

КОМБИНАТОРИКА



Оглавление

- Что такое комбинаторика?
 - Факториал
 - Перестановки. Размещения.
Комбинации
 - Правила суммы, произведения
 - Примеры решения задач
 - Выбор формулы
- 
- The bottom right corner of the slide features a decorative graphic consisting of several sets of concentric circles, resembling ripples in water, rendered in a light yellow-green color.

Термин «**комбинаторика**» происходит от латинского слова «combinā», что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять».

Комбинаторика - раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов в соответствии с данными условиями.

Знание комбинаторики необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, криптографам и другим специалистам.



Читаем:
 $n!$
 n (эн) - факториал

Произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до n обозначается $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$



Перестановки. Размещения. Комбинации

Определение	Пример
Перестановкой из n элементов называется любое упорядоченное множество (порядок элементов существенен), которое состоит из n элементов. $P_n = n!$ где P_n - число перестановок из n элементов.	Сколькими способами можно расставить на полке 5 книжек? $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
Размещением из m элементов по n называется любое упорядоченное подмножество из n элементов данного множества, которое содержит m элементов ($n \leq m$). $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ A_m^n - число размещений m элементов по n ячейкам	Сколькими способами можно выбрать старосту класса и его заместителя, если в классе учатся 20 человек? $A_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{18!} = 19 \cdot 20 = 380$
Комбинацией из m элементов по n называется любое подмножество из n элементов (порядок элементов несущественен) данного множества, которое содержит m элементов ($n \leq m$). $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ где C_m^n - число комбинаций из m элементов по n ячейкам	Сколькими способами можно выбрать 2-х дежурный, если в классе учатся 20 учеников? $C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 18!} = 19 \cdot 10 = 190$



Правило суммы.

Правило произведения

Определение	Пример
Правило суммы. Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B – n способами (при этом выбор элемента A исключает выбор и элемента B), то A и B можно выбрать $(m+n)$ способами.	Если в тарелке лежат 5 груш и 4 яблока, то выбрать один фрукт можно 9 способами ($4+5=9$).
Правило произведения. Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B – n способами, то A и B можно выбрать $(m*n)$ способами.	Если в канцелярском магазине продают ручки 5 видов и тетради 4 видов, то выбрать набор из ручки и тетради (т.е. пару – ручку и тетрадь) можно $5*4=20$ способами, поскольку для каждой из 5 ручек можно взять любую из 4 тетрадей.

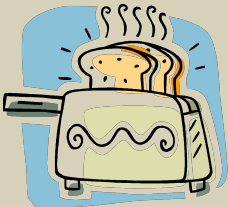
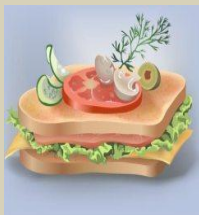


Задача 1

На завтрак Вова может выбрать: плюшку, бутерброд, пряник, или кекс, а запить он может: кофе, соком, кефиром. Сколько возможных вариантов завтрака?



Переберем все возможные варианты

Ответ: 15.

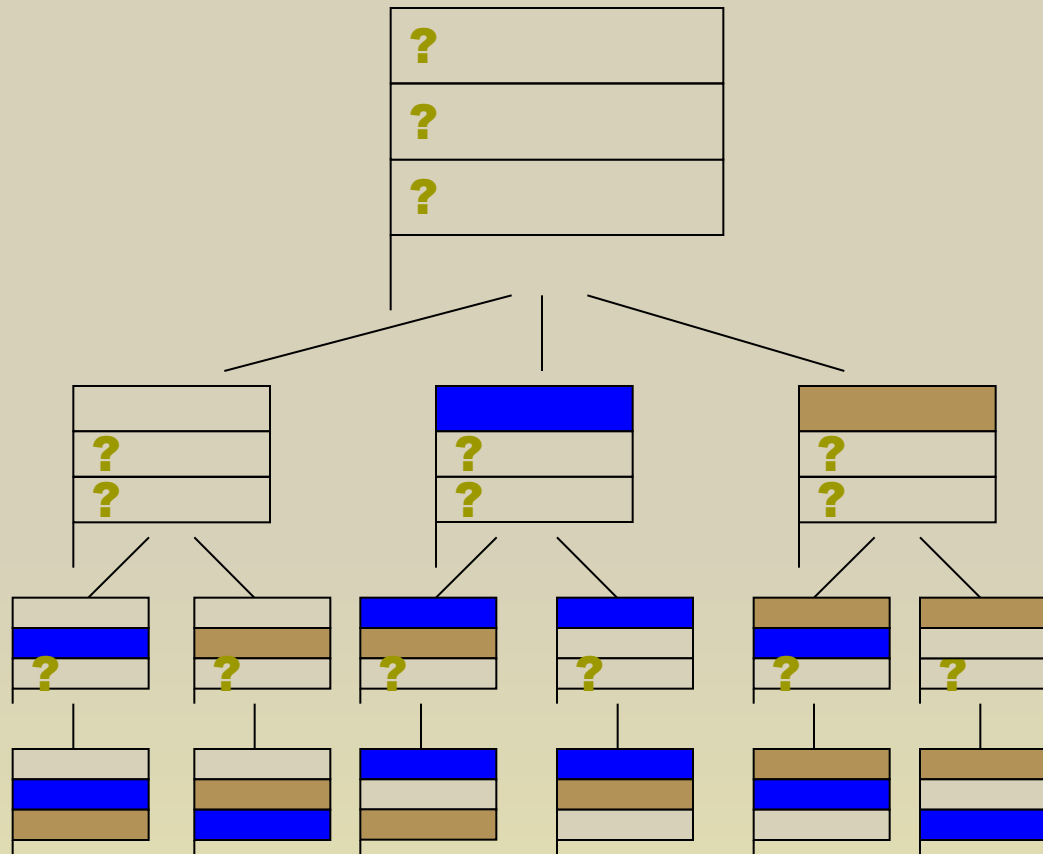


Задача 2

Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде трёх горизонтальных полос одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий, красный. Сколько стран могут использовать такую символику, при условии, что у каждой страны свой отличный от других стран флаг?



$$P_3 = 3! = 2 \cdot 3 = 6$$



Ответ: 6.



Задача 3



На соревнования по легкой атлетике приехала команда из 12-ти спортсменок. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4 по 100 м на первом, втором, третьем и четвертом местах?



Поскольку тренеру важно, в каком порядке будут бежать спортсменки, то порядок при выборе элементов учитывается. Количество способов выбрать из 12 спортсменок 4 для участия в эстафете равно количеству размещений из 12 элементов по 4 (без повторений), т.е.

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880.$$

Ответ: 11 880.



Задача 4

Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 9?



Переберем все возможные варианты

	0	2	4
1	10	12	14
2	20	22	24
4	40	42	44
5	50	52	54
9	90	92	94

Ответ: 15 чисел.



Воспользуемся формулой
комбинаций без повторений

Поскольку нам необходимо составить двузначные числа, то они не могут начинаться на 0. Выбрать первую цифру из 5-ти можно C_5^1 способами.

Чтобы число было четным, оно должно заканчиваться на 0, 2 или 4, т.е. четное число можно выбрать C_3^1 способами.

Тогда по правилу произведения четные двузначные числа можно составить $C_5^1 \cdot C_3^1$.

Получаем

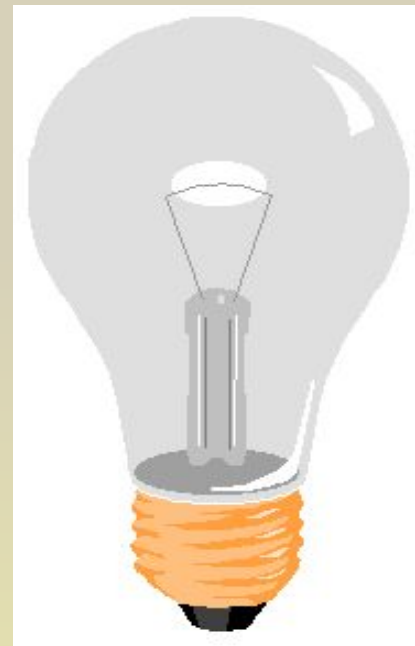
$$C_5^1 \cdot C_3^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 5 \cdot 3 = 15$$

Ответ: 15 чисел.

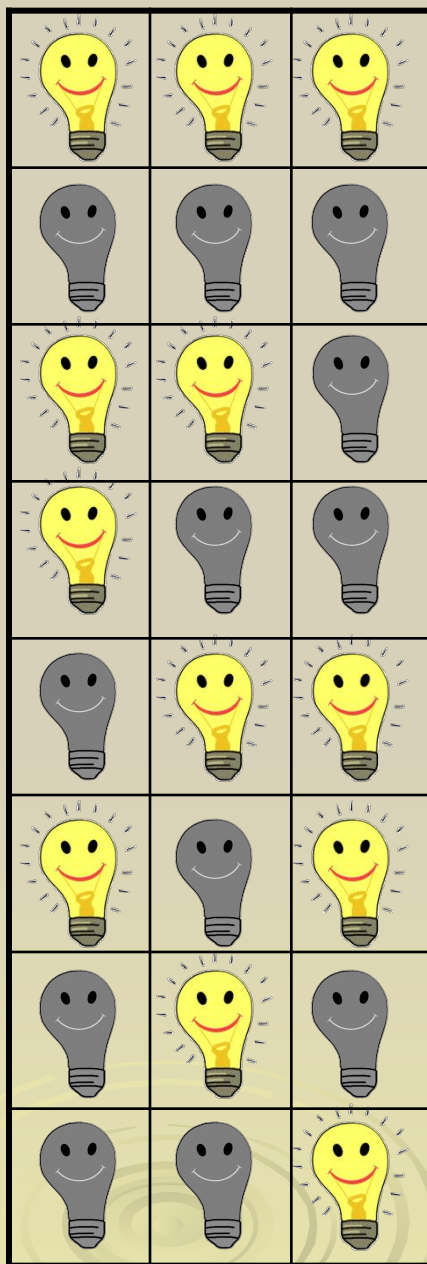


Задача 5

В коридоре висят три лампочки. Сколько имеется различных способов освещения коридора?



Переберем все возможные варианты



Ответ: 8 способов.



Воспользуемся правилом
умножения

Для каждой лампочки возможны два исхода, а лампочек три,
значит:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Воспользуемся формулой
размещений с повторениями

Нам необходимо разместить 2 предмета по трем ячейкам,
причем они могут повторяться. Имеем:

$$\tilde{A} = n^k = 2^3 = 8$$

Ответ: 8.



Выберите правило

№1. Из города А в город В ведут 5 дорог, а из города В в город С – 3 дороги. Сколькими способами можно проехать из города А в город С?

$$5*3=15$$

№2. На книжной полке стоят 3 книги по алгебре, 4 по геометрии и 5 по литературе. Сколькими способами можно взять с полки одну книгу по математике?

$$4+3=7$$

№3. В меню имеется 4 первых блюда, 3 – вторых, 2 – десерта. Сколько различных обедов можно из них составить?

$$4*3*2=24$$



**Учитывается ли
порядок элементов?**

Да

**Все ли элементы
входят в соединение?**

Да

Нет

Нет

Перестановки

Без повторений

$$P_m = m!$$

С повторениями

$$\tilde{P}_m = \frac{m!}{k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n}, \text{ где } k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$$

Размещения

Без повторений

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

С повторениями

$$\tilde{A}_m^n = m^n$$

Комбинации

Без повторений

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

С повторениями

$$\tilde{C}_m^n = C_{m+n-1}^n$$

