

Урок 11

Функция распределения случайных величин

- Для характеристики поведения НСВ используют не вероятность события $P(X=x)$, а $P(X<x)$, где x – некоторое фиксированное число.

Если x изменяется, то изменяется и $P(X<x)$, т.е. $P(X<x)$ является функцией.

- **Определение.** *Функцией распределения* случайной величины X называется функция $F(x)$, задающая вероятность того, что случайная величина $X<x$, т.е. $F(x)=P(X<x)$. Эта функция называется *интегральной функцией распределения*.

Построение интегральной функции распределения.

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

$$x < x_1 \quad F(x) = P(x < x_1) = 0$$

$$x_1 \leq x < x_2 \quad F(x) = P(x < x_2) = P(x = x_1) = p_1$$

$$x_2 \leq x < x_3 \quad F(x) = P(x < x_3) = P(x = x_1) + P(x = x_2) = p_1 + p_2$$

...

$$x_{n-1} \leq x < x_n \quad F(x) = P(X < x_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$$

$$x \geq x_n \quad F(x) = 1$$

Задача 1.

- Построить интегральную функцию распределения и ее график, используя таблицу исходных данных:

X	1	3	4	5	7	8
P	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

$$x < 1 \quad F(x) = 0$$

$$1 \leq x < 3 \quad F(x) = 0,1$$

$$3 \leq x < 4 \quad F(x) = 0,1 + 0,2 = 0,3$$

$$4 \leq x < 5 \quad F(x) = 0,3 + 0,2 = 0,5$$

- $5 \leq x < 7 \quad F(x) = 0,5 + 0,3 = 0,8$

$$7 \leq x < 8 \quad F(x) = 0,8 + 0,1 = 0,9$$

$$x \geq 8 \quad F(x) = 0,9 + 0,1 = 1$$

■ График (коммулята)

$$x < 1 \quad F(x) = 0$$

$$1 \leq x < 3 \quad F(x) = 0,1$$

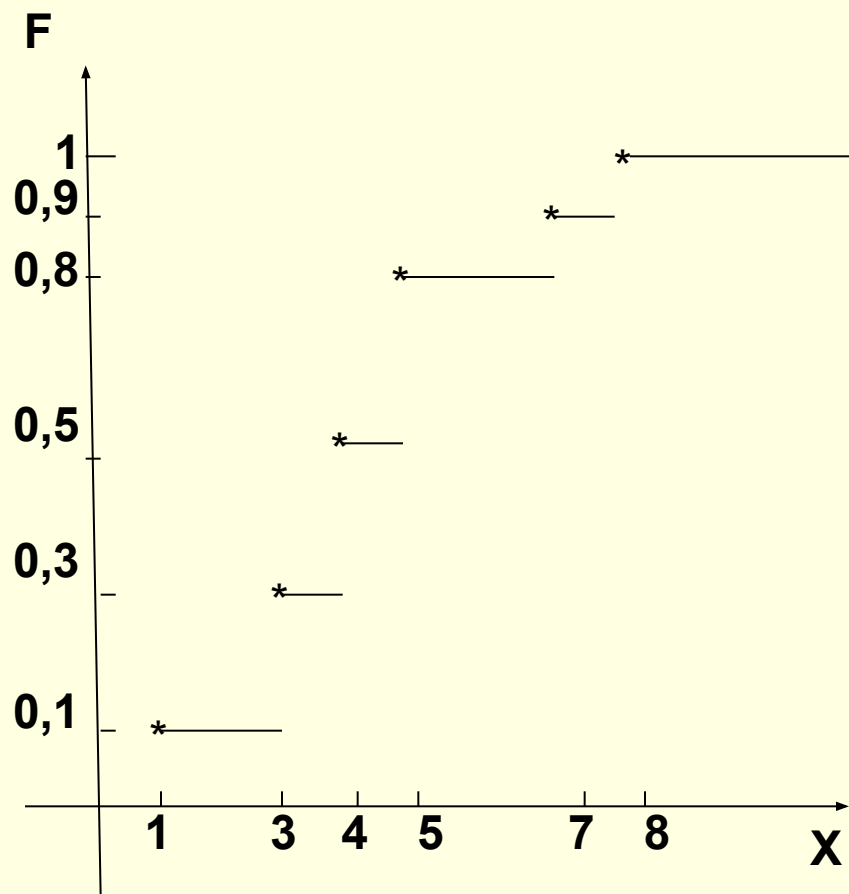
$$3 \leq x < 4 \quad F(x) = 0,1 + 0,2 = 0,3$$

$$4 \leq x < 5 \quad F(x) = 0,3 + 0,2 = 0,5$$

$$5 \leq x < 7 \quad F(x) = 0,5 + 0,3 = 0,8$$

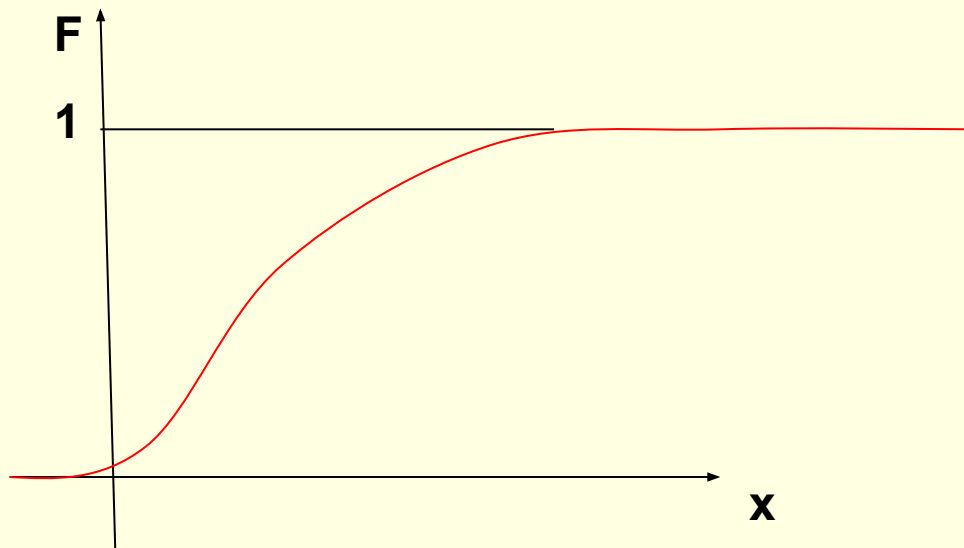
$$7 \leq x < 8 \quad F(x) = 0,8 + 0,1 = 0,9$$

$$x \geq 8 \quad F(x) = 0,9 + 0,1 = 1$$



Коммулята:

- При увеличении числа интервалов и увеличении числа возможных значений x ступенчатая кривая будет приближаться к плавной:



Свойства интегральной функции распределения:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ – неубывающая, т.е. $P(\alpha \leq x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

4. $P(\alpha) = 0$, где α – отдельно взятое значение

непрерывной СВ: $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} P(\alpha \leq x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 0$

5. $P(\alpha < x \leq \beta) = P(\alpha \leq x < \beta)$

Задача 2.

- Функция распределения СВ задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < \frac{\pi}{4} \\ a \cdot \sin(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}, \text{при } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ 1, \text{при } x \geq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

- Найти коэффициент a ; вероятность попадания значения СВ в интервал $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$ и построить график.

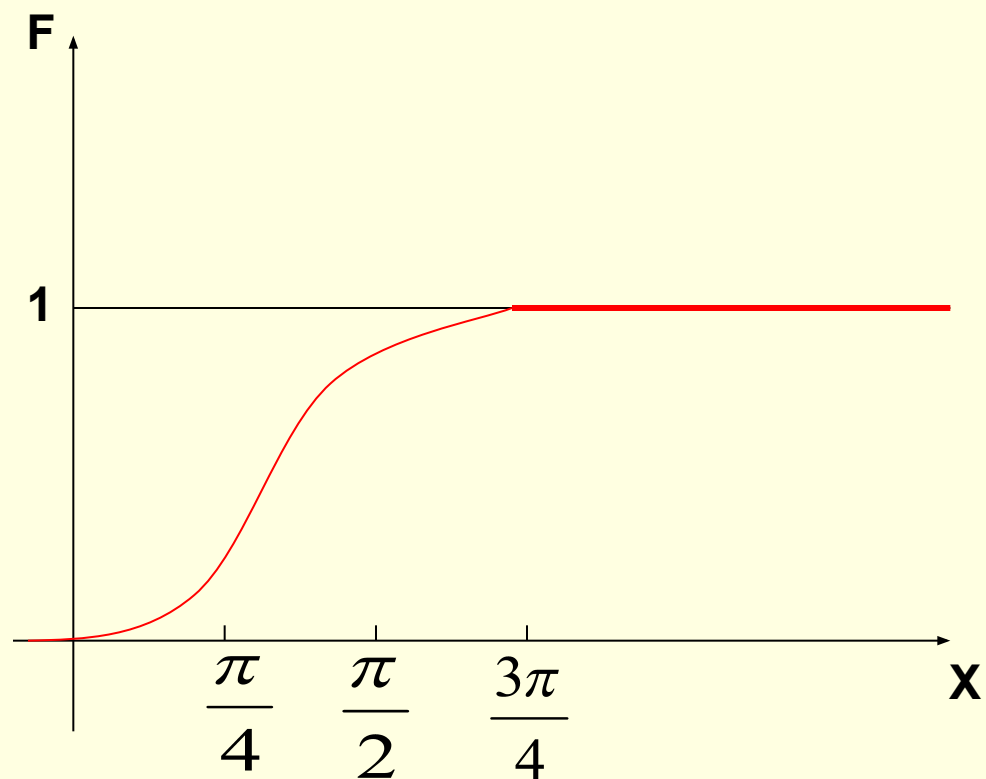
Решение:

$$1. \text{при } x = \frac{3\pi}{4} \quad F(x) = 1 \Rightarrow a \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = 1,$$

$$a \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2}.$$

$$2. \quad P\left(\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4}\right) = F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3.



Плотность распределения вероятности

- **Используя интегральную функцию распределения трудно судить о характере распределения СВ в небольшой окрестности точки на числовой прямой.**

- Пусть имеется НСВ с интегральной функцией распределения $F(x)$.

Рассмотрим вероятность попадания значений СВ на участок $(x; x + \Delta x)$

$$P(x < X \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x);$$

определим вероятность, которая приходится на единицу длины этого участка :

$$\frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = ?$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

- ***Дифференциальной функцией распределения или плотностью распределения называется первая производная интегральной функции распределения.***

■ **График:**



Кривая распределения

Свойства дифференциальной функции распределения

1. Для любого x , $f(x) \geq 0$;

2. $P(\alpha \leq x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$;

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$;

4. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$;

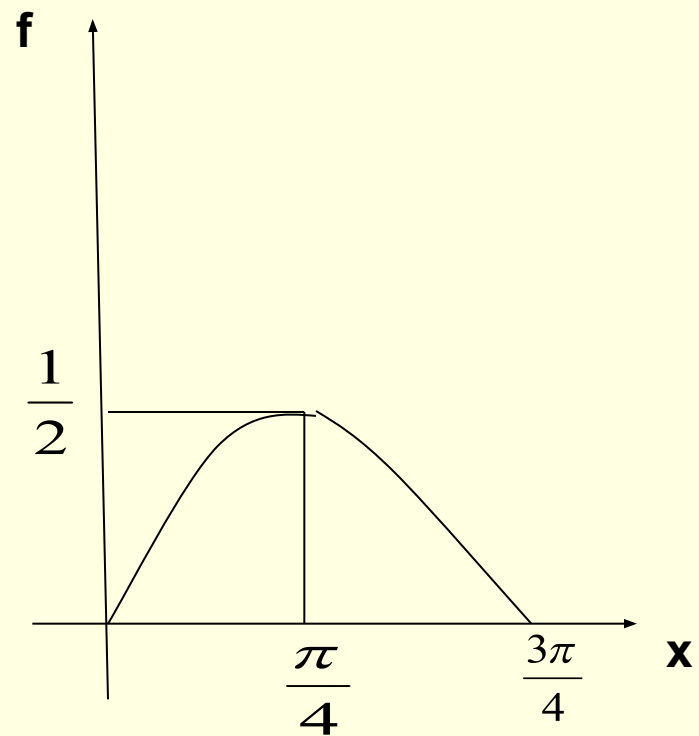
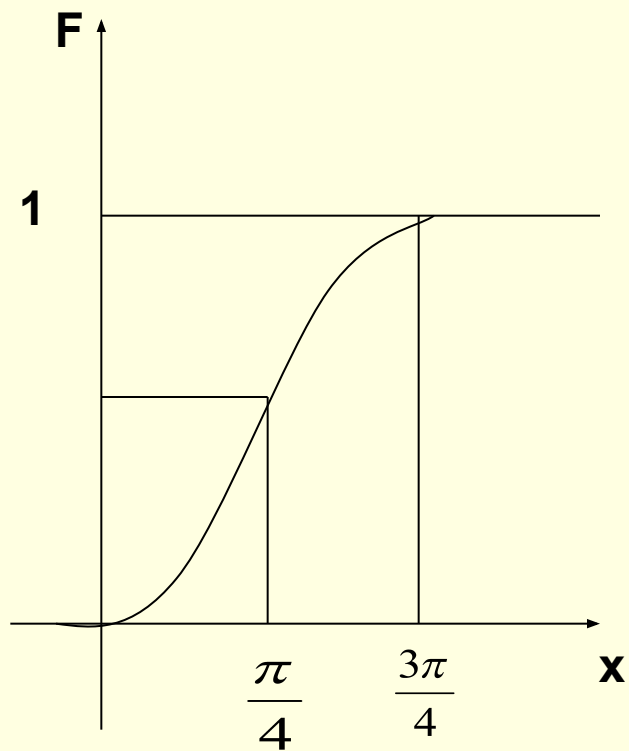
5. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$

Задача 3.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ 1, x > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, x < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}), \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ 0, x > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Графики:



Решить обратную задачу: составить интегральную функцию распределения по дифференциальной.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < -\frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ 0, x > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$x < -\frac{\pi}{4}, F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0;$$

