

За підручником М.І. Бурда,
Н.А. Тарасенкова

За основу взято роботу
учня 11 А класу СЗШ № 8
Шевчука Богдана

Геометрія 10 клас

Основні поняття та аксіоми
стереометрії

Аксиоми



План уроку

- 1). Поняття стереометрії як науки
- 2). Аксиоми, означення, теореми
- 3). Аксиоми планіметрії
- 4). Аксиоми стереометрії
- 5). Наслідки з аксіом
- 6). Первинне закріплення вивченого матеріалу

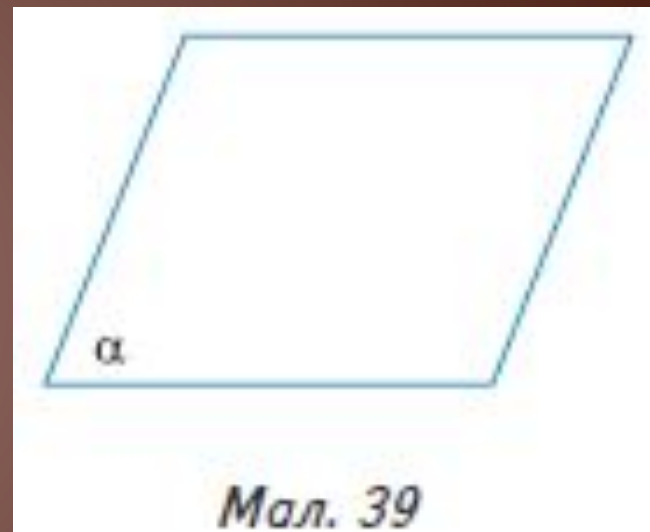
Основні поняття стереометрії

У стереометрії вивчають властивості фігур у просторі. Для цього, як і в планіметрії, використовують **аксіоматичний метод**.

Спочатку обирають **основні поняття – основні**

фігури та основні відношення. Їх тлумачать через приклади, не даючи означень. Також приймають без доведення вихідні істинні твердження – **аксіоми**. Всі інші поняття визначають, а всі інші твердження доводять.

Основними фігурами у просторі є **точка, пряма і площина**, а основними відношеннями – відношення **«належати»**, **«лежати**



Мал. 39

Основні фігури у просторі

Як і в планіметрії, точки позначають великими латинськими буквами $A, B, C, \dots$,
прямі – малими латинськими буквами $a, b, c, \dots$.

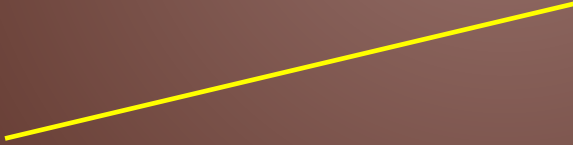
Площини позначають малими грецькими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма) ...

Основними фігурами у просторі є:

Точка


 A

Пряма


 a

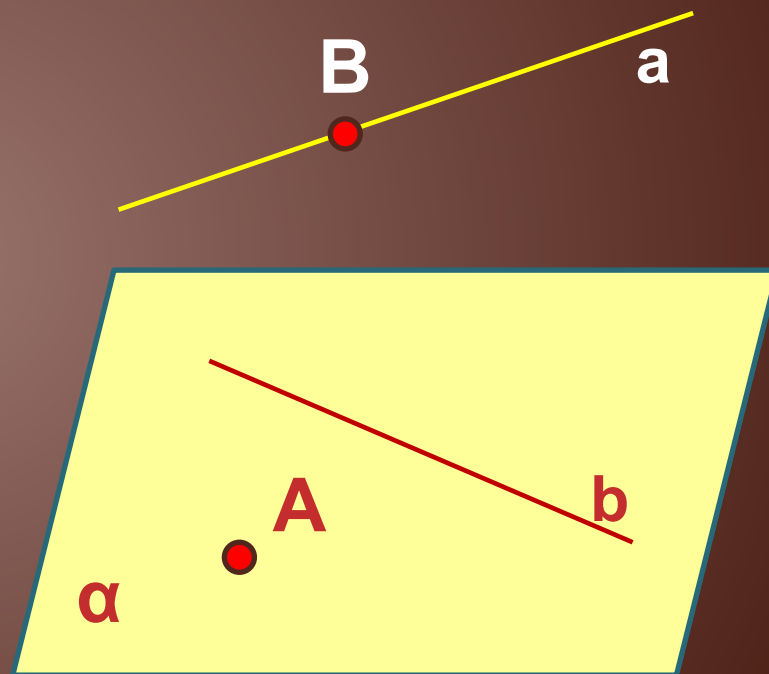
Площина


 α

Відношення “належати”

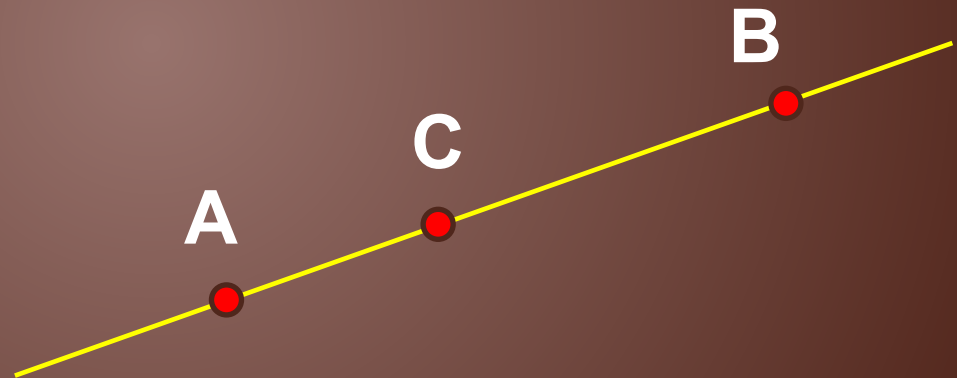
Введення у просторі нової геометричної фігури – площини – потребує уточнення основних відношень та розширення системи аксіом планіметрії.

Відношення “належати” розглядають не лише для точки і прямої – точка *лежить на прямій*, але й для точки і площини та прямої і площини – точка (пряма) *лежить у площині*.



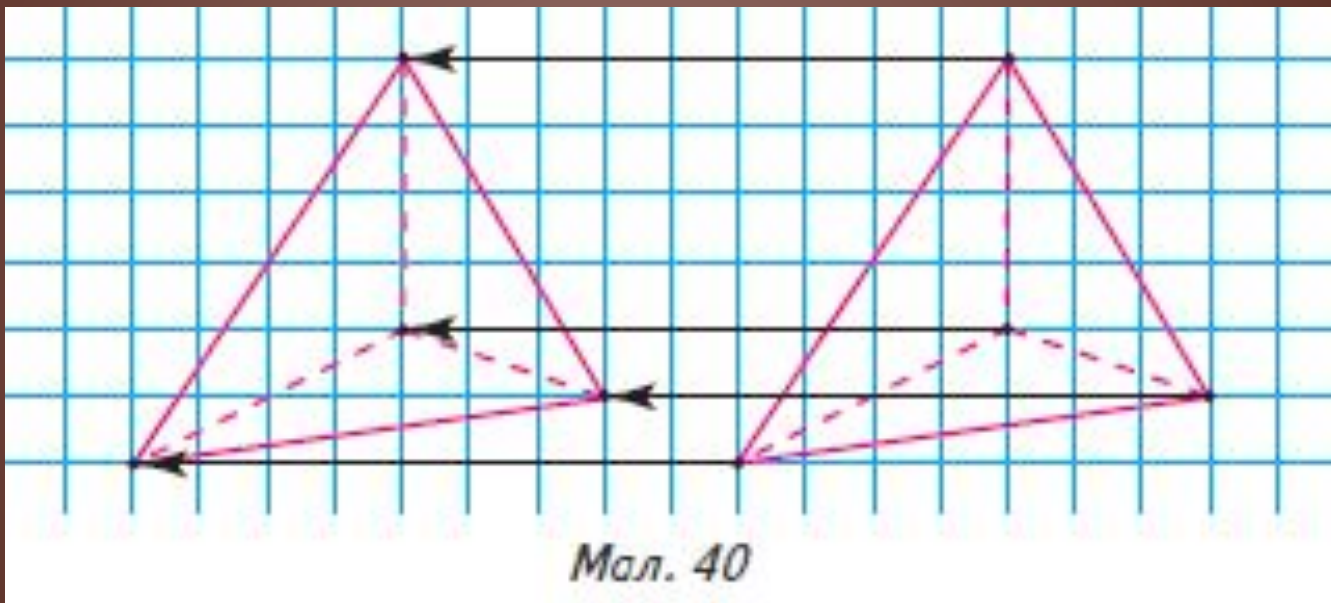
Відношення “лежати між”

Відношення “лежати між” для трьох будь-яких точок прямої не залежить від її розміщення в просторі, тому це відношення є основним і в стереометрії.



Відношення “накладання”

Відношення “накладання” у просторі розуміють як суміщення фігур відповідно всіма своїми точками (мал. 40).



Система аксіом стереометрії

Система аксіом стереометрії складається з двох частин. Перша з них

включає всі аксіоми планіметрії. Вони виконуються в кожній площині простору.

пам'ятайте:

1) властивості всіх фігур, які ви вивчали в планіметрії, справджуються

в кожній площині простору;

2) якщо йдеться про дві точки (прямі), то ці точки (прямі) є різними,

тобто вони не збігаються.

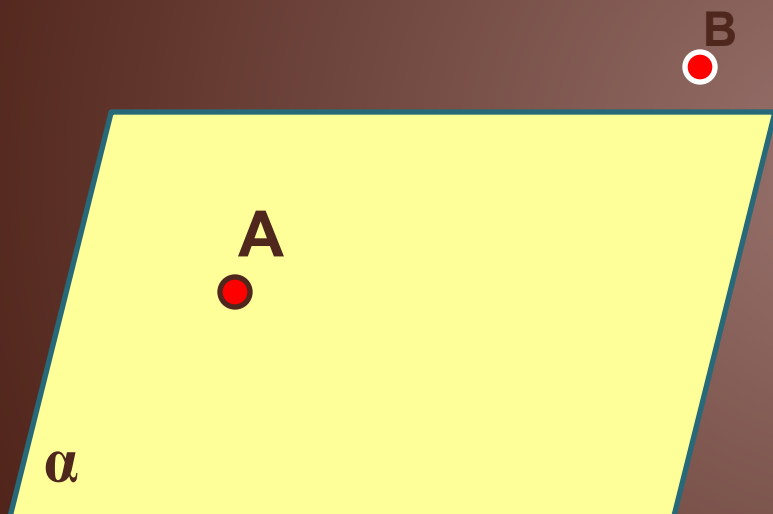
Друга частина системи аксіом стереометрії включає аксіоми, що характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин. Коротко

називатимемо їх **аксіомами стереометрії**.

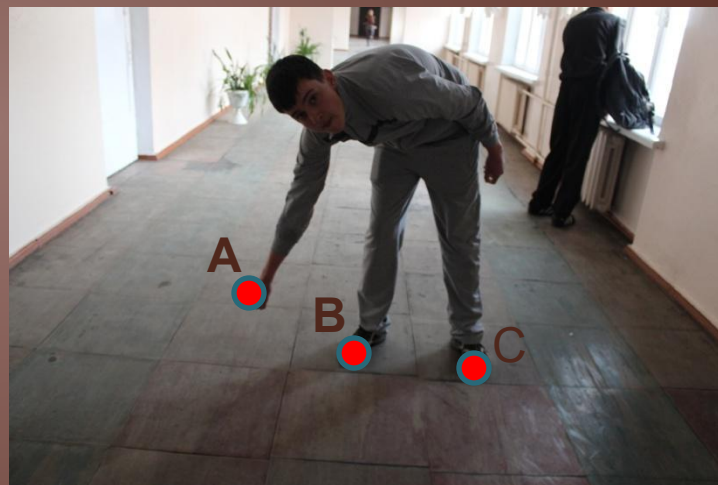
Аксиома 1

Належності точки площині

Існують точки, що лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній. Записуємо: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.



Точка А лежить у площині α ,
точка В не лежить у площині α .

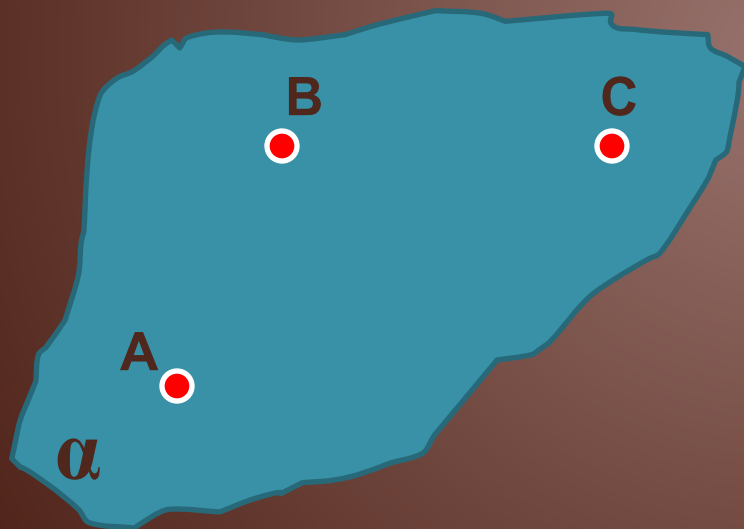


Ступні піддослідного «Павла»
знаходяться у площині
підлоги а кисть лівої руки ні

Аксіома 2

Існування і єдиності площини

Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.



Площина α утворена трьома точками A, B, C.
Площина ABC – це площина α .



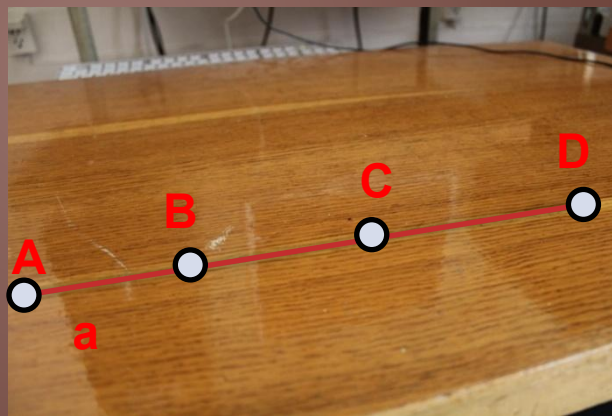
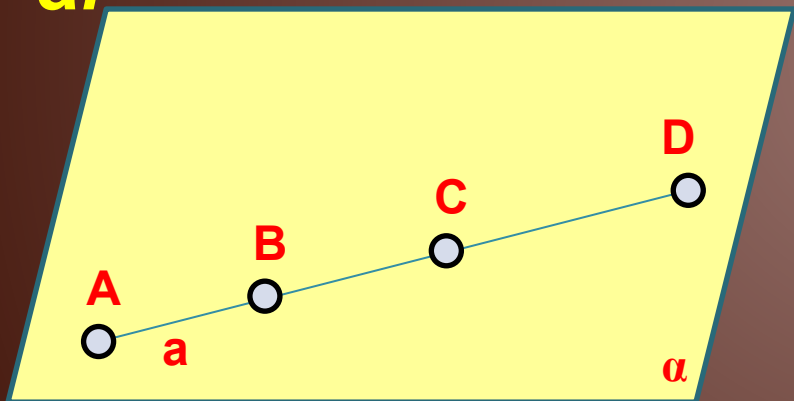
Завдяки цій властивості площину можна позначати трьома її точками

Аксиома 3

належності прямої площині

Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.

Записуємо: **якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то AB лежить в α .**

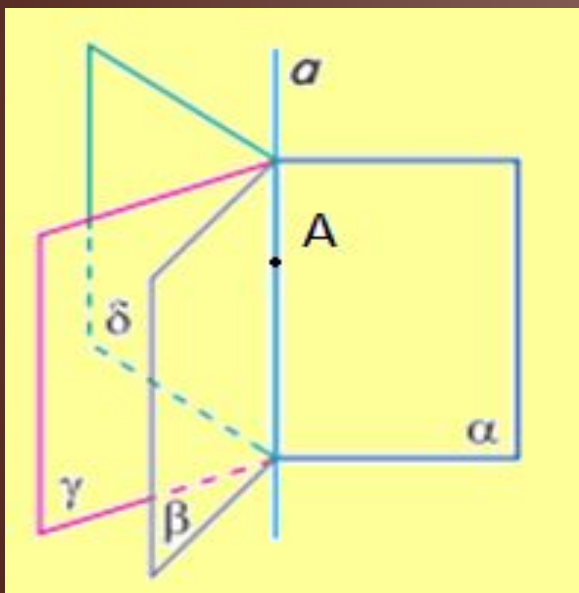


Якщо точки A і D (прямої a) лежать у площині, то можна стверджувати, що точки B та C (прямої a), також лежать у тій самій площині

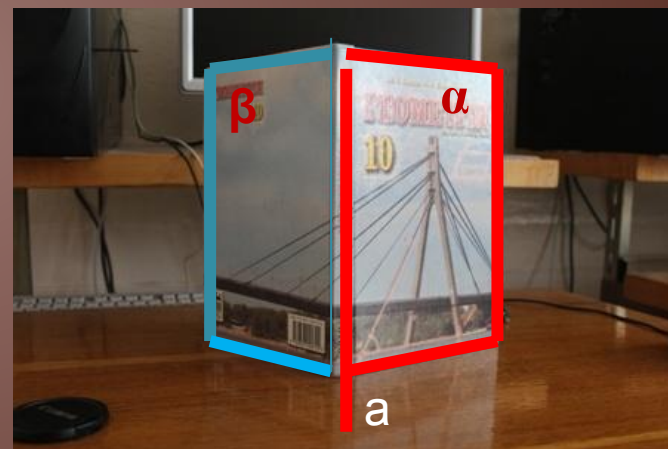
Аксиома 4

про перетин двох площин

Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що містить цю точку.



Усі площини мають спільну точку A , тому вони перетинаються по прямій, що містить цю точку, тобто пряму a

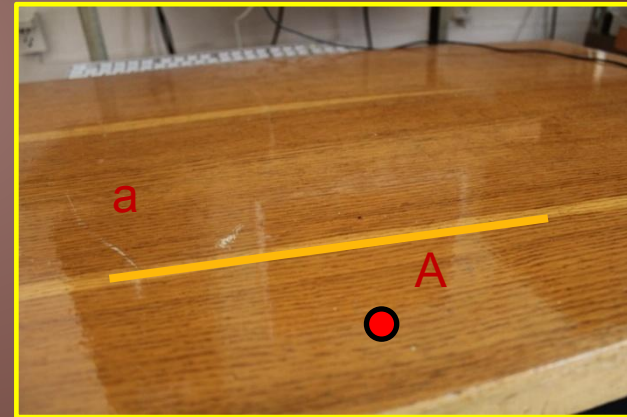
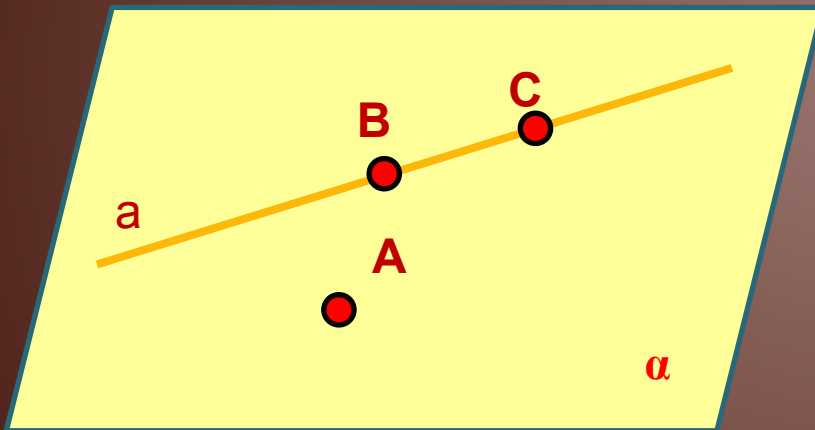


Сторінки підручника (α і β) мають спільну точку A , тобто вони перетинаються по прямій, що містить цю точку (пряма a – ребро книжки)

Наслідки

Наслідок 1

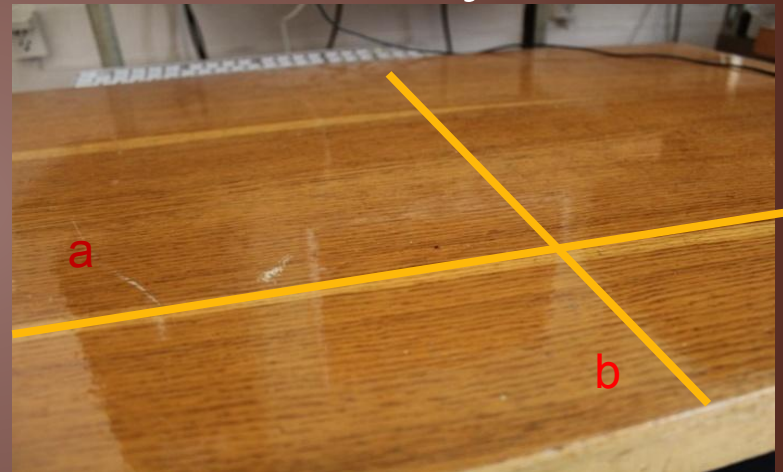
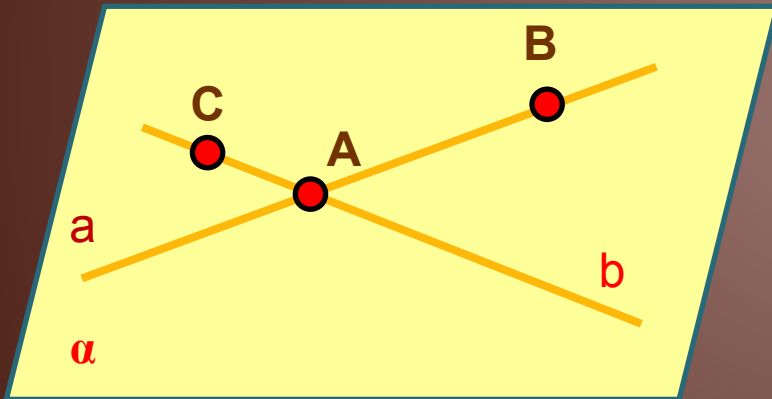
Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.



Через пряму a і точку A , проведено ЄДИНУ можливу площину. Доведемо. Будь-які дві точки даної прямої (B і C) разом з даною точкою (A) утворюють три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить площина і до того ж тільки одна. За аксіомою 3, дана пряма лежить у цій площині.

Наслідок 2

Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.



Через прямі a та b проведено ЄДИНУ можливу площину. Доведемо. Якщо на кожній з даних прямих взяти по одній точці, відмінній від точки перетину даних прямих, та точку перетину (мал. 44), то утвориться три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить площина і до того ж тільки одна. За аксіомою 3, кожна з даних прямих лежить у цій площині.

A close-up photograph of several pieces of colored chalk (blue, white, yellow) lying on a light-colored wooden surface. The chalk is slightly out of focus, creating a soft background for the title.

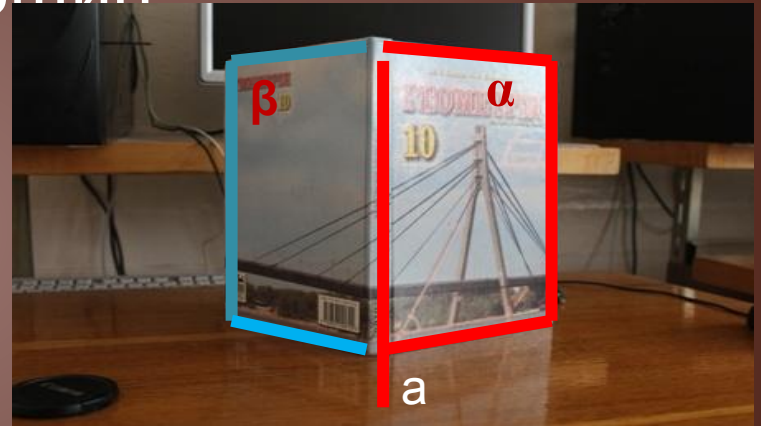
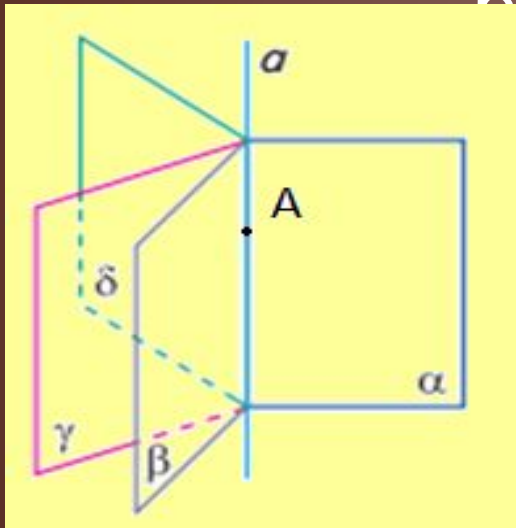
Висновок

Площину можна задати:

- 1) трьома точками, які не лежать на одній прямій;
- 2) прямою і точкою, яка не лежить на ній;
- 3) двома прямими, що перетинаються.

Наслідок 3

Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин



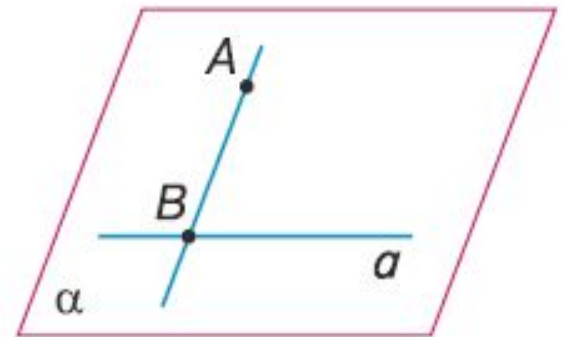
Доведення. Через пряму a і точку A , що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Позначимо її α . Але, за аксіомою 1, у просторі існує безліч точок, що не лежать у площині α . Через кожну із цих точок і дану пряму можна провести площину, відмінну від площини α . Тому таких площин безліч.

Опорна задача

Задача. Дано пряму a і точку A , що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку A і перетинають пряму a , лежать в одній площині.

Розв'язання. Через дані точку A і пряму a , за наслідком 1 з аксіом стереометрії, проходить площина і до того ж тільки одна. Позначимо її α (мал. 46). Через точку A проведемо довільну пряму так, щоб вона перетинала пряму a . Позначимо точку їх перетину B . Точки A і B лежать у площині α . Тоді, за аксіомою 3, пряма AB лежить у площині α . Аналогічно можна довести, що будь-яка інша пряма, що проходить через точку A і перетинає пряму a , лежить у площині α .



Мал. 46

Це цікаво



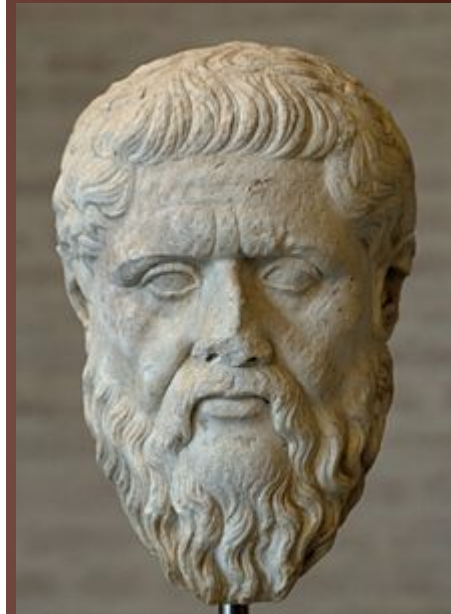
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Термін «стереометрія» походить від грецьких слів $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\omicron\varsigma$ — просторовий і $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\omicron$ — вимірювати. Його автором вважають давньогрецького вченого Платона (427 — 347 до н. е.) — засновника філософської школи в Афінах, яка мала назву «Академія». Головною заслугою Платона в історії математики вважають те, що він вперше висунув і всіляко відстоював ідею про необхідність знання математики кожною освіченою людиною. На дверях його Академії був напис: «Нехай не входить сюди той, хто не знає геометрії».

2. Ви вже знаєте, що площину можна задати або трьома точками, що не лежать на одній прямій (твердження 1), або прямою і точкою, що не лежить на цій прямій (твердження 2), або двома прямими, що перетинаються (твердження 3). У підручнику перше твердження було прийнято як аксіома, а два інші доведені. Виявляється, що будь-яке із цих тверджень можна обрати за аксіому. Тоді два інших твердження можна довести, спираючись на обрану аксіому.



*Рафаель Санті
Леонардо да Вінчі
в образі Платона*



Платон, 428 або 427 до н. е.,
Афіни,
давньогрецький
філософ, учень
Сократа, учитель
Аристотеля.

A close-up photograph of several pieces of colored chalk (blue, white, yellow) resting on a blackboard surface. The background is slightly blurred, focusing on the chalk.

Первинне закріплення вивченого матеріалу

1. Що вивчає стереометрія?
2. Назвіть основні геометричні фігури у просторі. як їх позначають?
3. Які відношення вважають основними у стереометрії?
4. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
5. Сформулюйте наслідки з аксіом стереометрії.

Первинне закріплення вивченого матеріалу

A close-up photograph of several pieces of colored chalk (blue, white, yellow) lying on a light-colored wooden surface. The background is slightly blurred.

Усні вправи

50'. Які поняття вводять без означень у стереометрії?

51'. Що таке аксіома? Теорема? Наведіть приклади.

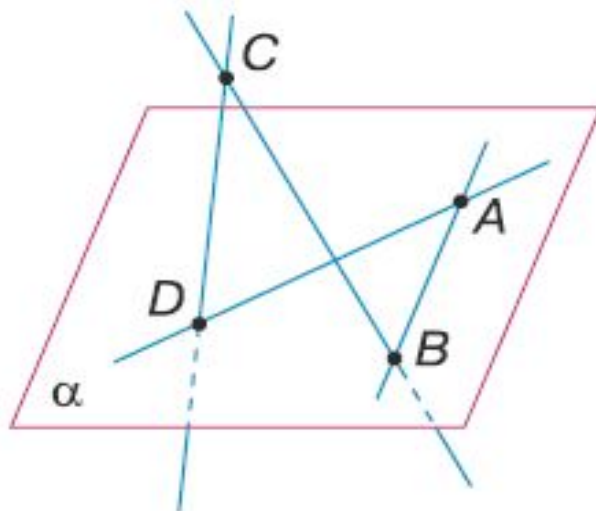
52'. Які з наведених фігур є основними в стереометрії:

1) точка; 2) відрізок; 3) промінь; 4) пряма; 5) кут; 6) трикутник; 7) коло; 8) ромб; 9) куб; 10) куля; 11) площаина; 12) призма?

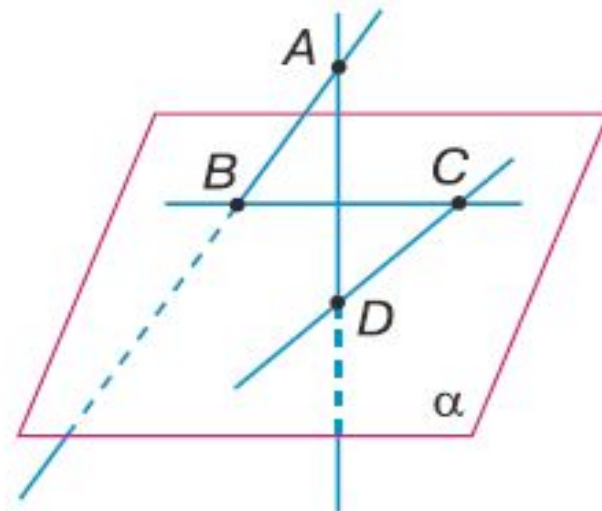
53'. Які з наведених відношень є основними в стереометрії:

1) належати; 2) перетинати; 3) лежати між; 4) дорівнювати;
5) бути подібним; 6) накладання?

Тренувальні усні вправи



Мал. 47



Мал. 48

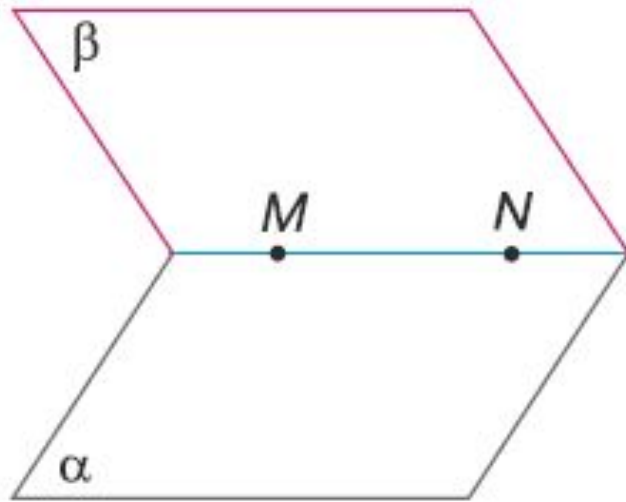
54'. На малюнках 47, 48 зображено площину α і прямі AB , BC , AD і CD .

- 1) Які з точок A , B , C і D лежать у площині α ?
- 2) Яку іншу назву можна дати площині α ?
- 3) Які з прямих лежать у площині α ?

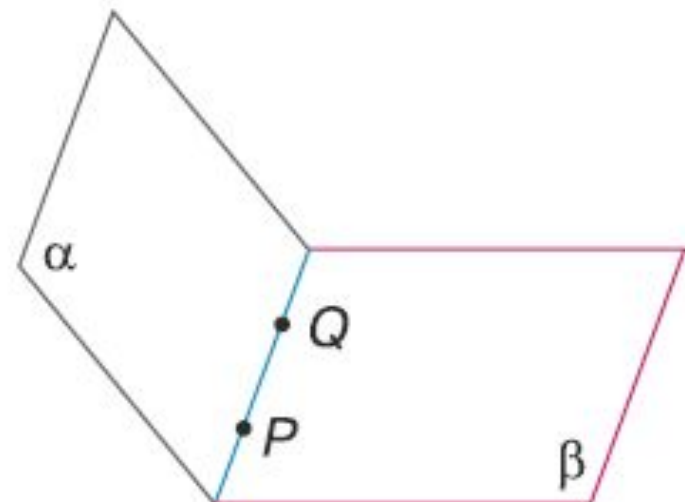
Тренувальні усні вправи

55'. За даними на малюнках 49, 50 з'ясуйте:

- 1) які спільні точки мають площини α і β ;
- 2) по якій прямій перетинаються площини α і β .



Мал. 49



Мал. 50

Тренувальні усні вправи

57°. Які з наведених аксіом планіметрії справджуються у просторі:

- 1) через будь-які дві точки можна провести єдину пряму;
- 2) з будь-яких трьох точок прямої лише одна з них лежить між двома іншими;
- 3) через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній;
- 4) на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини і тільки один;
- 5) кожен відрізок має певну довжину, більшу за нуль;
- 6) довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин;
- 7) від будь-якого променя по один бік від нього можна відкласти кут заданої градусної міри і тільки один;
- 8) кожен кут має градусну міру, більшу за нуль і меншу від 180° ;
- 9) градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180° ;
- 10) градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається променем, що проходить між його сторонами?

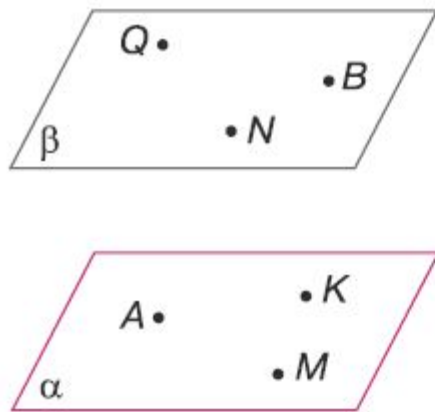
Тренувальні вправи.

Коментування

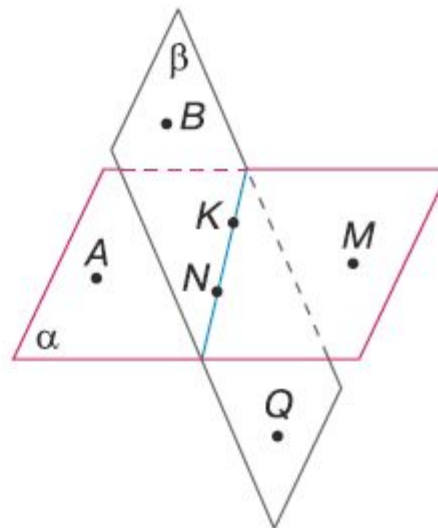
59. За даними на малюнках 51, 52 визначте точки:

- 1) які лежать у площині α ;
- 2) не лежать у площині β ;
- 3) через які не проходить площина α ;
- 4) через які проходить площина β .

Зробіть відповідний запис.



Мал. 51



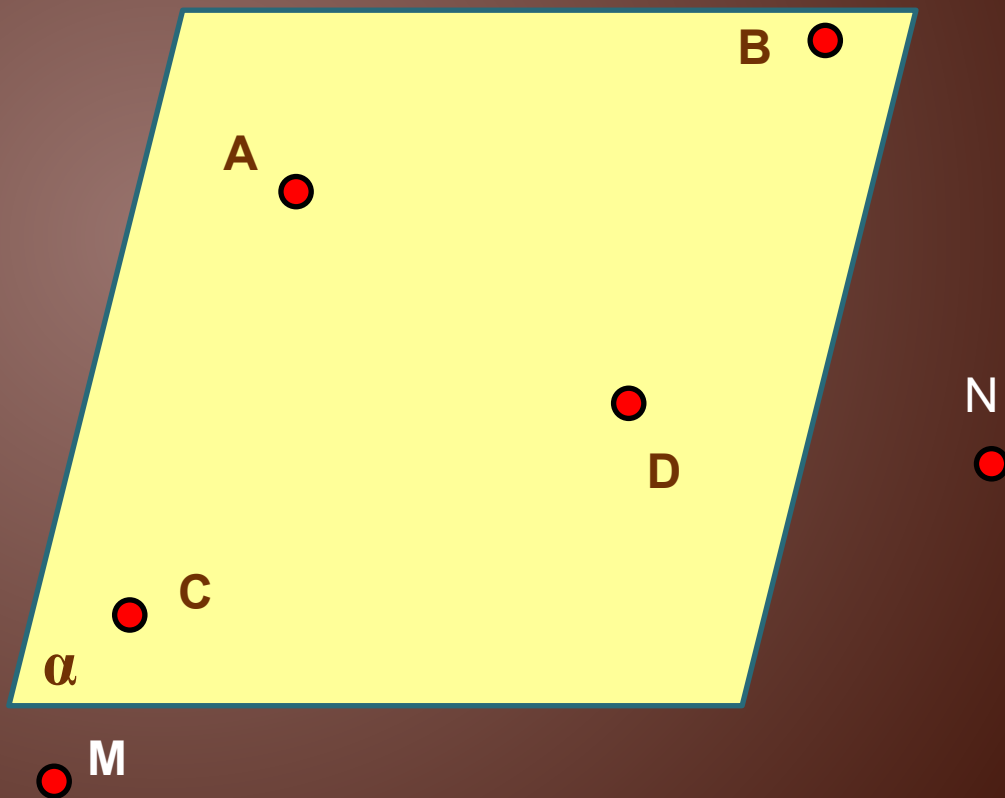
Мал. 52

Задача №60

Точки A, B, C, D належать площині α . Точки M, N знаходяться поза площиною.

Чи можна дати площині іншу назву :

- 1) AN;
- 2) ADB;
- 3) BCDM;
- 4) ACD;
- 5) BAC;
- 6) CNB;
- 7) DAB;
- 8) MDC;
- 9) CAD:

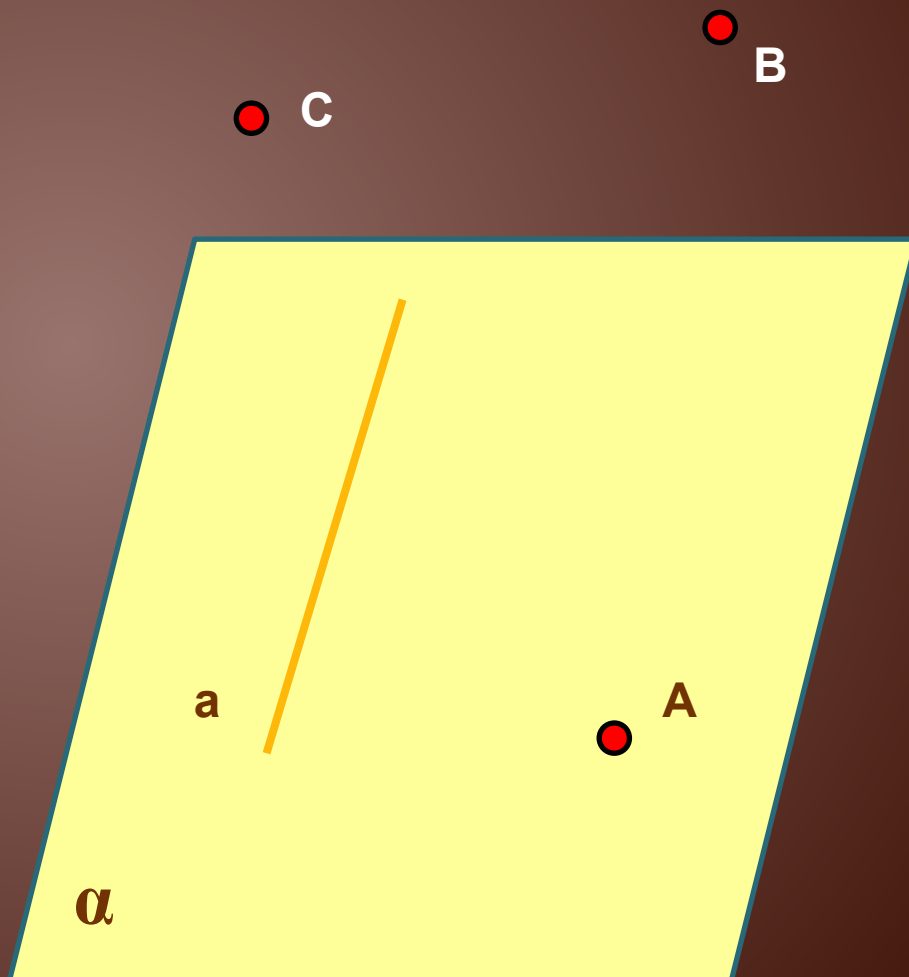


Задача № 63

Пряма a і точка A лежать у площині α .
Точки B та C не лежать у даній площині.

Чи визначають площину, відмінну від площини α :

1. пряма a і точка B ;
2. пряма a і точка C ;
3. прямі AB і AC ;
4. прямі AB і BC ;

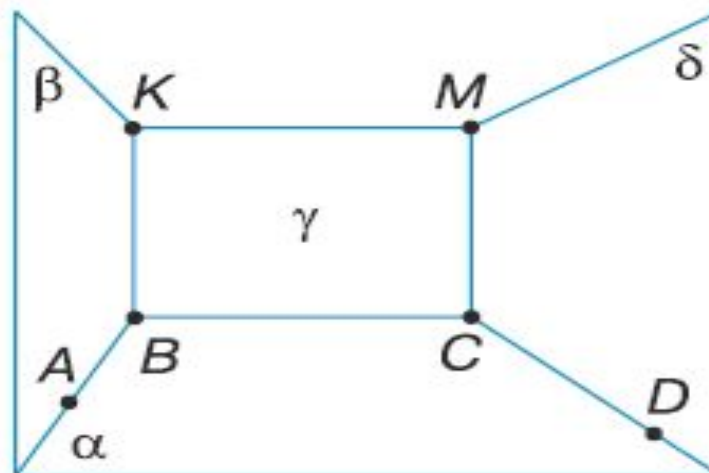


Задача № 64

64°. За даними на малюнку 54 заповніть таблицю 3 за зразком, наведеним у другому її стовпчику.

Таблиця 3

Площини	$\alpha \cap \beta$	$\alpha \cap \gamma$	$\alpha \cap \delta$	$\beta \cap \gamma$	$\gamma \cap \delta$
Спільні точки	$A \in B$				
Спільна пряма	AB				



Мал. 54

Задачі практичного змісту

77. Чому штативи багатьох приладів (фотоапарата, теодоліта тощо) виготовляють у формі триноги?



Теодоліт - інструмент, який використовується для вимірювання горизонтальних і вертикальних кутів. Теодоліт складається з телескопа, встановленого на тринозі, яка обертається навколо вертикальної осі.



Теодоліт.

Теодоліт - топографічний інструмент, служить для точного вимірювання кутів між різними точками, для чого проводиться їх зйомка в трьох вимірах.





78. Щоб перевірити, чи є дана поверхня плоскою, до неї прикладають лінійку в різних напрямках. Край лінійки, дотикаючись до поверхні у двох точках, повинен повністю лежати в ній. На чому ґрунтується така перевірка?
79. Перевіряючи, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині, тесля користується двома нитками. Як він робить це?

Аксиоми стереометрії в побуті, будівництві



Триніжка для стійок.



Пюпітр



Тринога для
лазерних рівнів



Тринога кострова