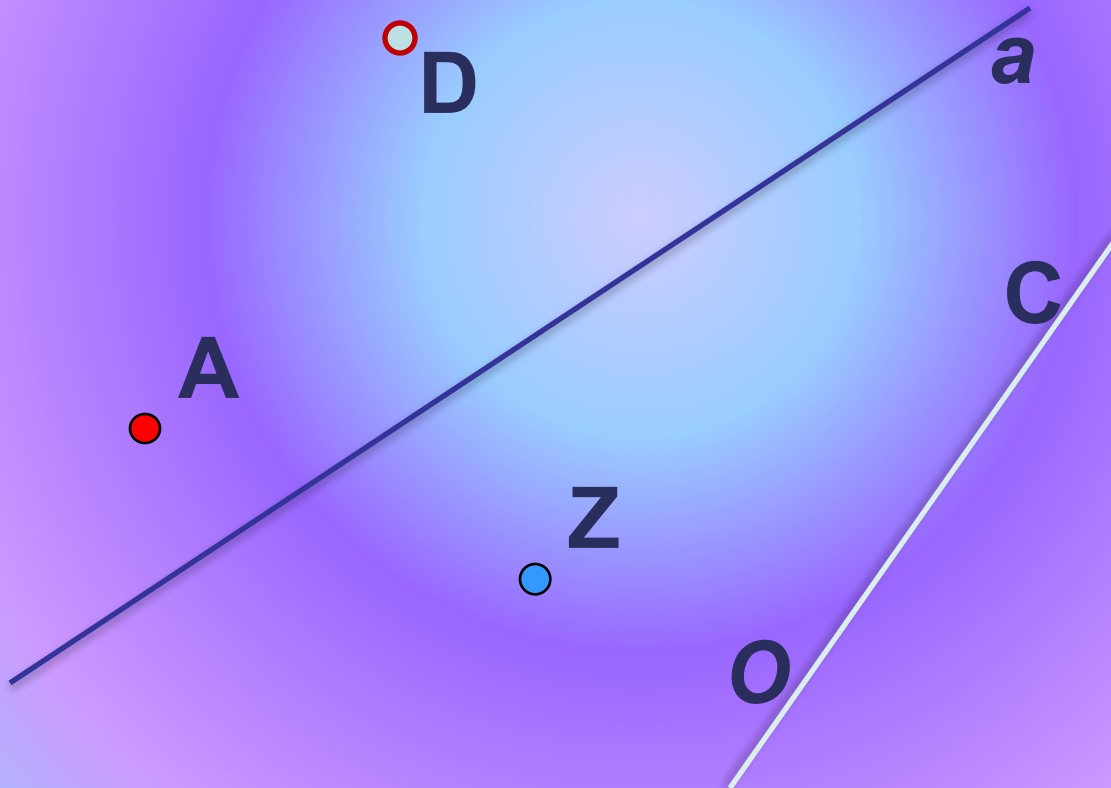


Повторення курсу планіметрії

- Основні поняття планіметрії.
- Аксиоми планіметрії.
- Основні властивості геометричних фігур та їх ознаки.
- Методи розв'язування геометричних задач.

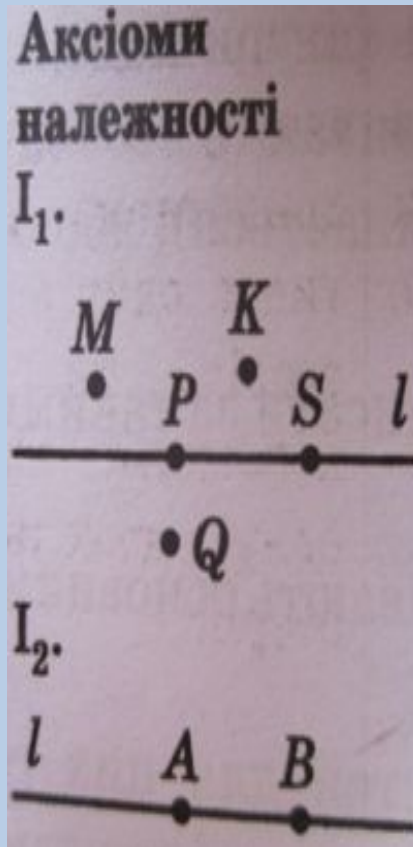
ОПОРНІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Основні геометричні фігури (поняття) планіметрії – точка, пряма.



Аксиоми планіметрії

I



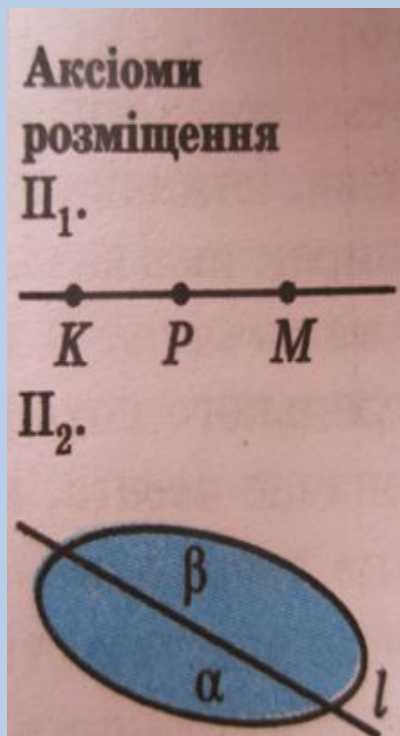
I_1 Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй

I_2 Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну

.

Дві різні прямі або не перетинаються, або перетинаються тільки в одній точці

II



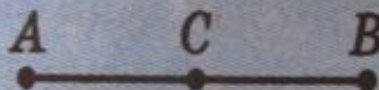
Π_1 З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими

Π_2 Пряма розбиває площину на дві півплощини

Якщо кінці будь-якого відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму. Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму

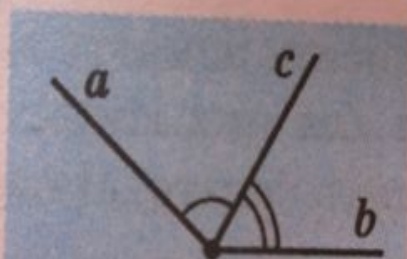


Аксіоми вимірювання III_1 .



$$AB = AC + CB$$

III_2 .



$$\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(cb)$$

III_1 Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

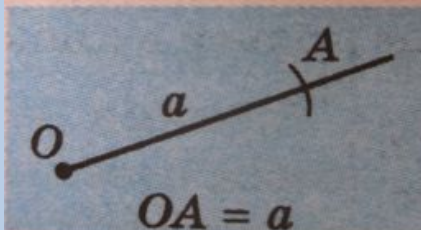
III_2 Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180° . Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами

Якщо три точки А, В і С лежать на одній прямій, то точка С лежатиме між точками А і В у випадку, коли $AB = AC + CB$.
Якщо від даної півпрямой відкласти в одну й ту саму півплощину два кути, то сторона меншого кута, відмінна від даної півпрямой, проходить між сторонами більшого кута

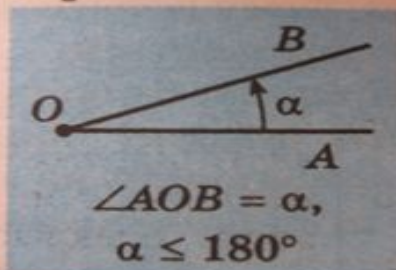
IV

Аксіоми відкладання

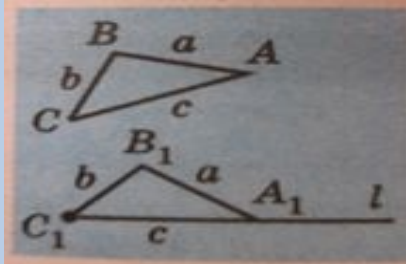
IV₁.



IV₂.



IV₃.



IV₁ На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини і до того ж тільки один.

IV₂ Від будь-якої півпрямої в задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою 180° , і до того ж тільки один.

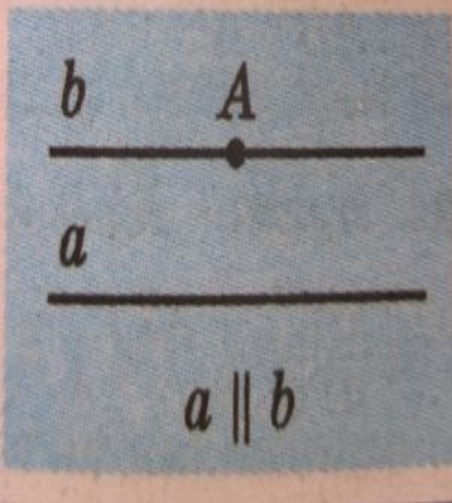
IV₃ Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, у заданому розміщенні відносно даної півпрямої

Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає тільки одну з двох інших сторін

V

**Аксиома
паралельності**

V_1 .



V_1 Через точку,
що не лежить на
даній прямій,
можна провести не
більше як одну
пряму, паралельну
даній

Якщо пряма пере-
тинає одну з двох
паралельних пря-
мих, то вона пере-
тинає й другу

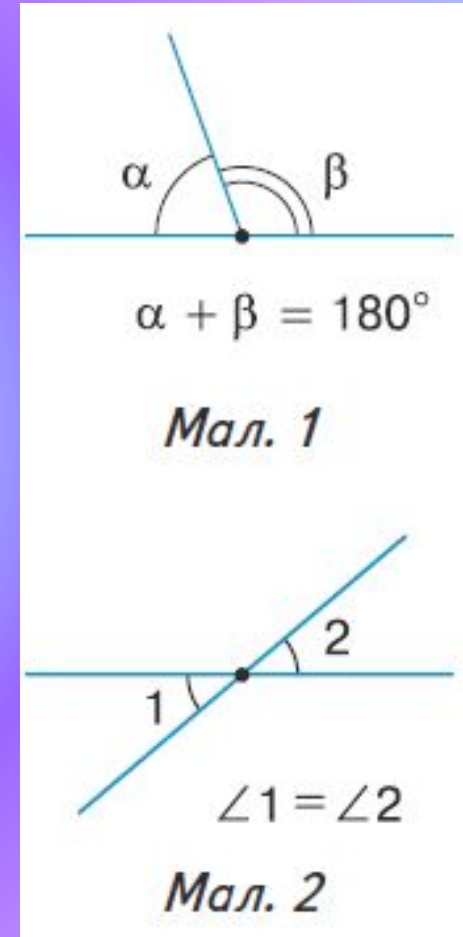
КУТИ

Два кути називаються *суміжними*, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями (мал. 1).

Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого (мал. 2).

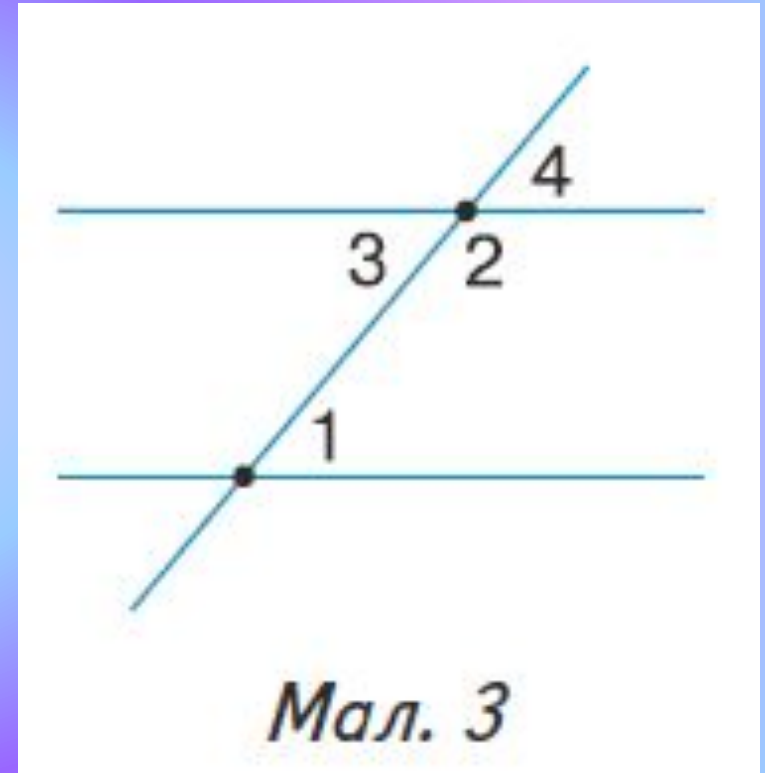
Вертикальні кути рівні.



Властивості паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетинає третя (мал. 3), то:

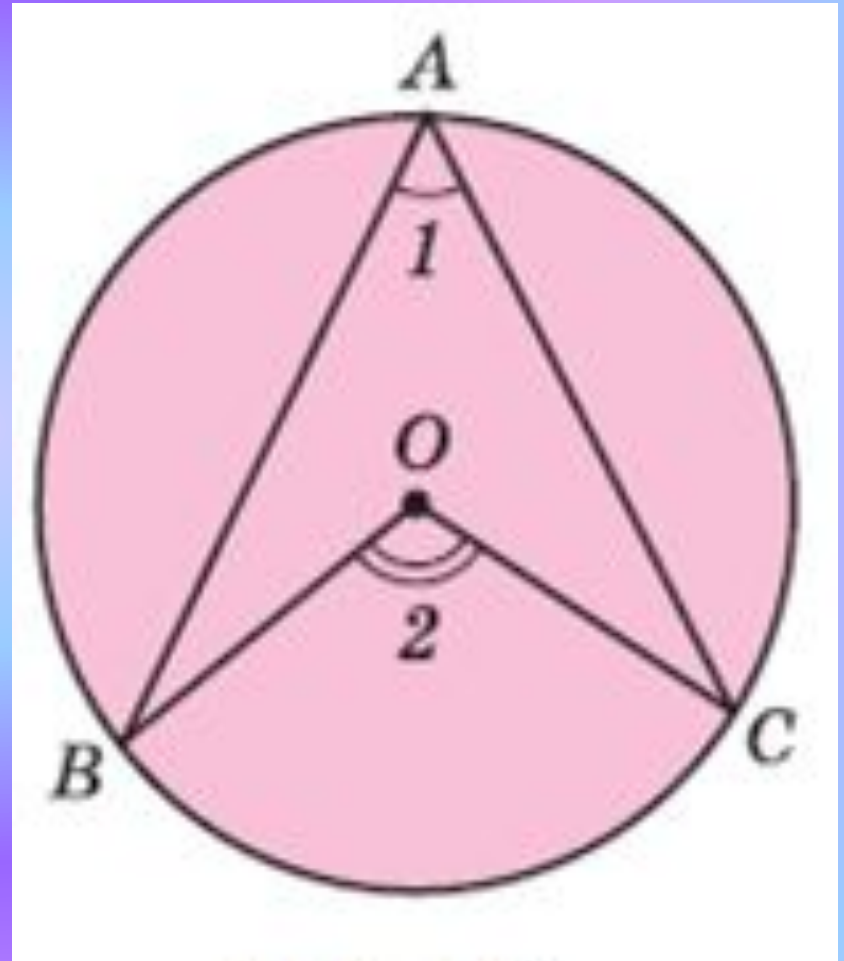
- 1) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° : $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$;
- 2) внутрішні різносторонні кути рівні: $\angle 1 = \angle 3$;
- 3) відповідні кути рівні: $\angle 1 = \angle 4$



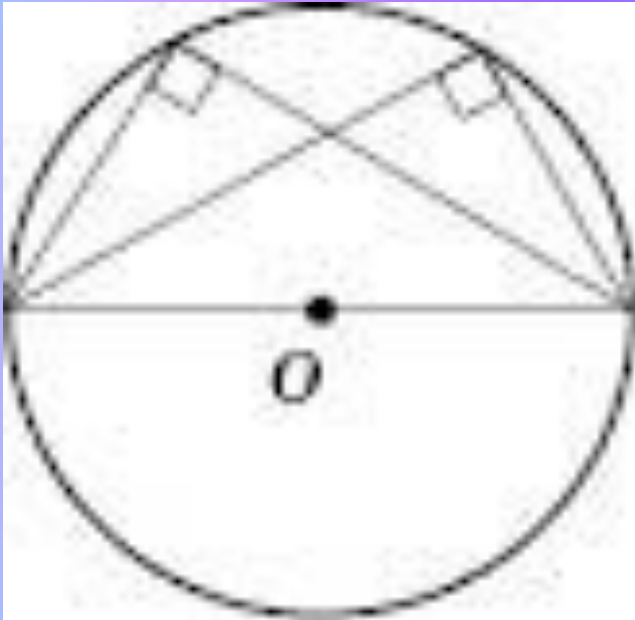
Кути в колі

Якщо в колі побудувати плоский кут так, що його вершиною буде центр кола, то матимемо кут, який називається **центральним кутом**($\angle BOC$).

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають дане коло, називається вписаним кутом ($\angle BAC$)

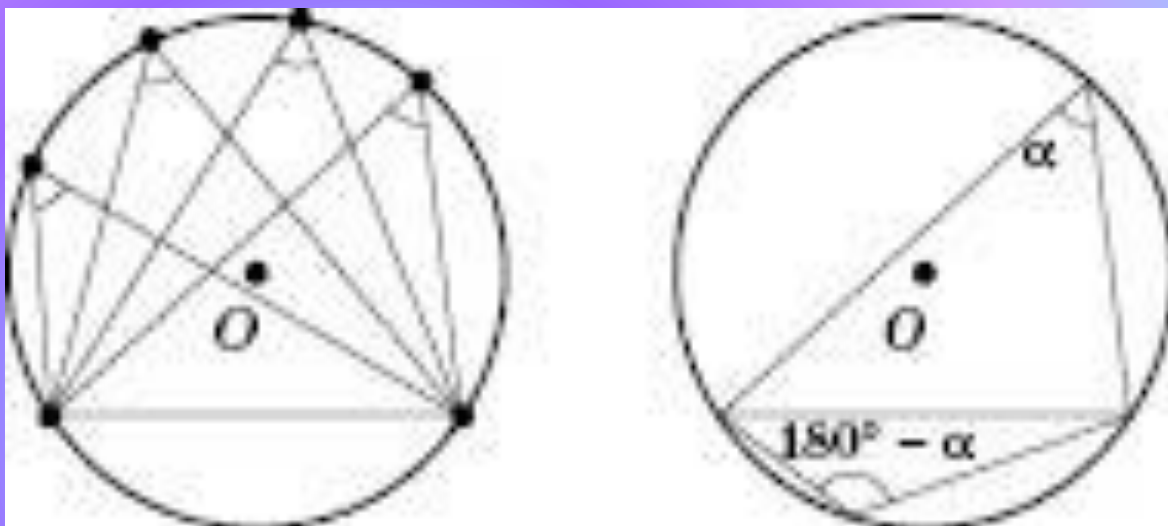


Кути, вписані в коло



***Вписані кути, які
спираються на
діаметр, – прямі.***

Властивості вписаних кутів



Усі вписані кути деякого кола, що спираються на одну й ту саму хорду і лежать з одного боку від неї, мають однакові градусні міри, тобто вони рівні.

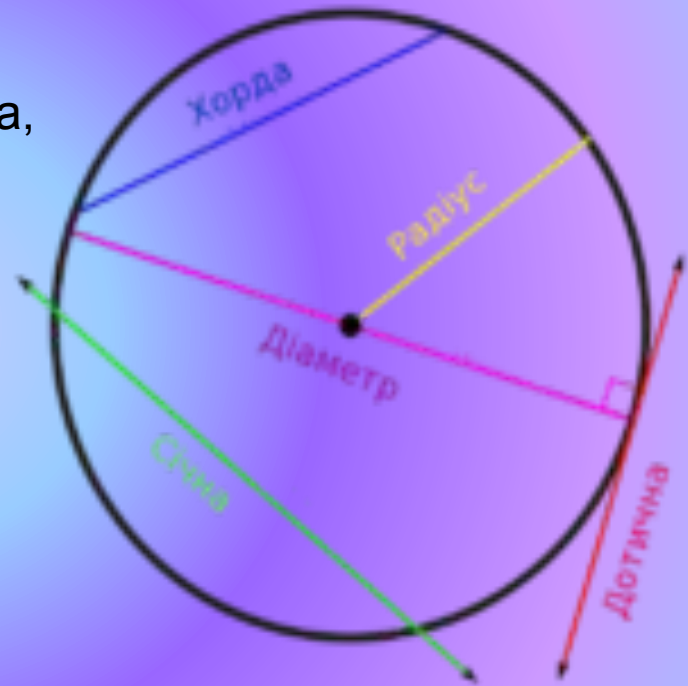
Якщо два вписані кути деякого кола спираються на одну й ту саму хорду і лежать із різних боків від неї, то їхня сума дорівнює 180° .

Коло і його елементи

Колом називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Цю точку називають **центром кола**, а відрізок, що сполучає центр кола з будь-якою точкою кола, називають **радіусом**.

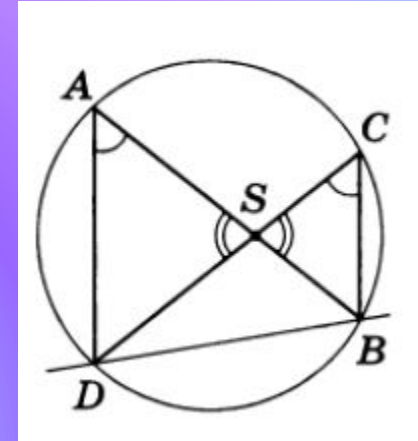
Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають **хордою**.

Хорду, що проходить через центр кола, називають **діаметром**.

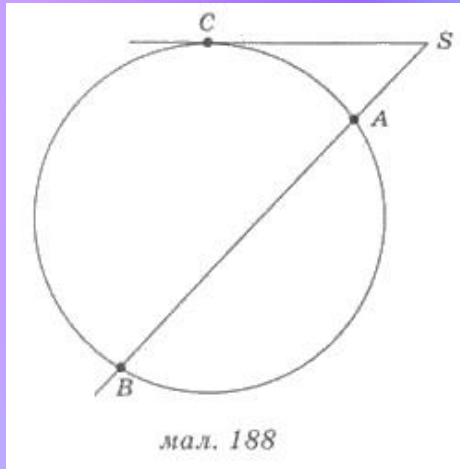


Властивості хорд і дотичних

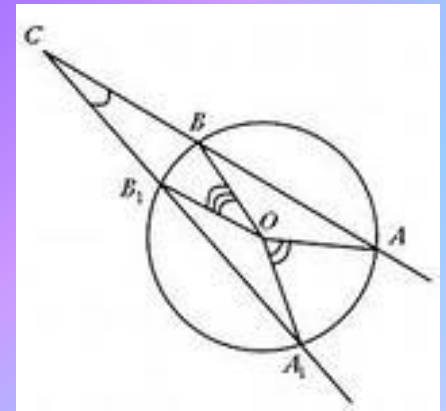
$$AS \cdot SB = CS \cdot SD$$



$$SC^2 = SA \cdot SB$$

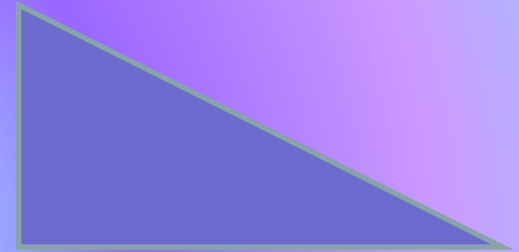
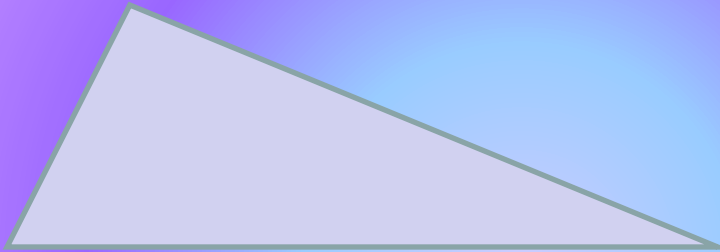
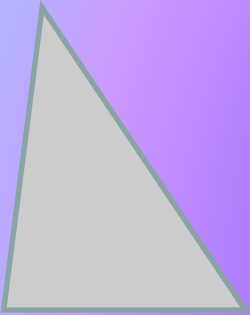


$$CB \cdot CA = CB_1 \cdot CA_1$$

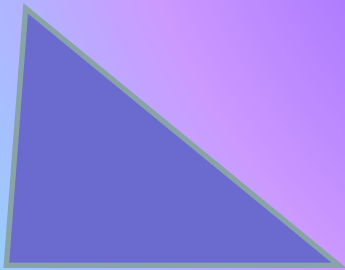


Трикутники

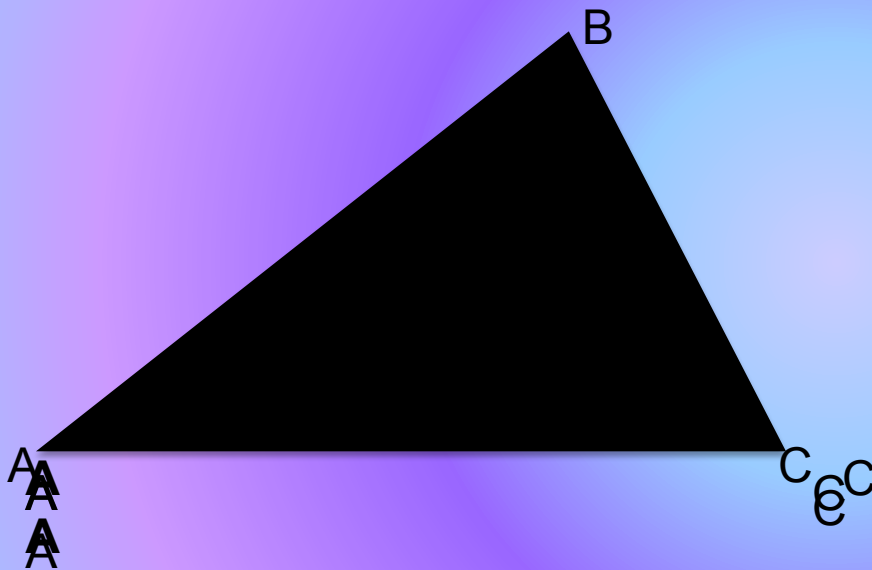
Залежно від міри кутів, трикутники поділяють на гострокутні, тупокутні й прямокутні.



Залежно від довжин сторін трикутники поділяють на різносторонні, рівнобедрені й рівносторонні.



Означення трикутника: Трикутник – це фігура, яка складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно з'єднують ці точки.



Елементи трикутника:

Точки A, B, C – вершини .
Відрізки AB, BC, AC –
сторони.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – кути
трикутника.

$\angle A$ – протилежний до
сторони BC.

$\angle A$ – прилеглий до
сторони AB (і BC).

Трикутники

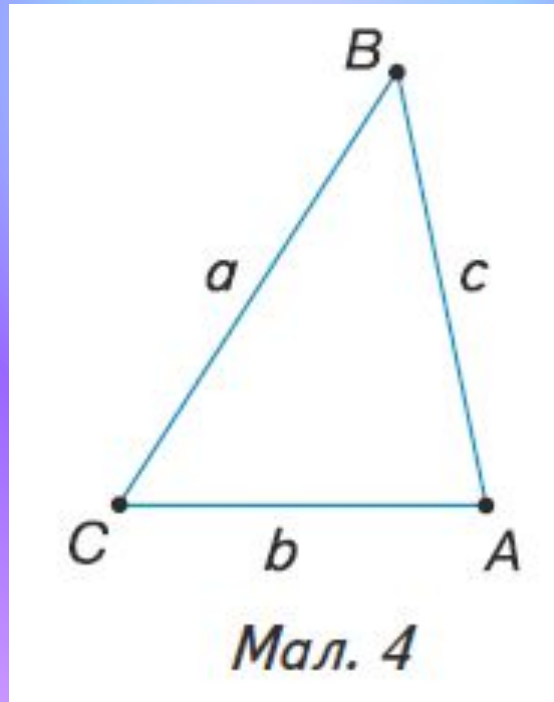
У будь-якому трикутнику ABC (мал. 4):

1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (теорема про суму кутів трикутника);

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ (теорема косинусів);

3) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусів), де R – радіус описаного

кола.



Співвідношення сторін і кутів у прямокутному трикутнику

$$\cos \alpha = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{прилеглий катет}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{протилежний катет}}$$

Запам'ятай!

Катет

Проти-
лежний
куту α

=

гіпотенуза $\cdot \sin \alpha$

=

другий катет $\cdot \operatorname{tg} \alpha$

Прилеглий
до кута α

=

гіпотенуза $\cdot \cos \alpha$

=

другий катет $\cdot \operatorname{ctg} \alpha$

Запам'ятай!

Гіпотенуза

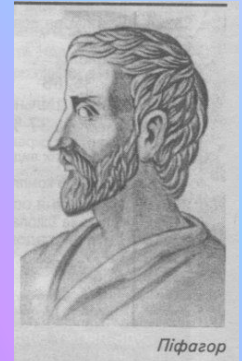
=

$$\frac{\text{катет, протилежний до кута } \alpha}{\sin \alpha}$$

=

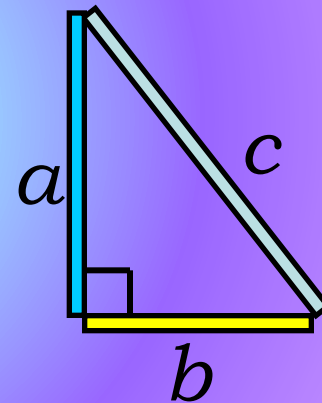
$$\frac{\text{катет, прилеглий до кута } \alpha}{\cos \alpha}$$

Теорема Піфагора



У прямокутному
трикутнику сума
квадратів катетів
дорівнює квадрату
гіпотенузи

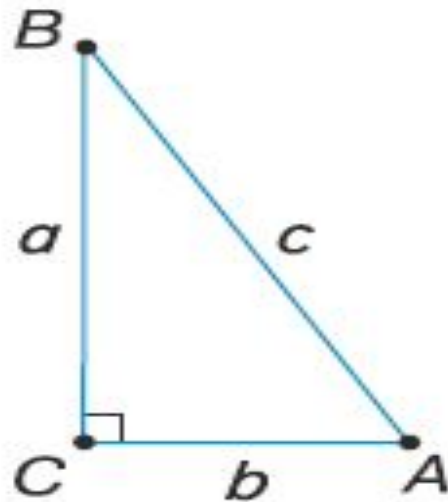
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Трикутники

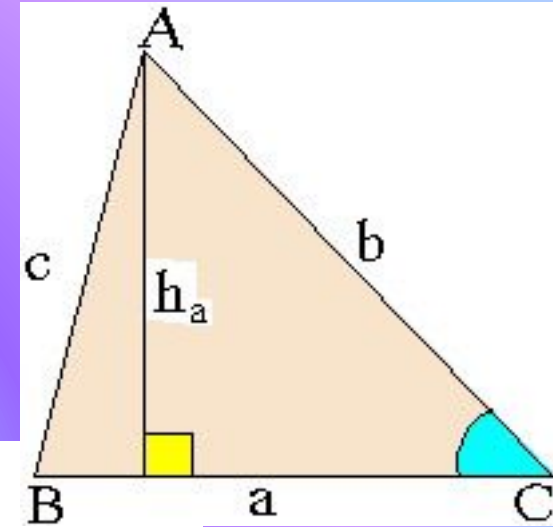
У прямокутному трикутнику ABC (мал. 5):

- 1) $\angle A + \angle B = 90^\circ$;
- 2) $c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Піфагора);
- 3) $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A$.



Мал. 5

Трикутник



Периметр трикутника дорівнює сумі довжин його сторін.
Площу трикутника можна обчислити за формулами:

1) $S = \frac{1}{2} ah_a$, де h_a – висота, проведена до сторони a ;

2) $S = \frac{1}{2} bc \sin A$;

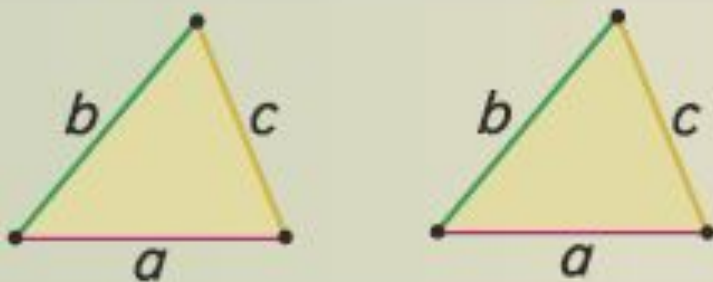
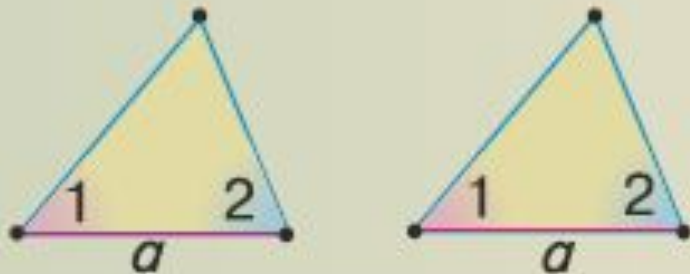
3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – півпериметр (формула Герона);

4) $S = pr$, де p – півпериметр, r – радіус вписаного кола;

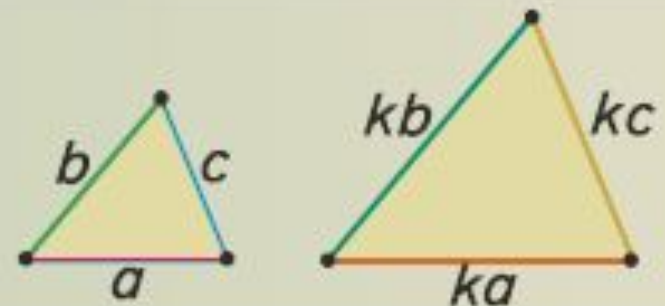
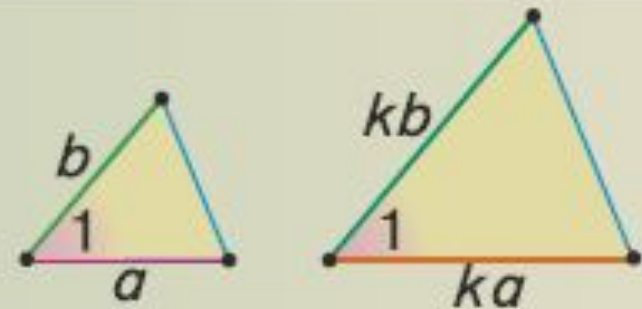
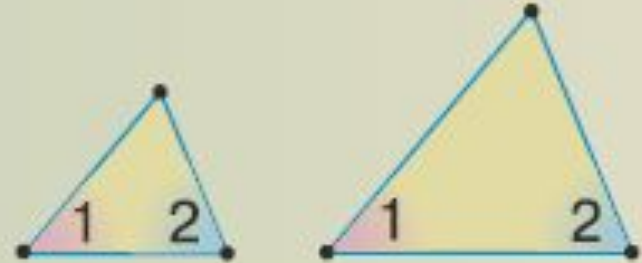
5) $S = \frac{abc}{4R}$, де R – радіус описаного кола.

Ознаки рівності й ознаки подібності трикутників

Трикутники рівні, якщо:

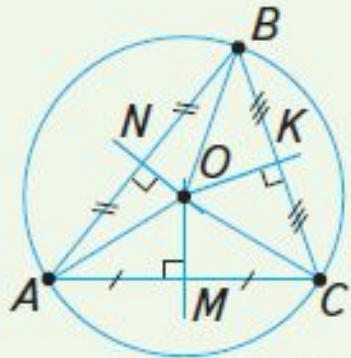


Трикутники подібні, якщо:



Означення вписаних і описаних трикутників та їх властивості

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА



Центр O кола — точка перетину

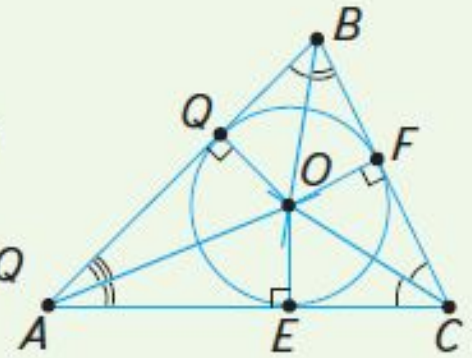
*серединних
перпендикулярів*

$$R = OA = OB = OC$$

Навколо будь-якого трикутника

У будь-який трикутник

КОЛО, ВПИСАНЕ У ТРИКУТНИК



бісектрис кутів

$$r = OE = OF = OQ$$

можна $\frac{\text{описати}}{\text{вписати}}$ коло і до того ж тільки одне

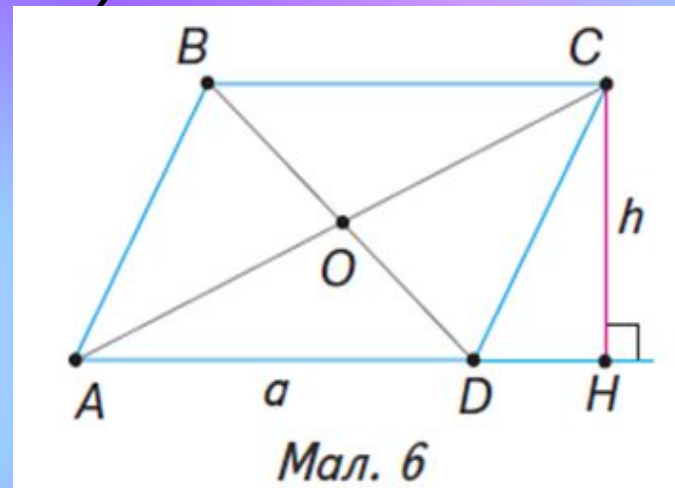
Довжину кола і площу круга можна обчислити за формулами:

$$C = 2\pi R = \pi D, S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}, \text{ де } R - \text{ радіус кола, } D - \text{ його діаметр.}$$

Паралелограм

Паралелограм $ABCD$ (мал. 6):

- 1) $AD \parallel BC, AB \parallel DC$;
- 2) $AD = BC, AB = DC$;
- 3) $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$;
- 4) $AO = OC, BO = OD$;
- 5) $\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle A + \angle D = 180^\circ$.



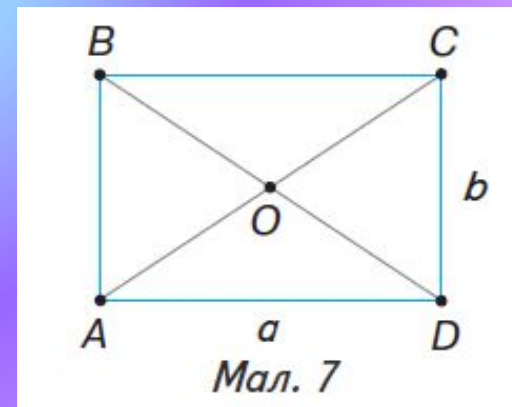
Площа паралелограма: $S = ah$.

Прямокутник

Прямокутник $ABCD$ (мал. 7):

- 1) усі властивості паралелограма;
- 2) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$;
- 3) $AC = BD$.

Площа прямокутника: $S = ab$.

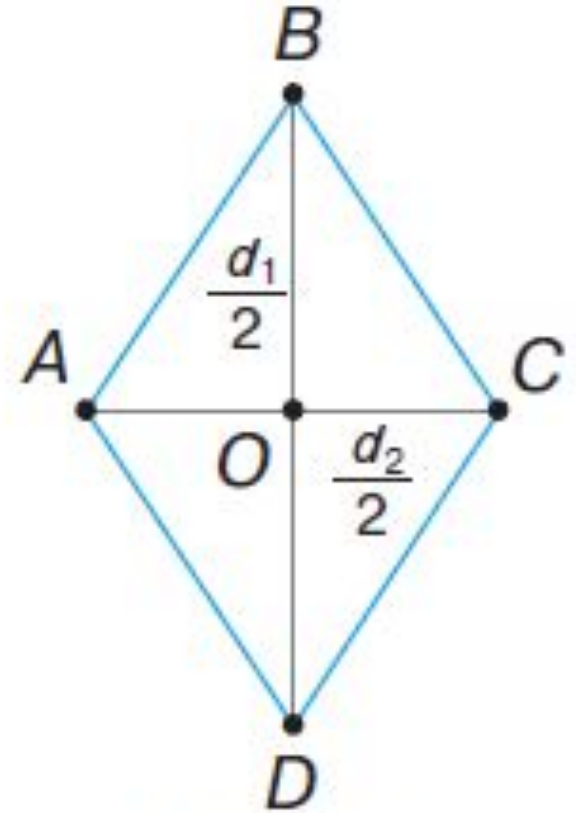


Ромб

Ромб $ABCD$ (мал. 8):

- 1) усі властивості паралелограма;
- 2) $AB = BC = CD = DA$;
- 3) $AC \perp BD$;
- 4) $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BAC = \angle DAC$.

Площа ромба: $S = \frac{1}{2}d_1d_2$.

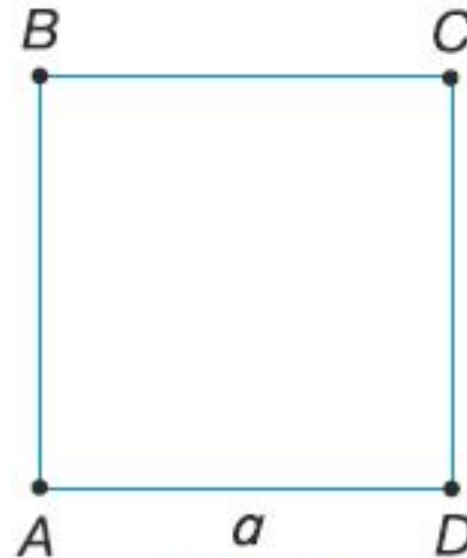


Мал. 8

Квадрат

Квадрат $ABCD$ (мал. 9): усі властивості паралелограма, прямокутника, ромба.

Площа квадрата: $S = a^2$.



Мал. 9

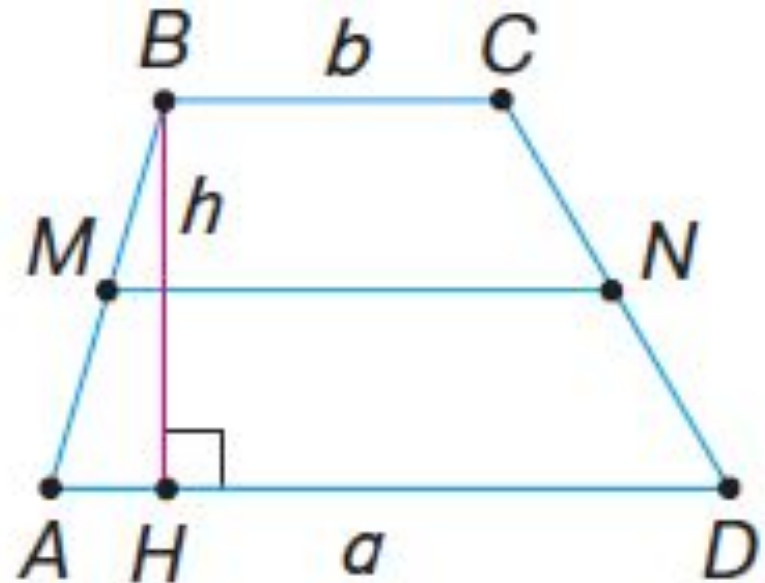
Трапеція

Трапеція $ABCD$ (мал. 10):

1) $AD \parallel BC$;

2) $MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{AD + BC}{2}$,
де MN – середня лінія.

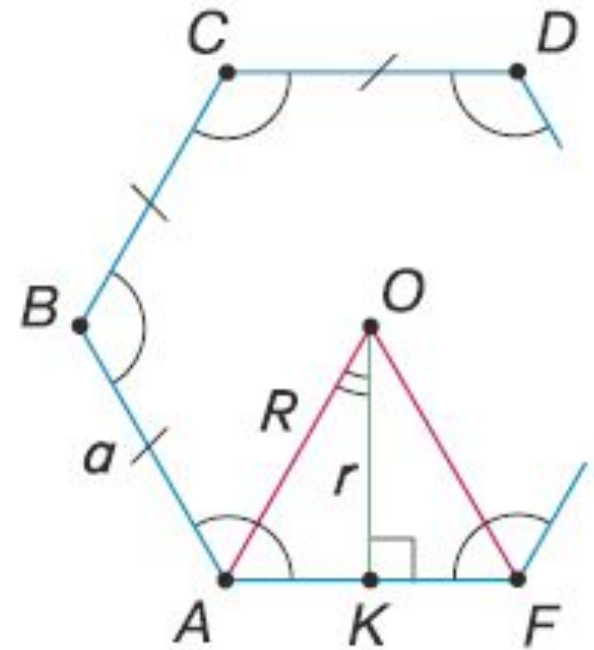
Площа трапеції: $S = \frac{(a + b)h}{2}$.



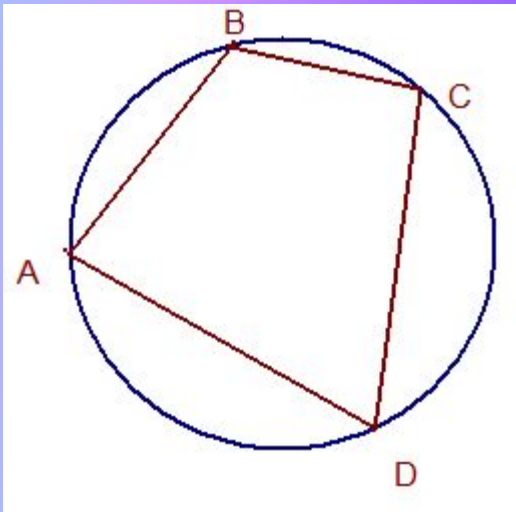
Мал. 10

Правильні многокутники

- 1) $AB = BC = \dots = AF$ і $\angle A = \angle B = \dots = \angle F$;
- 2) точка O є центром описаного кола і вписаного кола;
- 3) $\angle AOF = \frac{360^\circ}{n}$;
- 4) $\angle A + \angle B + \dots + \angle F = 180^\circ (n - 2)$;
- 5) $r = \frac{AK}{\operatorname{tg} \angle AOK} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$;
- 6) $R = \frac{AK}{\sin \angle AOK} = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$.



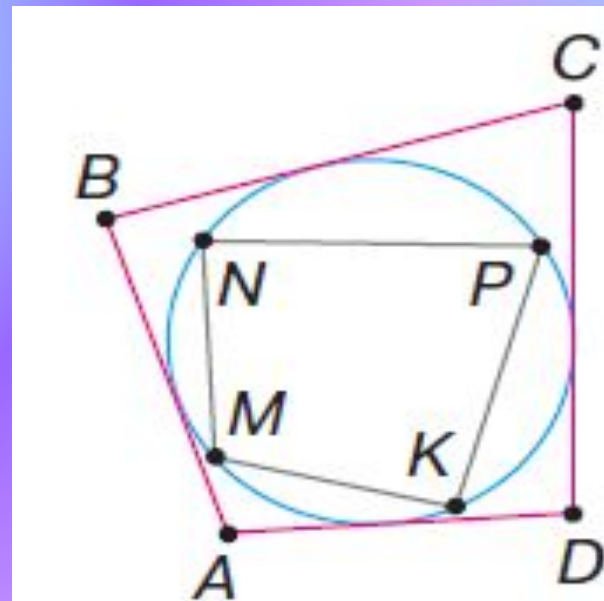
Мал. 12



Чотирикутник, всі вершини якого лежать на колі, називається ***вписаним*** у це коло, а ***коло описаним*** навколо даного чотирикутника.

Властивості вписаних і описаних чотирикутників

- 1) у вписаному чотирикутнику $MNKP$
(мал. 11): $\angle M + \angle P = 180^\circ$, $\angle N + \angle K = 180^\circ$;
2) в описаному чотирикутнику $ABCD$
(мал. 11): $AB + CD = AD + BC$.

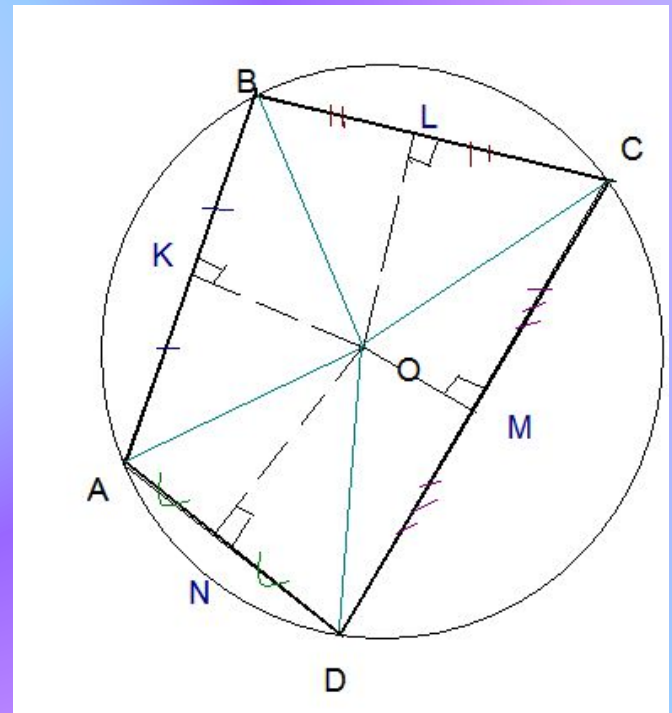


Мал. 11

*Де знаходиться центр кола,
описаного навколо чотирикутника?*

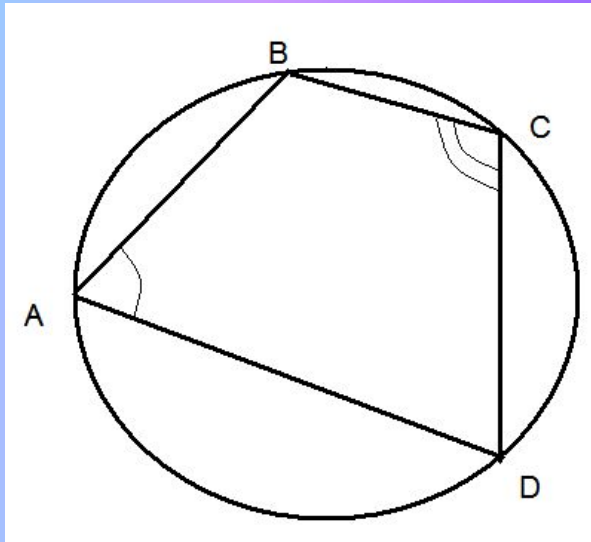
Центр описаного кола – це точка , рівновіддалена від вершин чотирикутника.

Тому вона є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін, якщо ця точка існує .





Теорема: навколо чотирикутника можна описати коло, якщо суми протилежних кутів цього чотирикутника рівні 180^0 .

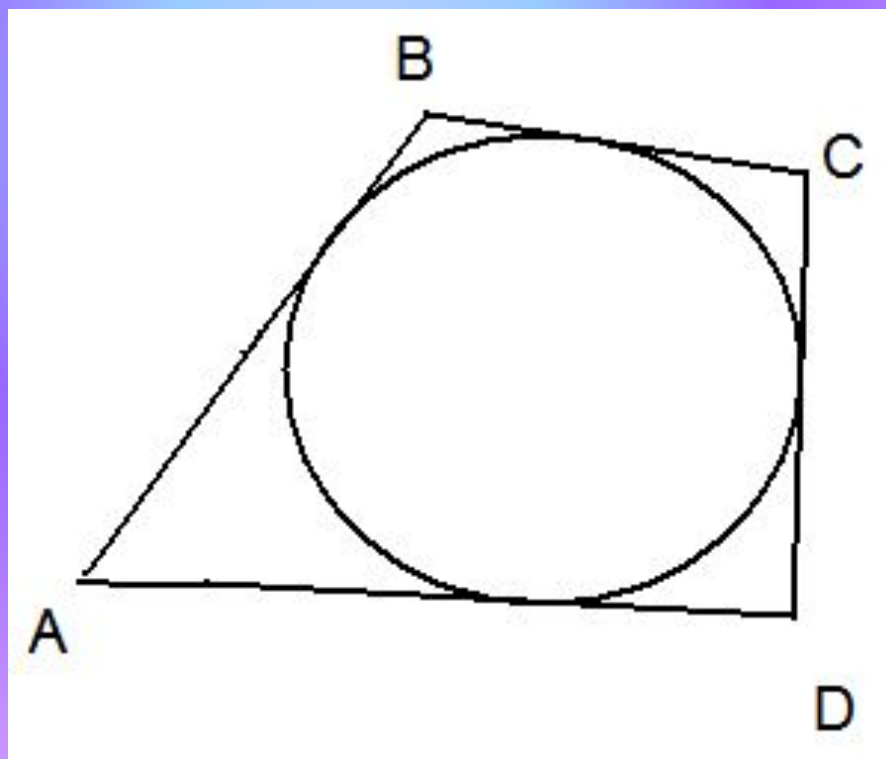


Кути $\angle A$ і $\angle C$ вписані і спираються на дуги, що доповнюють одна одну до повного кола. За теоремою про вписані кути

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup \hat{A} \hat{D} + \cup B \hat{C} D) = \frac{360^0}{2} = 180^0$$



Чотирикутник, всі сторони якого дотикаються до кола, називається описаним навколо цього кола, а коло називається вписаним в чотирикутник.

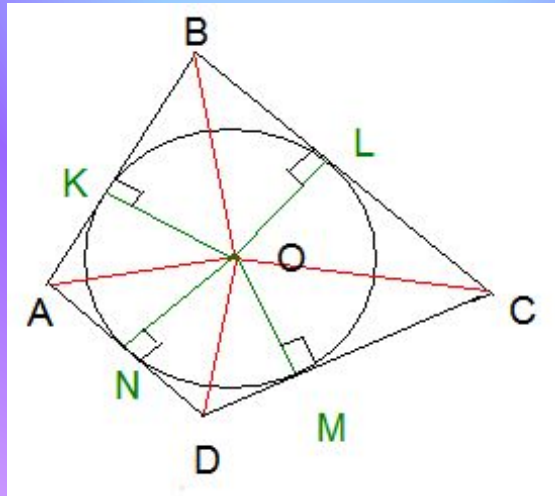




**Де знаходиться центр кола,
вписаного в чотирикутник?**

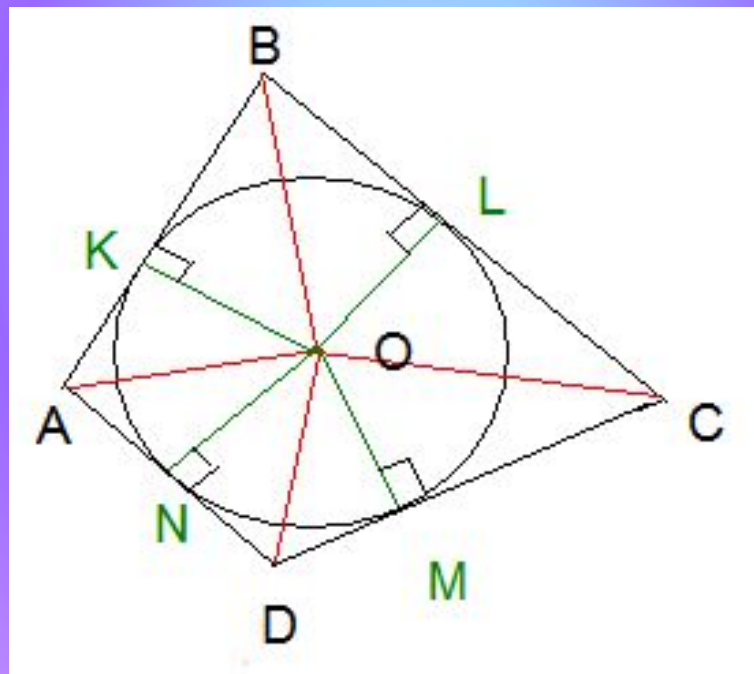
**Центр кола , вписаного в чотирикутник ,
це точка рівновіддалена від
сторін чотирикутника.**

**Тому вона є точкою перетину бісектрис
внутрішніх кутів чотирикутника
(якщо для многокутника ця точка існує).**





Теорема: В чотирикутник можна
вписати коло ,
якщо суми протилежних сторін рівні.
 $AB+CD=AD+BC$.



Відрізок на координатній площині

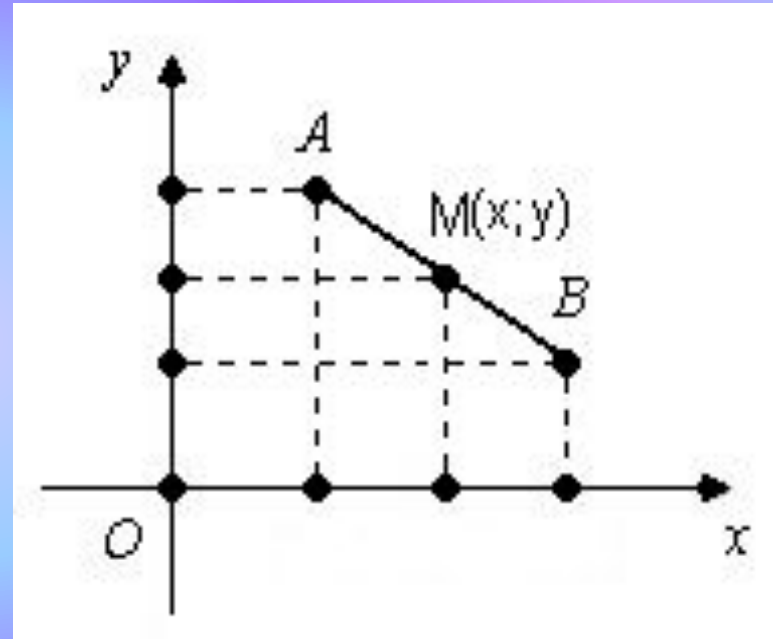
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

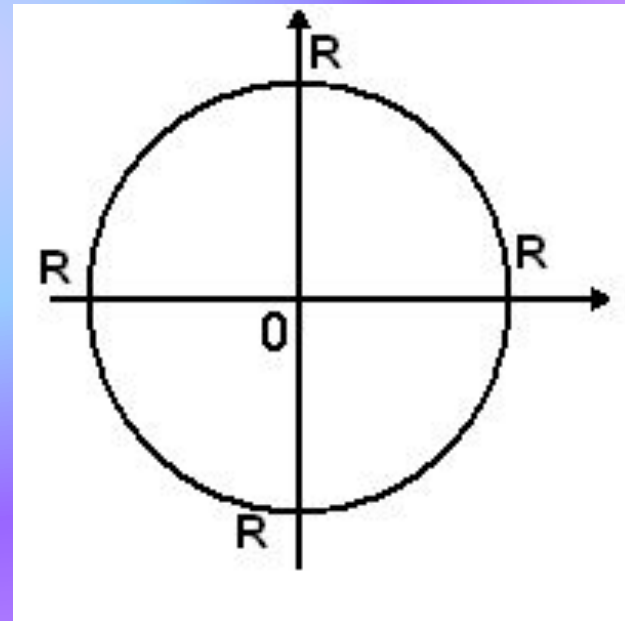
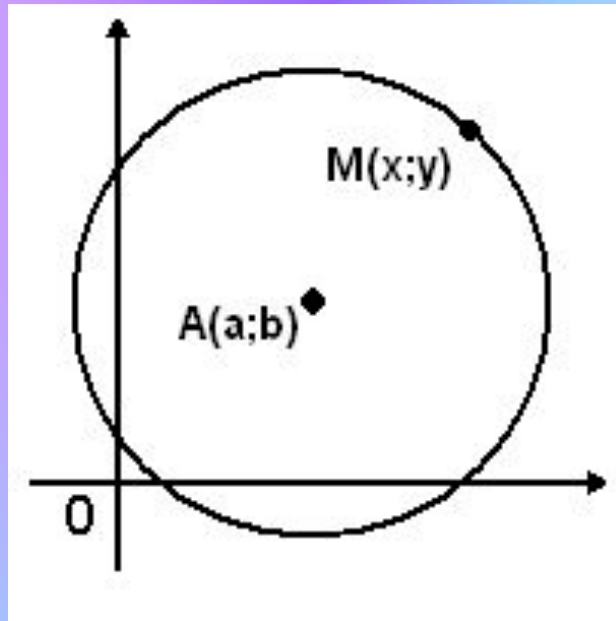
M(x ; y)

M— середина **AB**



Рівняння кола

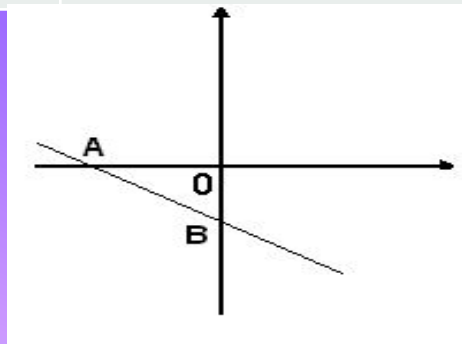
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $R > 0$, є рівнянням кола з центром в точці $A(a; b)$ и радіусом $R = MA$



Рівняння прямої

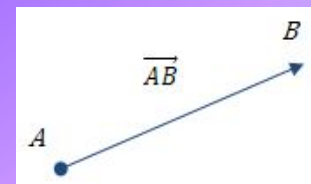
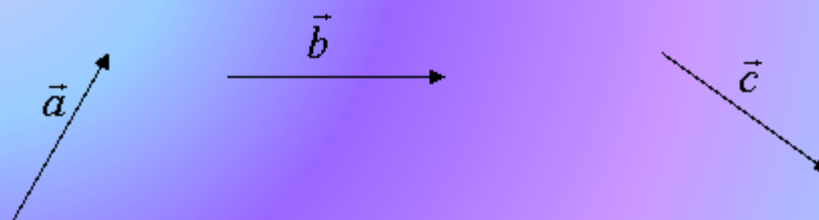
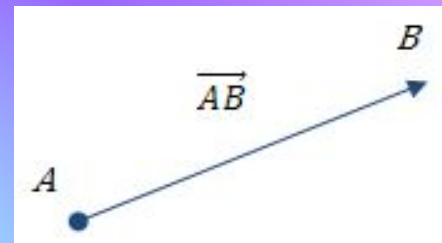
$ax + by = c$, де a , b і c - деякі числа (a і b не дорівнюють нулю одночасно)

Рівняння	Значення a, b, c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c будь-які	Невертикальна пряма
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c -будь-яке	Вертикальна пряма
$ax + by = c$	$b = a = c = 0$	Вся координатна площина
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—————



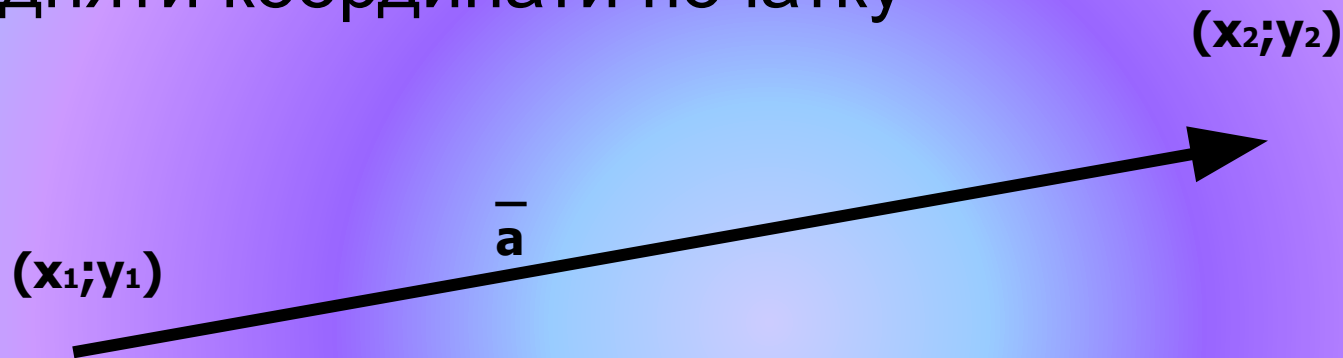
ВЕКТОР. ПОЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРА

- **Вектором** називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, в якому виділено початок і кінець
- Вектори позначають так: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$
- Або за початком і кінцем: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.



Щоб знайти координати вектора

потрібно від координат кінця вектора
відняти координати початку

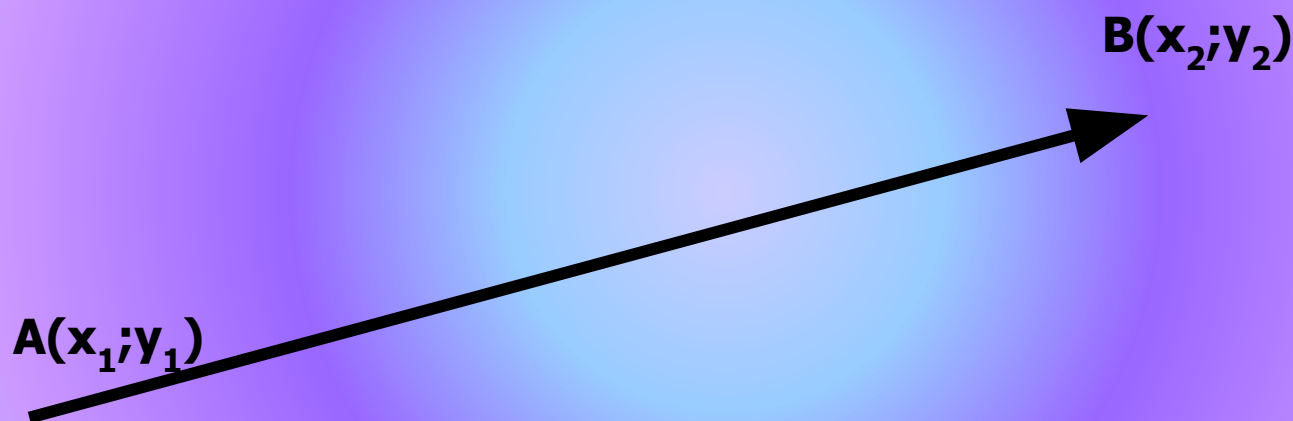


$$\vec{a}(a_1; a_2)$$

$$a_1 = x_2 - x_1$$

$$a_2 = y_2 - y_1$$

Абсолютна величина вектора
обчислюється за формулою



$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ДІЇ З ВЕКТОРАМИ

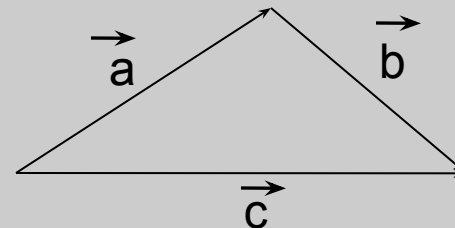
- Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ з координатами a_1, a_2 і b_1, b_2 називається вектор $\vec{c}$ з координатами $a_1 + b_1, a_2 + b_2$, тобто
$$\vec{a}(a_1, a_2) + \vec{b}(b_1, b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$$

- Закони додавання

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$



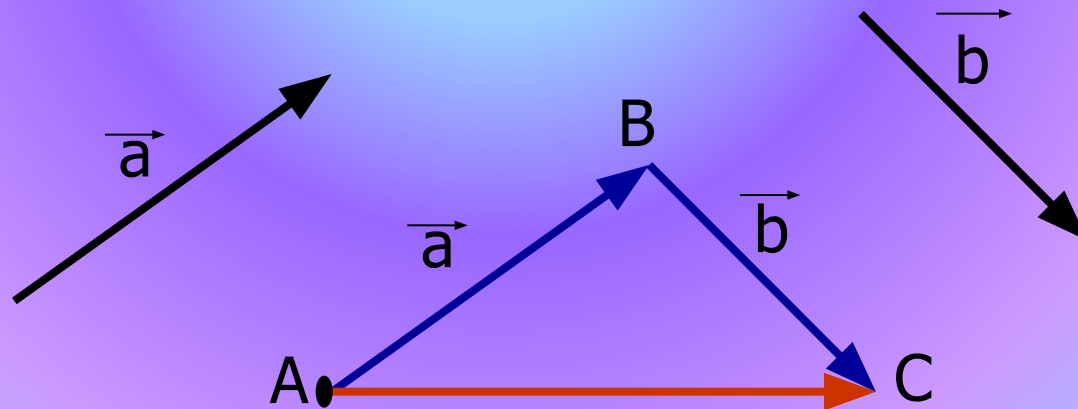
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Сума двох векторів

Правило трикутника

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два вектори. Позначимо довільну точку A і відкладемо від неї $\vec{AB} = \vec{a}$, потім від точки B відкладемо вектор $\vec{BC} = \vec{b}$.

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$



Закони додавання векторів

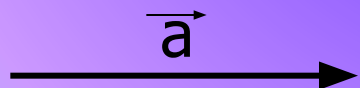
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переставний закон)

Правило паралелограма

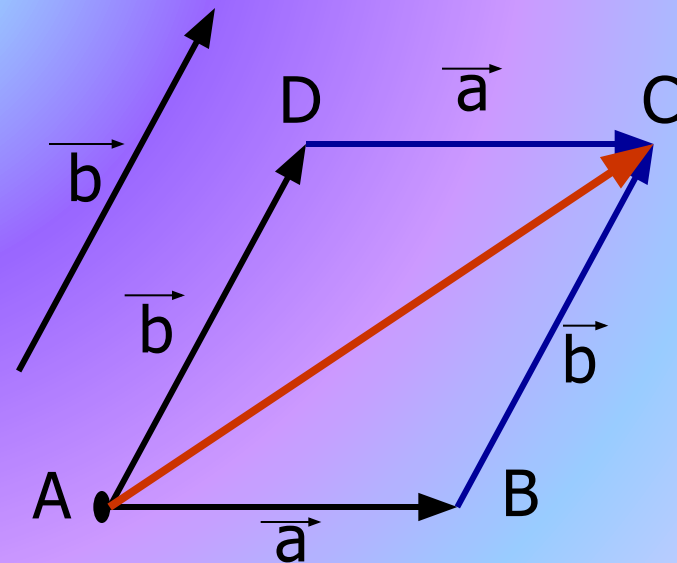
Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два вектори. Позначимо довільну точку A і відкладемо від неї $\vec{AB} = \vec{a}$, потім вектор $\vec{AD} = \vec{b}$. На цих векторах побудуємо паралелограм $ABCD$.

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{b} + \vec{a}$$



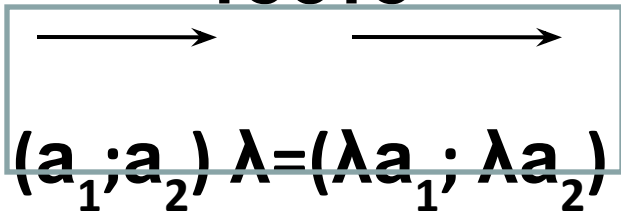
2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
(сполучний закон)



МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО.

**Добутком
вектора $(a_1; a_2)$ на
число λ**

**називається
вектор $(\lambda a_1; \lambda a_2)$,
тобто**


$$(a_1; a_2) \lambda = (\lambda a_1; \lambda a_2)$$

**Закони множення
вектора на число**

Для будь-якого
вектора $\vec{a}$ та чисел λ, μ

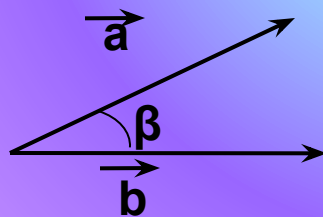
$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

Для будь-яких двох
векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та
числа λ

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ називається число $a_1 b_1 + a_2 b_2$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$



Список використаних джерел

ЛІТЕРАТУРА

- Апостолова Г.В. Геометрія: 9: дворівн. підруч. для загальноосвіт. навч.закл. – К.: Генеза, 2009.
- Апостолова Г.В. Геометрія 7 кл. : підруч. для загальноосвітніх навч.закл. – К.: Генеза, 2008.
- Апостолова Г.В. Геометрія 8 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч.закл. – К.: Генеза, 2008.
- Роєва Т.Г., Синельник Л.Я., Кононенко С.А. Геометрія у табличках 7-9 класи: Навч. посібник. – 2-ге вид., випр. і допов. –Х.: Видавнича група “Академія”, 2001. – 128 с.

ІНТЕРНЕТ-РЕСУРСИ

<http://www.dgeometry.ru/links.html>

<http://pcmath.ru/?parent=16&page=16>

