

Бинарные отношения

- Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество $R \subseteq A \times B$.
- Если множества A и B совпадают $A=B$, то R называют бинарным отношением на множестве A . (однородное отношение)
- Если $(x, y) \in R$, то это обозначают еще xRy и говорят, что между элементами x и y установлено бинарное отношение R .
- n -местным (n -арным) отношением, заданным на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, называется подмножество прямого произведения этих множеств.
- Иногда понятие отношения определяется только для частного случая $M=M_1=M_2=\dots=M_n$.

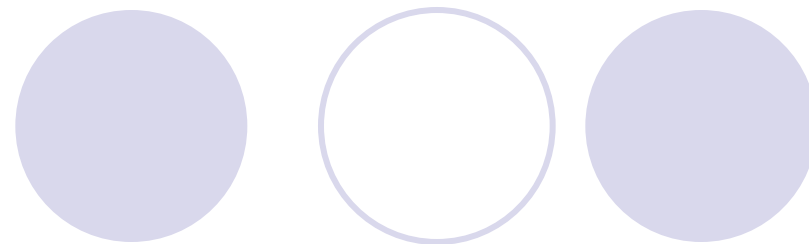
Примеры

- Отношение $a = \{(4, 4), (3, 3), (2, 2), (4, 2)\}$ на множестве $X = \{4, 3, 2\}$ можно определить как свойство "Делится" на этом подмножестве целых чисел.
- Из школьного курса
 - На множестве целых чисел Z отношения "делится", "делит", "равно", "больше", "меньше", "взаимно просты";
 - на множестве прямых пространства отношения "параллельны", "взаимно перпендикулярны", "скрещиваются", "пересекаются", "совпадают";
 - на множестве окружностей плоскости "пересекаются", "касаются", "концентричны".

Пример

- Пусть $A=B=\mathbf{R}$, пара (x, y) является точкой вещественной плоскости. Тогда бинарное отношение
 - $R_1 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$
- определяет замкнутый круг единичного радиуса с центром в точке $(0,0)$ на плоскости, отношение
 - $R_2 = \{ (x, y) \mid x \geq y \}$
- полуплоскость, а отношение
 - $R_3 = \{ (x, y) \mid |x-y| \leq 1 \}$
- полосу.

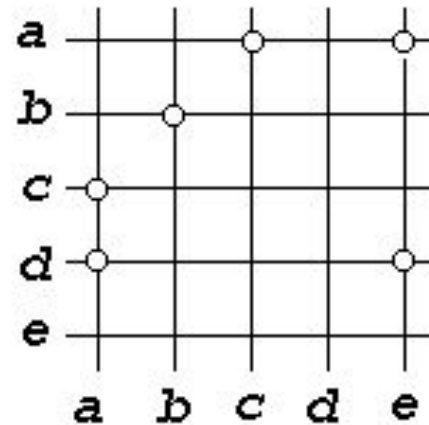
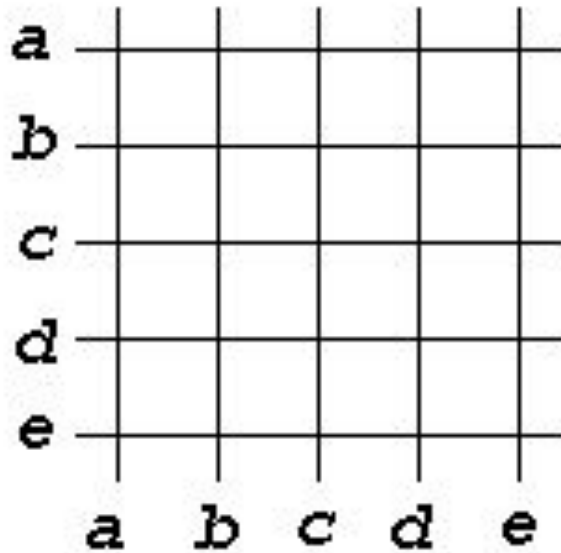
Способы задания



- Перечисление всех пар из базового множества A и базового множества B
 - $A=\{a_1, a_2\}$ $B=\{b_1, b_2, b_3\}$, $=\{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_1)\}$
- Отношения могут задаваться формулами:
- формулы
 - $y = x^2 + 5x - 6$ или $x + y < 5$ задают бинарные отношения на множестве действительных чисел;
- формула
 - $x + y = \text{любовь}$,
- задает бинарное отношение на множестве людей.

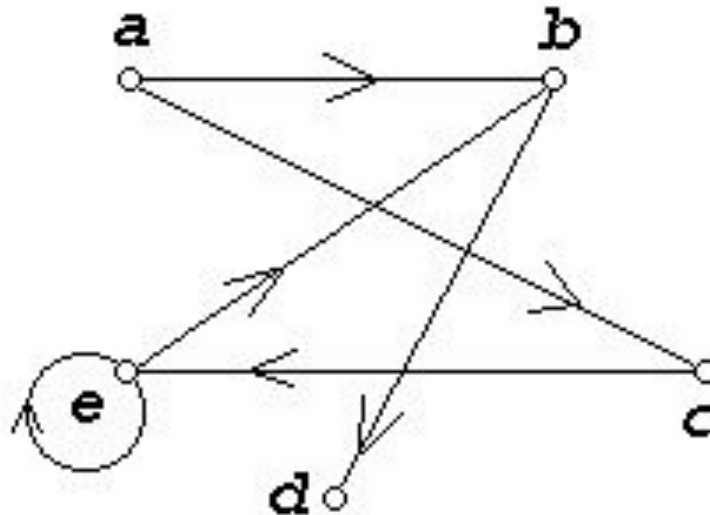
Графический метод задания

$$a = \{(a, d), (a, c), (b, b), (c, a), (e, d), (e, a)\}$$



Графовое представление

- Граф - фигура состоящая из точек (вершин) соединенных линиями (дугами). Вершины графа соответствуют элементам множества A , то есть x_i , а наличие дуги, соединяющей вершины x_i и x_j , означает, что $(x_i, x_j) \in R$. Чтобы подчеркнуть упорядоченность пары на дуге ставится стрелка.
- $A = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (e, b), (e, e)\}$



Матричная форма задания

- Пусть на некотором конечном множестве X задано отношение A . Упорядочим каким-либо образом элементы множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и определим матрицу отношения $A = [a_{ij}]$ следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ принадлежит } \alpha, \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ не принадлежит } \alpha. \end{cases}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Определения

- Диагональ множества $A \times A$, т.е. множество
$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in A\},$$
- называется **единичным бинарным отношением** или отношением равенства в A .
- **Областью определения** бинарного отношения R называется множество
$$\delta R = \{x \in A \mid \exists y \in B, (x, y) \in R\}. \text{Dom } R = \{x \mid \exists y ((x, y) \in R)\}.$$
- **Областью значений** бинарного отношения R называется множество
$$\rho R = \{y \in B \mid \exists x \in A, (x, y) \in R\}. \text{Im } R = \{y \mid \exists x ((x, y) \in R)\}.$$
- **Образом** множества X относительно отношения R называется множество
$$R(X) = \{y \in B \mid \exists x \in X, (x, y) \in R\};$$
- **прообразом** X относительно R называется $R^{-1}(X)$.

Операции над бинарными отношениями

- Пересечение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cap R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \in R_2 \}.$$

$\geq \cap \neq = >$

- Объединение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cup R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ или } (x, y) \in R_2 \}.$$

- Разностью отношений R_1 и R_2 называется такое отношение, что:

$$R_1 \setminus R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \notin R_2 \}$$

- Дополнение к отношению

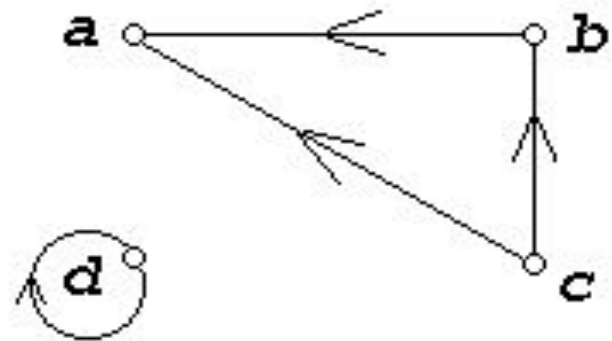
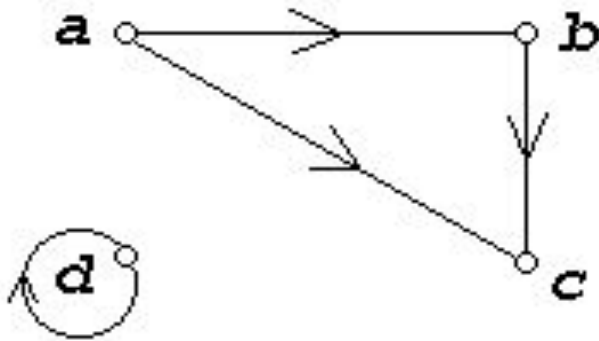
$$\bar{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in (A \times A) \setminus R \}.$$

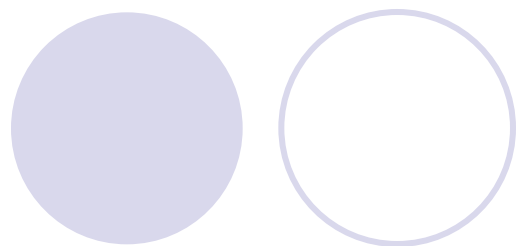
$\bar{\Sigma} \equiv <$

Обратное отношение

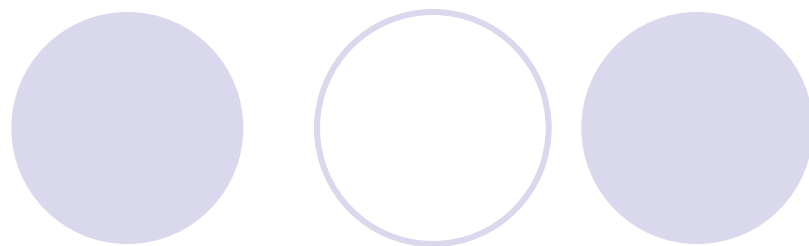
- Обратное отношение

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}.$$





$$M_{\alpha} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



$$M_{\alpha^{-1}} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Композиция отношений

- Двойственное отношение $R^d = \overline{R}^{-1}$
- Композиция (суперпозиция) отношений $R = R_1 \circ R_2$ содержит пару (x, y) тогда и только тогда, когда существует такое $z \in A$, что $(x, z) \in R_1$ и $(z, y) \in R_2$.

$$\{(x, y) \mid \exists z (xSz \wedge zRy)\}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства отношений

- R_1 содержится в R_2 ($R_1 \subseteq R_2$), если любая пара (x, y) , которая принадлежит отношению R_1 также принадлежит и отношению R_2

- Рефлексивность

$$\forall x \in M (xRx)$$

- Антирефлексивность

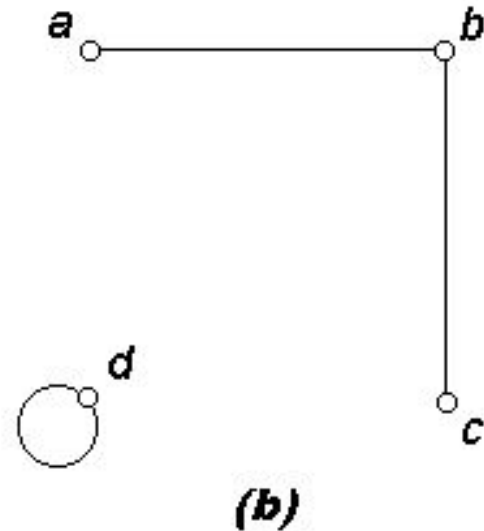
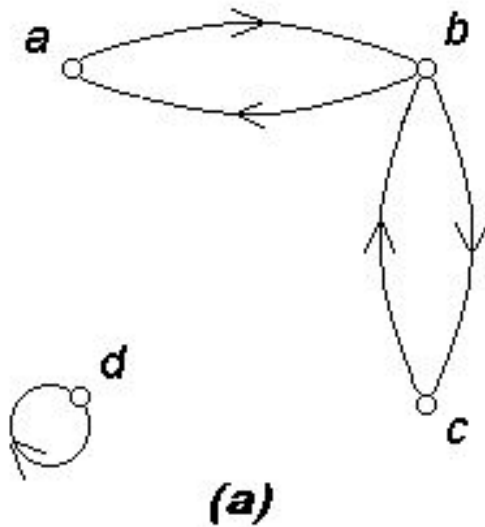
$$\forall x \in M \neg(xRx)$$

Рефлексивность отношений

- Обозначим через I_X отношение на множестве X , состоящее из пар вида (a, a) , где $a \in X$:
 - $I_X = \{(a, a) \mid a \in X\}$.
- Отношение I_X обычно называют диагональю множества X или отношением тождества на X .
- Очевидно, что отношение R на множестве X рефлексивно, если диагональ I_X является подмножеством множества a :
 - $I_X \subseteq R$.
- Отношение антирефлексивно, если диагональ I_X и отношение R не имеют ни одного общего элемента:
 - $I_X \cap R = \emptyset$.

Свойства отношений

- Симметричность $\forall x, y \in M (xRy \Rightarrow yRx)$
 $xRy \rightarrow yRx$ или $R=R^{-1}$



Свойства отношений

- Антисимметричность

$$\forall x, y \in M (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$$

- Пусть A - множество людей в данной очереди. Отношение R "не стоять за кем-то в очереди" будет антисимметричным.
- Пусть x=ВАСЯ, а y=ИВАНОВ. Тот факт, что $(x, y) \in R$ означает, что "ВАСЯ не стоит в очереди за ИВАНОВЫМ", $(y, x) \in R$ - "ИВАНОВ не стоит за ВАСЕЙ". Очевидно, что одновременное выполнение обоих включений может быть, только если ВАСЯ и есть ИВАНОВ, т.е. $x = y$.
- Отношение " $\geq$ " также антисимметрично: если $x \geq y$ и $y \geq x$, то $x = y$.

- Асимметричность

$$\forall x, y \in M (xRy \Rightarrow \neg(yRx))$$

- Асимметричность эквивалентна одновременной антирефлексивности и антисимметричности отношения.

Свойства отношений

- Для любого отношения R вводятся понятия симметричной части отношения
- $R^s = R \cap R^{-1}$
- и асимметричной части отношения
- $R^a = R \setminus R^s$.
- Если отношение R симметрично, то $R = R^s$,
- если отношение R асимметрично, то $R = R^a$.
- Примеры. Если R - " $\geq$ ", то R^{-1} - "<", R^s - "=", R^a - ">".
- Транзитивность отношений

$$\forall x, y, z \in M (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

Нетранзитивное отношение

- Отношение R , определенное на некотором множестве и отличающееся тем, что для любых x, y, z этого множества из xRy и yRz не следует xRz .
- Пример нетранзитивного отношения:
 - « x отец y »
- Нетранзитивным является отношение " $\neq$ ".
Пусть $x=2, y=3, z=2$, тогда справедливо $x \neq y$ и $y \neq z$, но $x=z$, т.е. $(x, z) \notin R$.

Негатранзитивность отношений

- $(x, y) \notin R \text{ и } (y, z) \notin R \rightarrow (x, z) \notin R$
- В графе негатранзитивного отношения отсутствие дуг от x к y и от y к z приводит к отсутствию дуги от x к z .
- Отношения R_1 - ">" и R_2 - " $\neq$ " негатранзитивны, так как отношения $R_1^{\text{доп}}$ - " $\leq$ ", $R_2^{\text{доп}}$ - "=" транзитивны.
- Возможно одновременное выполнение свойств транзитивности и негатранзитивности.
- Например, отношение R_1 одновременно транзитивно и негатранзитивно, а R_2 , как известно, транзитивным не является.

Свойства бинарных отношений

- Полнота

- $\forall (x, y) \in X$ либо xRy либо yRx , либо и то и другое одновременно — полносвязное или связное отношение

- Ацикличность

- Отношение R называется ациклическим, если из наличия какого-либо пути между вершинами соответствующего графа следует отсутствие обратной дуги (обратного пути) между этими вершинами (в графе отсутствуют любые циклы).
- $\forall n \ x_1Rx_2 \wedge x_2Rx_3 \wedge x_3Rx_4 \wedge \dots \wedge x_{n-1}Rx_n$ но не наоборот.

Композиция транзитивного отношения

- Справедлива **теорема**:
 - Для любого отношения транзитивное замыкание равно пересечению всех транзитивных отношений, включающих в качестве подмножества.
- **Композиция** транзитивного отношения – транзитивное отношение.
- Отношение R_1 называется транзитивным относительно отношения R_2 , если:
 - из $(x, y) \in R_1$ и $(y, x) \in R_2$ следует, что $(x, z) \in R_1$;
 - из $(x, y) \in R_2$ и $(y, x) \in R_1$ следует, что $(x, z) \in R_1$.

Связи между бинарными отношениями

- Отношение R симметрично тогда и только тогда, когда $R = R^{-1}$.
- Если R рефлексивно, то R^d антирефлексивно, если R антирефлексивно, то R^d рефлексивно.
- Отношение R слабо полно тогда и только тогда, когда R^d антисимметрично.
- Отношение R асимметрично тогда и только тогда, когда R^d полно.

Отношения эквивалентности (подобия, равносильности)

- Отношение R на множестве A^2 называется **отношением эквивалентности**, если оно обладает следующими свойствами:
 - рефлексивность
 - симметричность
 - транзитивность
- Обозначается $=, \approx, \sim, \equiv$



Отношение эквивалентности

- $x \approx x$ для всех $x \in A$ (рефлексивность)
- Если $x \approx y$, то $y \approx x$ (симметричность)
- Если $x \approx y$ и $y \approx z$, то $x \approx z$
(транзитивность)

Примеры

- отношение тождества $I_X = \{(a, a) | a \in X\}$ на непустом множестве X ;
- отношение параллельности на множестве прямых плоскости;
- отношение подобия на множестве фигур плоскости;
- отношение равносильности на множестве уравнений;
- отношение "иметь одинаковые остатки при делении на фиксированное натуральное число m " на множестве целых чисел. Это отношение в математике называют отношением сравнимости по модулю m и обозначают $a \equiv b \pmod{m}$;
- отношение "принадлежать одному виду" на множестве животных;
- отношение "быть родственниками" на множестве людей;
- отношение "быть одного роста" на множестве людей;
- отношение "жить в одном доме" на множестве людей.

Классы эквивалентности

- Система непустых подмножеств

$$\{M_1, M_2, \dots\}$$

- множества M называется *разбиением* этого множества, если

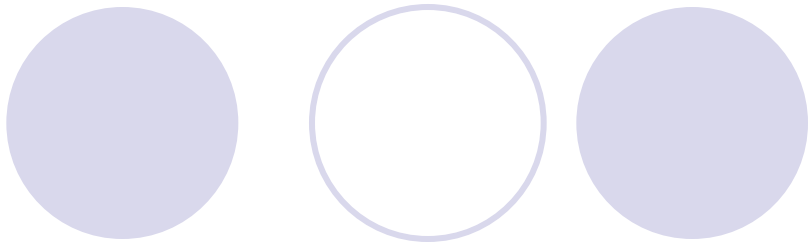
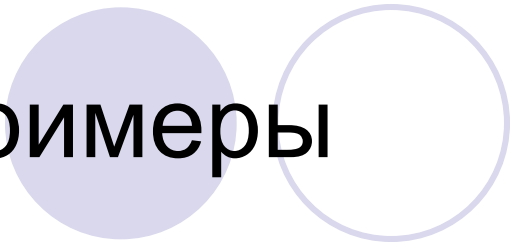
$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots$$

- и при $i \neq j$

$$M_i \cap M_j = \emptyset.$$

- Сами множества $M_1, M_2, \dots$ называются при этом *классами* данного разбиения.

Примеры



- Разложение всех многоугольников на группы по числу вершин - треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.;
- Разбиение всех треугольников по свойствам углов (остроугольные, прямоугольные, тупоугольные);
- Разбиение всех треугольников по свойствам сторон (разносторонние, равнобедренные, равносторонние);
- Разбиение всех треугольников на классы подобных треугольников;
- Разбиение множества всех учащихся данной школы по классам.

Пример 1

$$R(x, y) = \begin{cases} \text{"истина", если } x = y \\ \text{"ложь", если } x \neq y \end{cases}$$

Пример 2

- a и b равны по модулю n , если их остатки при делении на n равны.
- Например по модулю 5 равны 2, 7, 12 ...

$$R(x, y) = \begin{cases} \text{"истина"}, & \text{если } x = y \bmod n \\ \text{"ложь"}, & \text{если } x \neq y \bmod n \end{cases}$$

- $[0] = \{0, n, 2n, \dots\}$
- $[1] = \{1, n+1, 2n+1, \dots\}$
- ...
- $[n-1] = \{n-1, n+n-1, 2n+n-1, \dots\}$

Класс эквивалентности

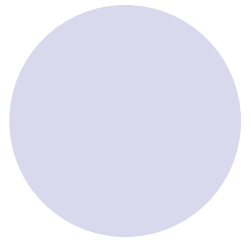
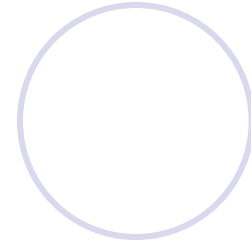
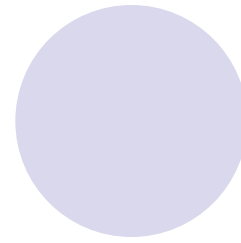
- **Классом эквивалентности** $C(a)$ элемента a называется подмножество элементов, эквивалентных a . Из вышеприведённого определения немедленно следует, что, если и $b \in C(a)$, то $C(a) = C(b)$.

Теорема



- Отношение эквивалентности, заданное между элементами базового множества X , определяет разбиение множества X на непересекающиеся классы эквивалентности базового множества

Фактор-множество



- Получающееся при этом множество классов называется фактор-множеством $\{c_k\}$. или $X / \sim$.

Теорема



- Два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.
- *Доказательство.* Пусть A и B - два класса эквивалентности из X . Допустим, что они пересекаются и c - общий элемент, то есть $c \in A$, $c \in B$. Если x - произвольный элемент из A , то $x \sim c$. Поскольку $c \in B$, то и $x \in B$. Таким образом, $A \subset B$. Аналогично доказывается, что $B \subset A$. Итак, $A = B$.
Теорема доказана

Представитель класса

- Как уже отмечалось, каждый элемент a из множества X полностью определяет класс эквивалентности, его содержащий, который далее обозначается символом $\tilde{a}$, так что $a \in \tilde{a}$ (и $\tilde{a} = \tilde{y}$, если и только если $a = y$).
Элемент a называется представителем класса A , если $a \in A$.