



ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ
естественных наук
при Саратовском государственном аграрном
университете им. Н.И. Вавилова

Лекция по алгебре. Тема: логарифмические неравенства.

Преподаватель математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

Определение:

Неравенства, содержащие переменную под знаком логарифма, называются логарифмическими.

Наприм

ер:

$$1) \log_5 x > -2; \quad 2) \lg(x^2 + 5) < \sqrt{5};$$

$$3) \ln(x^3 - 1) \leq \pi ; \quad 4) \log_{(-x^2 + x - 6)} 25 \geq -2$$

I. Типы простейших логарифмических неравенств

Неравенства вида

$$1) \log_a x > b \quad \text{или} \quad \log_a x < b$$

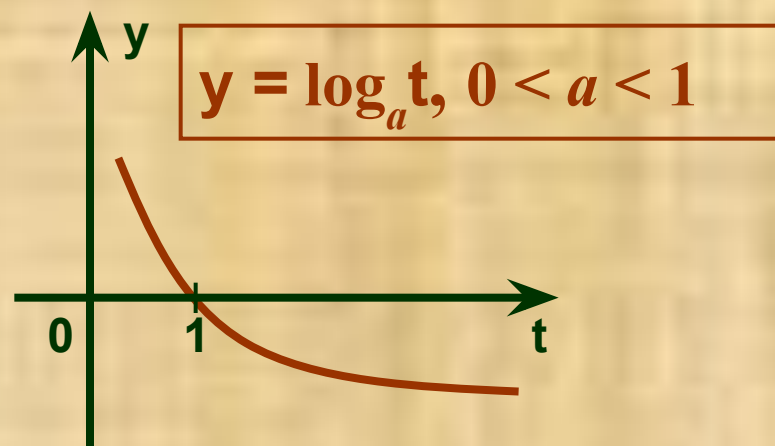
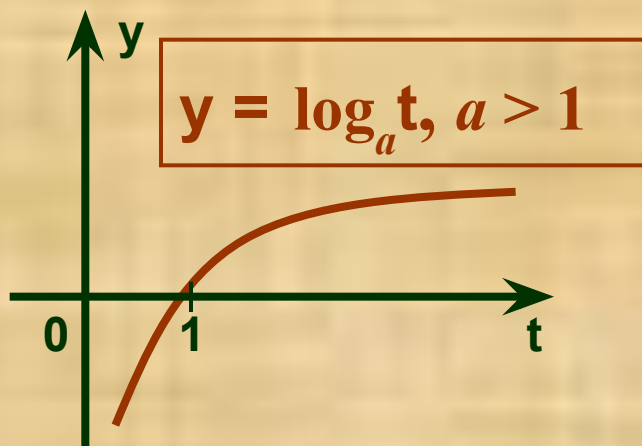
называются простейшими логарифмическими неравенствами

Неравенства можно переписать

$$\log_a x > \log_a a^b \quad \text{или} \quad \log_a x < \log_a a^b$$

Решение логарифмических неравенств
основано на свойстве монотонности

функции $y = \log_a t$: при $a > 1$
логарифмическая функция возрастает и
при $0 < a < 1$ убывает.



Методы решения логарифмических неравенств.

I) Неравенство вида $\log_a f(x) > c$ (или $< c$).

$$\log_a f(x) > c,$$

$$\log_a f(x) > c \cdot \log_a a,$$

$$\log_a f(x) > \log_a a^c.$$

Если $a > 1$, то

функция $y = \log_a t$

возрастает на $\mathbb{R}_+$ и

неравенство $\log_a f(x) > c$

равносильно системе

$$a > 1$$

$f(x) > 0$ – это ОДЗ

$f(x) > a^c$ – это монотонность

или

$$f(x) > a^c$$

Пример. Решить неравенство

$$\log_7(4x + 1) \geq 2$$

Решение.

$$\log_7(4x + 1) \geq \log_7 49$$

Так как ($a = 7 > 1$)

$$\begin{cases} 4x + 1 > 0 - \text{это ОДЗ} \\ 4x + 1 \geq 49 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4x + 1 &\geq 49, \\ x &\geq 12 \end{aligned}$$

Ответ: $x \geq 12$.

2) Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a t$ убывает на R_+ и неравенство $\log_a f(x) > c$ равносильно системе

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \text{ – это ОДЗ} \\ f(x) < a^c \text{ – это монотонность} \end{array} \right.$$

Систему в этом случае упростить нельзя.

Пример. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(1 - x) > 2$$

Решение.

$$\log_{1/2}(1 - x) > \log_{1/2}(1/4)$$

$$\begin{cases} 1 - x > 0 - \text{это ОДЗ} \\ 1 - x < 1/4 \quad (a = 1/2 < 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x > 3/4 \end{cases}$$

$$3/4 < x < 1$$

Ответ: (0,75; 1) .

**I I. Неравенство вида $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$
или $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$.**

**1) Если $a > 1$, то функция $y = \log_a t$
возрастает на R_+ и неравенство
 $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ равносильно системе**

$$\left[\begin{array}{l|l} f(x) > 0 & \\ \varphi(x) > 0 & \\ f(x) > \varphi(x) & \text{— это монотонность} \end{array} \right] \text{— это ОДЗ} \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > \varphi(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{array} \right]$$

Пример. Решить неравенство

$$\lg x^2 > \lg(5x - 4)$$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} x^2 > 0 \\ 5x - 4 > 0 \\ x^2 > 5x - 4 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} - \text{это ОДЗ} \\ (a = 10 > 1) \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 > 5x - 4 \\ 5x - 4 > 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x - 1)(x - 4) > 0 \\ x > 4/5 \end{array} \right.$$



Ответ: $(0,8;1) \cup (4;\infty)$.

I I. Неравенство вида $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ или $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$.

2) Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a t$ убывает на R_+ и неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ равносильно системе

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) < \varphi(x) \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{– это ОДЗ} \\ \\ \text{– это монотонность} \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} \varphi(x) > f(x) \\ f(x) > 0 \end{array} \right]$$

Пример. Решить неравенство

$$\log_{1/3}(3x - 4) \geq \log_{1/3}(x^2 - 2)$$

Решение.

$$\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \\ 3x - 4 \leq x^2 - 2 \quad (a = 1/3 < 1) \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{-- это ОДЗ} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x^2 - 2 \geq 3x - 4 \\ 3x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 2) \geq 0 \\ x > 4/3 \end{cases}$$



Ответ: $[2; \infty)$.

Простейшие логарифмические неравенства.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} \log_a f(x) > 0, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a 1, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ a > 1 \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} \log_a f(x) > 0, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a 1, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ 3) \quad & \begin{cases} \log_a f(x) < 0, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a f(x) < \log_a 1, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ a > 1 \end{cases} \\ 4) \quad & \begin{cases} \log_a f(x) < 0, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a f(x) < \log_a 1, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

III) Неравенства, требующие предварительных преобразований.

- 1) Находят **ОДЗ** неравенства.
- 2) Преобразуют неравенство к виду I или II и решают полученное неравенство, используя свойство монотонности.
- 3) Находят пересечение множества решений с **ОДЗ** неравенства и записывают ответ.

Пример. Решить неравенство

$$\log_2(x-1) + \log_2 x \leq 1$$

Решение. 1) ОДЗ :

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x > 1$$

2)

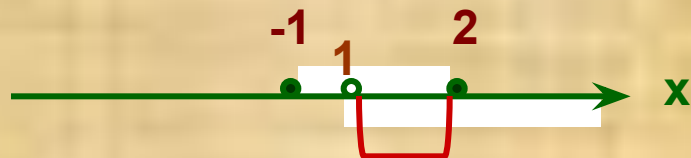
$$\log_2(x-1) \cdot x \leq \log_2 2$$

$$a = 2 > 1$$

$$x^2 - x \leq 2, (x+1)(x-2) \leq 0$$



3) Пересечение множества решений с ОДЗ.



Ответ: $(1; 2]$.

III. Метод замены переменной в логарифмическом неравенстве.

Пример. Решить неравенство $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$

Решение. Пусть $\lg x = t$, t – любое число, тогда неравенство примет вид $\frac{t^2 - 3t + 3}{t - 1} - 1 < 0$

$$\frac{t^2 - 4t + 4}{t - 1} < 0$$

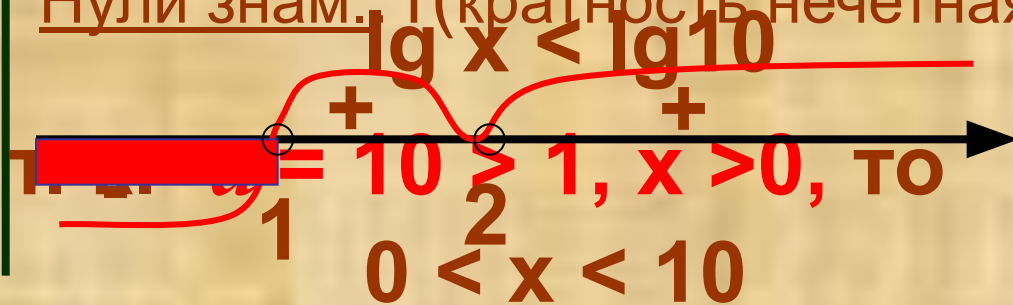
$$\frac{(t - 2)^2}{t - 1} < 0$$

$$t < 1$$

Отсюда имеем

Нули числителя: 2 (кратность четная)

Нули знамен.: 1 (кратность нечетная)



Ответ: $(0; 10)$

IV. Решение логарифмических неравенств, содержащих переменную в основании логарифма

Теорема 1. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

1) неравенство $\log_a b > \log_a c$ равносильно неравенству

$$(a - 1)(b - c) > 0;$$

2) неравенство $\log_a b \geq \log_a c$ равносильно неравенству

$$(a - 1)(b - c) \geq 0;$$

3) неравенство $\log_a b < \log_a c$ равносильно неравенству

$$(a - 1)(b - c) < 0;$$

4) неравенство $\log_a b \leq \log_a c$ равносильно неравенству

$$(a - 1)(b - c) \leq 0;$$

Замечание- соглашение.

Для упрощения записей целесообразно
ввести символ $\odot$,

понимая, что там, где стоит этот символ,
должен стоять один из знаков $\geq, \leq, >$ либо $<$.

Тогда теорема 1 может быть
сформулирована более коротко: при всех
допустимых значениях a, b и c неравенство

$\log_a b \odot \log_a c$ равносильно $(a-1)(b-c) \odot 0$.

Если в процессе решения смысл неравенства
должен измениться, то пишется символ $\wedge$.

Пример Решите неравенство

1.

$$\log_{x+7}(2x^2-6x+8)$$

$$\leq \log_{x+7}(x^2+x-2)$$

Решение: $\log_{x+7}(2x^2-6x+8) \leq \log_{x+7}(x^2+x-2) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x+7-1)(2x^2-6x+8-x^2-x+2) \leq 0, \\ x+7 > 0, x+7 \neq 1, \\ 2x^2-6x+8 > 0, \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x^2-7x+10) \leq 0, \\ x > -7, x \neq -6, \\ x^2-3x+4 > 0, \\ (x+2)(x-1) > 0 \end{cases}$$

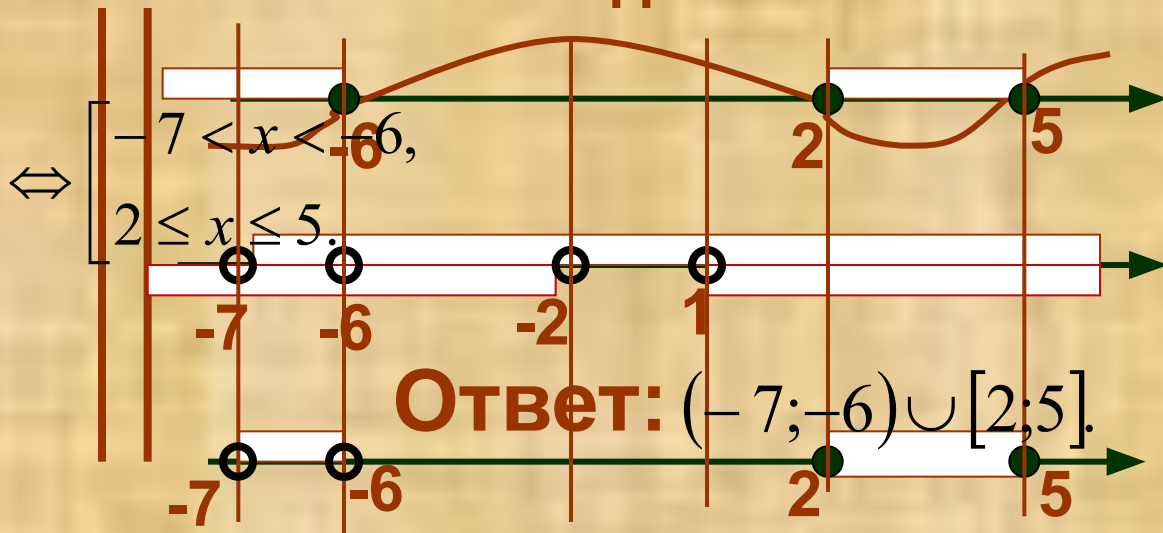
$$x^2-3x+4 > 0$$

Так как $D < 0$, то

$$x^2-3x+4 > 0$$

на $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-5)(x-2) \leq 0, \\ x > -7, x \neq -6, \\ (x+2)(x-1) > 0 \end{cases}$$



Ответ: $(-7; -6) \cup [2; 5]$

Следствие 1. При допустимых значениях a, b и c неравенство $\log_a b - \log_a c \geq 0$

равносильно неравенству $(a-1)(b-c) \geq 0$

Следствие 2. При допустимых значениях a и b

неравенство $\log_a b \geq 0$ равносильно

неравенству $(a-1)(b-1) \geq 0$

Пример.

Решите неравенство

$$\log_{10-x}(x^2-5x+6) - \log_{10-x}(2x-4) \geq 0.$$

Решение:

$$\begin{cases} (10-x-1)(x^2-5x+6-2x+4) \geq 0, \\ 10-x > 0, \quad 10-x \neq 1, \\ x^2-5x+6 > 0, \\ 2x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-9)(x-2)(x-5) \leq 0, \\ x < 10, \quad x \neq 9, \\ (x-2)(x-3) > 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-9)(x-5)(x-2) \leq 0, \\ 3 < x < 10, \quad x \neq 9, \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 9$$

Ответ: $[5; 9)$

1. Решите неравенство:

$$(x^2 - 2x - 8) \log_{x+5} (2x + 7) < 0.$$

$$\text{Ответ: } (-4; -3) \cup (-2; 4).$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_x (x - 3) - \log_x (9 - x)}{\log_{x-1} x} < 0.$$

$$\text{Ответ: } (3; 6)$$

Теорема 2.

При допустимых значениях a, b, c, d неравенство $\log_a b \cdot \log_c d \geq 0$ равносильно неравенству

$$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \geq 0$$

Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \log_{x-2}(x^2+1) \leq 0$.

Решение:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{x}{x+1}-1\right)(x-3)(x^2+1-1) \leq 0, \\ \frac{1}{x} > 0, x \neq 1, \\ \frac{x}{x+1} > 0, \\ x-2 > 0, x-2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{x} \cdot \frac{-1}{x+1}(x-3)x^2 \leq 0, \\ x > 0, x \neq 1, \\ x+1 > 0, \\ x > 2, x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)(x-3)}{x^3(x+1)} \leq 0, \\ x > 2, \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Ответ: $(2;3)$.

Теорема 3.

При допустимых значениях a, b, c неравенство $\log_a b - \log_c b \text{ (v) } 0$ равносильно неравенству $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) \text{ (v) } 0$.

Решите неравенство: $\log_x(x-1) - \log_{x+1}(x-1) < 0$.

Решение:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-1-1)(x+1-1)(x+1-x) < 0, \\ x > 0, \quad x \neq 1, \\ x-1 > 0, \\ x+1 > 0, x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)(x-2) < 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $(1; 2)$.



- 1) Разобрать приёмы решений логарифмических уравнений и неравенств по лекции.
- 2) Никольский 10 кл.
 - I. № 6.33 – 6. 34, 6.37(а, б), 6.38(а),6.41(а,г)
 - II. № 6.37(а, б), 6. 39(в, г), 6.41(б, в), 6.42(в, г).