что последние вызваны периодическим внешним воздействием и происходят с частотой этого воздействия, в то время как возникновение автоколебаний и их частота определяются внутренними свойствами самой автоколебательной системы. Термин автоколебания в русскоязычную терминологию введён А. А. Андроновым в 1928 году. Примерами автоколебаний могут служить:
 - незатухающие колебания маятника часов за счёт постоянного действия тяжести заводной гири, колебания скрипичной струны под воздействием равномерно движущегося смычка.

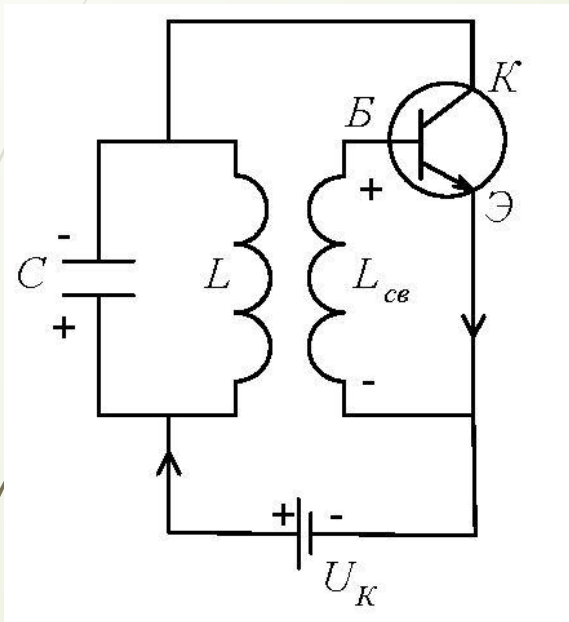


□ Как правило, чтобы автоколебательная система начала совершать постоянные автоколебания, её надо не просто вывести из состояния равновесия, а отклонить её от равновесного состояния на величину большую чем некоторая критическая амплитуда (или придать системе скорость большую, чем некоторая критическая скорость). После чего автоколебательная система начинает совершать незатухающие автоколебания и выйдет на некоторый свой стационарный режим автоколебаний. Если начальное отклонение системы меньше критического, то эти колебания затухают.

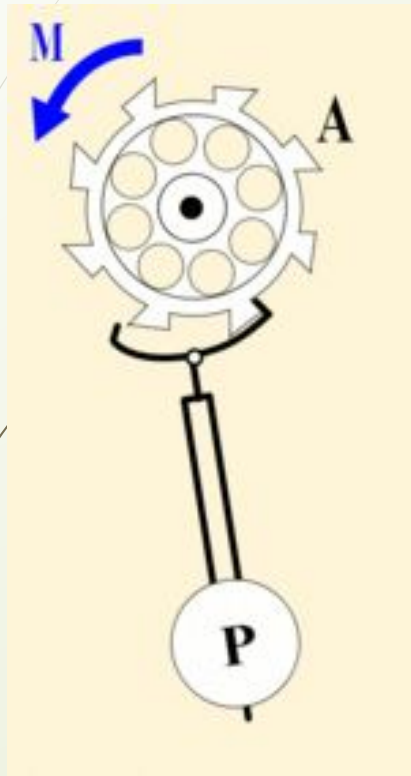
□ Автоколебательные системы, это всегда нелинейные системы
всегда системы с наличием трения.

- В автоколебательных системах также могут наблюдаться явления динамического хаоса.
- Для связанных автоколебательных систем характерны такие явления, как конкуренция частот и захват частоты. Впервые это явление заметили несколько столетий назад, когда несколько маятниковых часов, которые шли немного по разному (одни чуть отставали, другие чуть бежали вперед), поставили на один деревянный прилавок в магазине. Через несколько часов продавец заметил, что все часы начали идти с одинаковой скоростью. Поэтому, если у всех этих часов выставить одно и то же время, то теперь никто не будет отставать или бежать вперед.

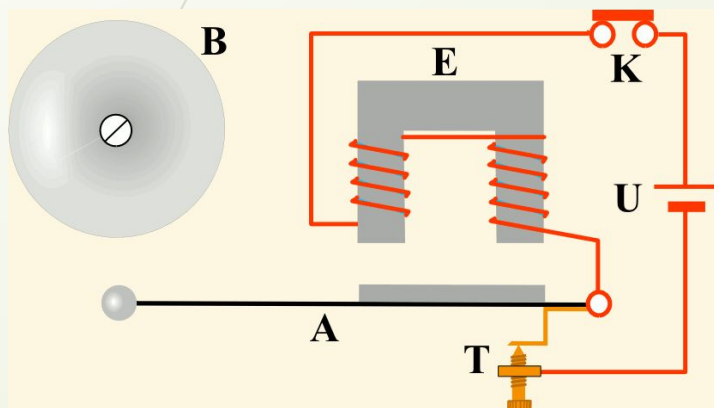




□ Автоколебания могут иметь различную природу: механическую, тепловую, электромагнитную, химическую. Механизм возникновения и поддержания автоколебаний в разных системах может основываться на разных законах физики или химии. Для точного количественного описания автоколебаний разных систем может потребоваться разный математический аппарат. Тем не менее, можно представить схему, общую для всех автоколебательных систем, качественно описывающую этот механизм.

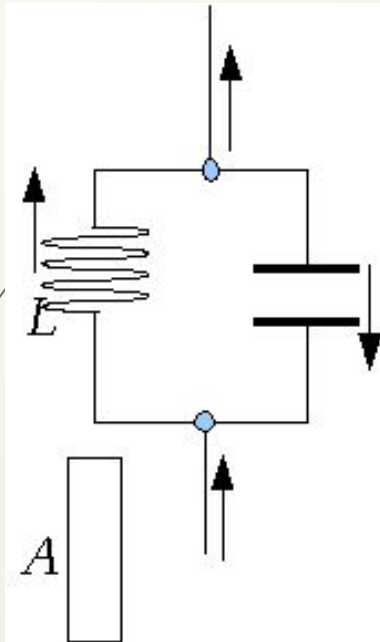


- Если колеблющийся элемент системы способен к собственным затухающим колебаниям, автоколебания устанавливаются на частоте, близкой к резонансной для этого осциллятора, их форма становится близкой к гармонической, а амплитуда, в некотором диапазоне значений, тем больше, чем больше величина постоянного внешнего воздействия.
- Примером такого рода системы может служить храповой механизм маятниковых часов, схема которого представлена на рисунке. На ось храпового колеса А (которое в этой системе выполняет функцию нелинейного регулятора) действует постоянный момент силы М, передающийся через зубчатую передачу от заводной пружины или от гири. При вращении колеса А его зубцы сообщают кратковременные импульсы силы маятнику Р (осциллятору), благодаря которым его колебания не затухают. Кинематика механизма играет роль обратной связи в системе, синхронизируя вращение колеса с колебаниями маятника таким образом, что за полный период колебания колесо поворачивается на угол



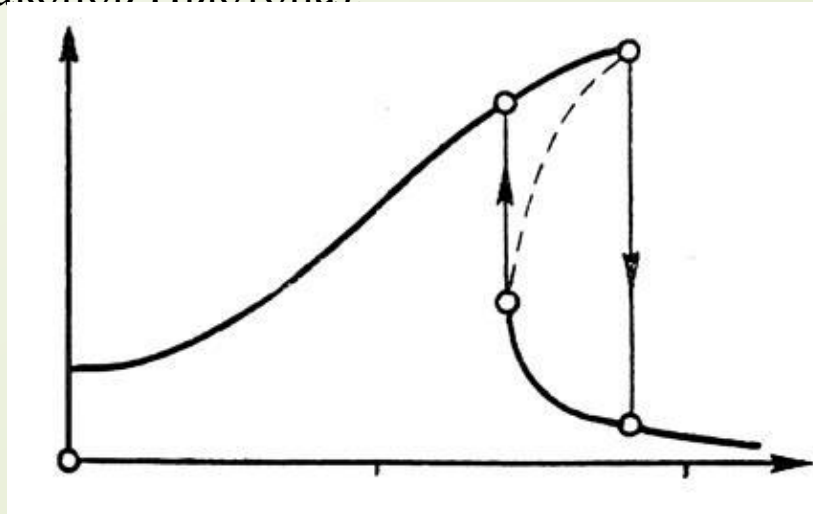
- Автоколебательные системы, не содержащие гармонических осцилляторов, называются *релаксационными*. Колебания в них могут сильно отличаться от гармонических, и иметь прямоугольную, треугольную или трапецеидальную форму. Амплитуда и период релаксационных автоколебаний определяются соотношением величины постоянного воздействия и характеристик инерционности и диссипации системы.
- Простейшим примером релаксационных автоколебаний может служить работа электрического звонка, изображённого на рисунке. Источником постоянного (непериодического) воздействия здесь является электрическая батарея U ; роль нелинейного регулятора выполняет прерыватель T , замыкающий и размыкающий электрическую цепь, в результате чего в ней возникает прерывистый ток; колеблющимися элементами являются магнитное поле, периодически наводимое в сердечнике электромагнита E , и якорь A , движущийся под воздействием переменного магнитного поля. Колебания якоря приводят в действие прерыватель, что и образует обратную связь. Инерционность этой системы определяется двумя различными физическими величинами: моментом инерции якоря A и индуктивностью обмотки электромагнита E . Увеличение любого из этих параметров приводит к увеличению периода автоколебаний.

Молоток Маклакова

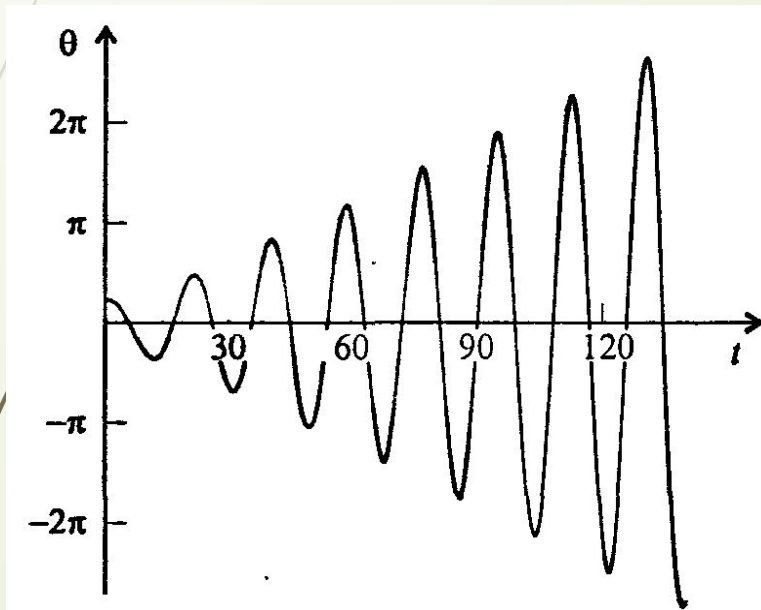


- ❑ Молоток, совершающий удары за счёт энергии электрической цепи переменного тока с частотой, во много раз меньшей частоты тока в цепи.
- ❑ Катушка L колебательного контура помещается над столом. Снизу в неё входит железная трубка, нижний конец которой является ударной частью молотка. Параметры колебательного контура такие, что собственная частота его колебаний совпадает с частотой тока в цепи.
- ❑ После включения тока и установления колебаний наблюдается резонанс токов контура и внешней цепи, и железная трубка втягивается в катушку. Индуктивность катушки растёт, колебательный контур выходит из резонанса, а амплитуда колебаний тока в катушке уменьшается. Поэтому трубка возвращается в исходное положение - вне катушки - под действием силы тяжести. Затем колебания тока внутри контура начинают нарастать, и снова наступает резонанс: трубка опять втягивается в катушку. Трубка совершает **автоколебания**, т. е. периодические движения вверх и вниз, и при этом громко стучит по столу, подобно молотку. Период этих механических автоколебаний в десятки раз превосходит период переменного тока, поддерживающего их.

- В сильно нелинейных колебательных системах с двумя и более степенями свободы может происходить стохастизация колебаний. Для внешнего наблюдателя такая хаотизация свободных колебаний выглядит так, словно система совершает некоторые случайные движения. Разного рода автокорреляционные функции и коэффициенты корреляций такого движения могут ничем не отличаться от действительно хаотического движения под действием случайных внешних сил. Хотя вся система является замкнутой и движется под действием строгих динамических законов (например, в механике под действием строгих законов Ньютона)



Параметрические колебания



- Параметрические колебания — это колебания, возникающие в присутствии изменяющихся во времени параметров.
- Данные колебания являются особым классом сил, которые в явном виде зависят от координат и времени одновременно, причём эти силы нельзя представить в виде некой суммы величин отдельно зависящих от координат и отдельных величин, зависящих только от времени. Параметрические колебания, как правило, либо происходят с фиксированными амплитудами, либо амплитуды увеличиваются во времени. Вторая ситуация получила название параметрического резонанса.

Параметрические колебания имеют вид:

$$Q_j = Q_j(q_1, q_2, \dots, q_s, t), j = 1, 2, 3 \dots s$$

В простейшем случае, для системы с одной степенью свободы для малых отклонений от положения равновесия обобщённая сила такого типа определяется уравнением:

$$Q = -kq = -k(t)q,$$

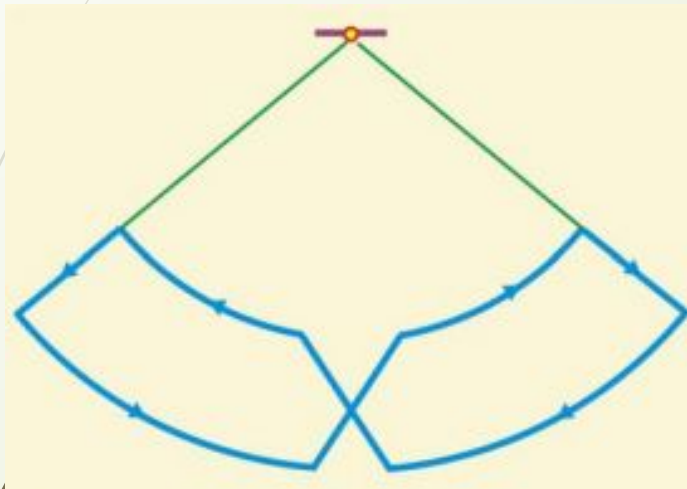
где $k(t)$ – коэффициент упругости, зависящей от времени. В этом случае дифференциальное уравнение движения представится в виде:

$$\tilde{m} \ddot{q} + k(t)q = 0$$

Где $\tilde{m}$ – обобщённая масса. Поделим предыдущее уравнение на обобщённую массу

$$\ddot{q} + \frac{k(t)}{\tilde{m}} q = \ddot{q} + \psi(t)q = 0$$

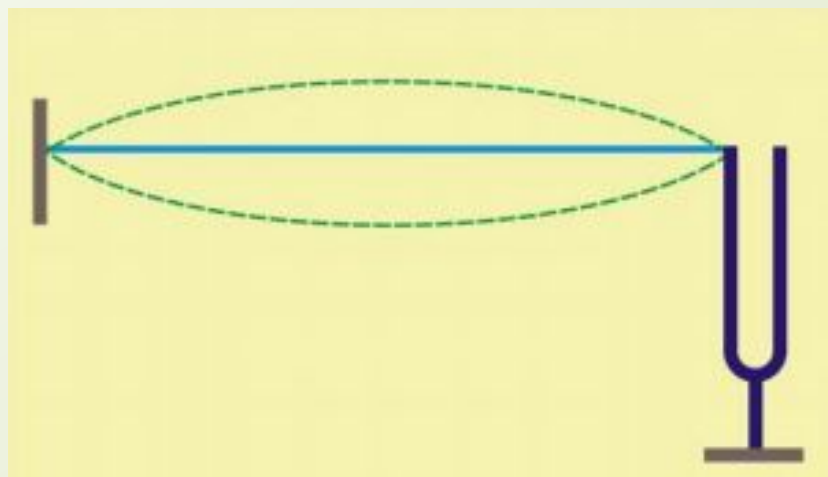
где $\psi(t)$ – переменный коэффициент.



- Параметрические колебания характеризуются тем, что энергия поступает в систему за счёт изменения какого-либо параметра, при условии совершения работы. Эффект параметрического возбуждения колебаний наблюдается только в тех случаях когда изменение параметра имеет определённую частоту и должным образом фазировано относительно движения системы. Простейшим примером параметрической колебательной системы являются качели. Для того чтобы увеличить амплитуду колебаний качающемуся достаточно «правильно» поднимать и опускать свой центр тяжести, приседая и вставая. Достаточно присесть в крайних положениях и вставать, когда проходится нижнее положение статического равновесия. Центр тяжести при этом опишет траекторию, показанную на рисунке.



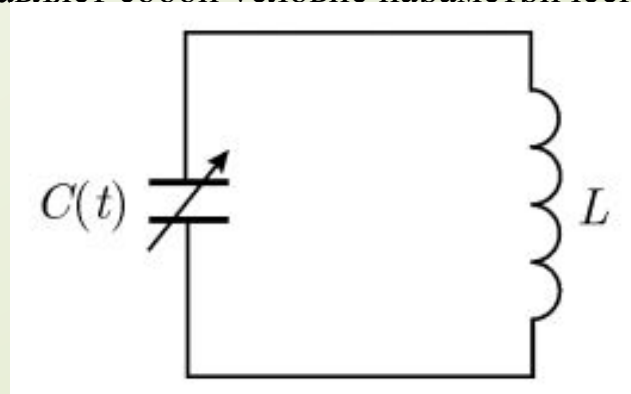
Другим классическим примером параметрических колебаний является знаменитый опыт, поставленный профессором Мельде в 1859 г. Натянутая струна одним концом крепилась к неподвижной горизонтальной опоре, а вторым концом к ножке камертона. При колебаниях камертона струна периодически изменяла своё натяжение в соответствии с собственной частотой колебаний камертона. В струне возникали параметрические колебания, при которых периодически изменяемым параметром является натяжение струны.



- Рассмотрим простую модельную систему: колебательный контур с переменной емкостью, где мгновенные значения заряда и напряжения на емкости будут связаны соотношением $q(t)=C(t)u(t)$. В моменты времени, когда заряд на конденсаторе максимален, пластины резко раздвигаются. При этом емкость уменьшается от некоторого значения A до значения B . В моменты времени, когда заряд равен нулю, пластины так же резко сдвигаются; емкость при этом увеличивается, а напряжение остается равным нулю. В таком процессе постоянно совершается работа, которая идет на увеличение энергии колебаний. За один период приращение энергии составит
- (необходимо учесть, что в течение периода пластины раздвигаются дважды)
- $$\Delta W = 2(W_1 - W_2) = C_1 V_1^2 - C_2 V_2^2$$

- Из приведенных выше рассуждений следует, что для эффективного поступления энергии в систему период колебаний T и период изменения параметра T_0 должны быть связаны соотношением
- $$T \approx \pi T_0 / 2$$

которое представляет собой условие параметрического резонанса.



- 
- Можно, однако, раздвигать пластины не каждый раз, когда заряд на конденсаторе максимален, а через раз; энергия все равно будет поступать в систему, хотя и в меньшем количестве. Более того, очевидно, что это можно делать в общем случае только в каждый n -ный благоприятный момент. Таким образом, имеется, вообще говоря, бесконечное число параметрических резонансов, условия которых имеют вид

$$T \approx nT_0 / 2$$

- Число будем называть порядком резонанса, а резонанс при 1 — основным. $n = 1, 2, \dots$ При выполнении условий резонанса колебания в линейной системе, как можно видеть на рис. 16.2, неограниченно нарастают. Это явление называется параметрической неустойчивостью.
- 