

Визначений інтеграл і його застосування

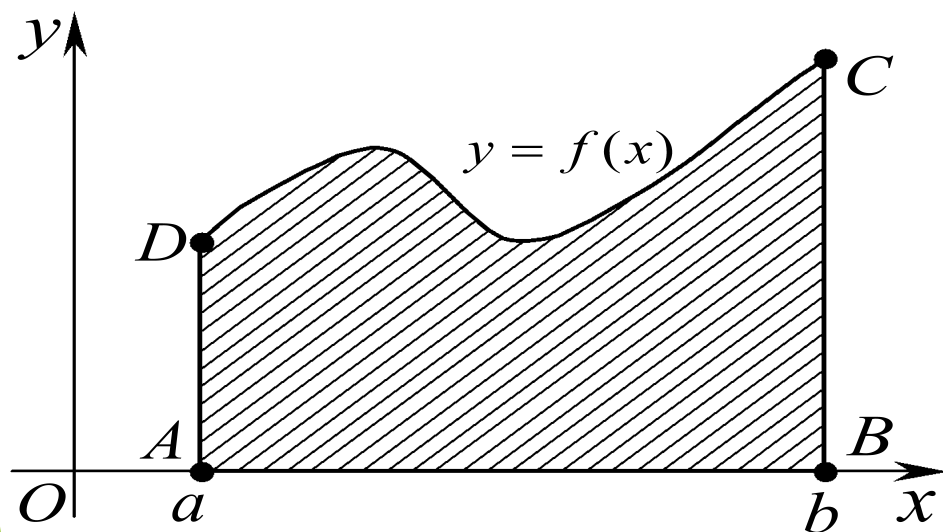
- 1. Визначений інтеграл і його властивості
- 2. Формула Ньютона-Лейбніца
- 3. Невласні інтеграли
- 4. Застосування інтегралів
- 5. Наближене обчислення визначених інтегралів

Визначений інтеграл і його застосування

Нехай $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$.

Означення. Фігура, що належить площині xOy і обмежена відрізком $[a;b]$ осі Ox , прямими $x=a$, $x=b$ і кривою $y=f(x)$, називається **криволінійною трапецією**.

Зауваження. Прямі $x=a$ і $x=b$ можуть виродитись у точки

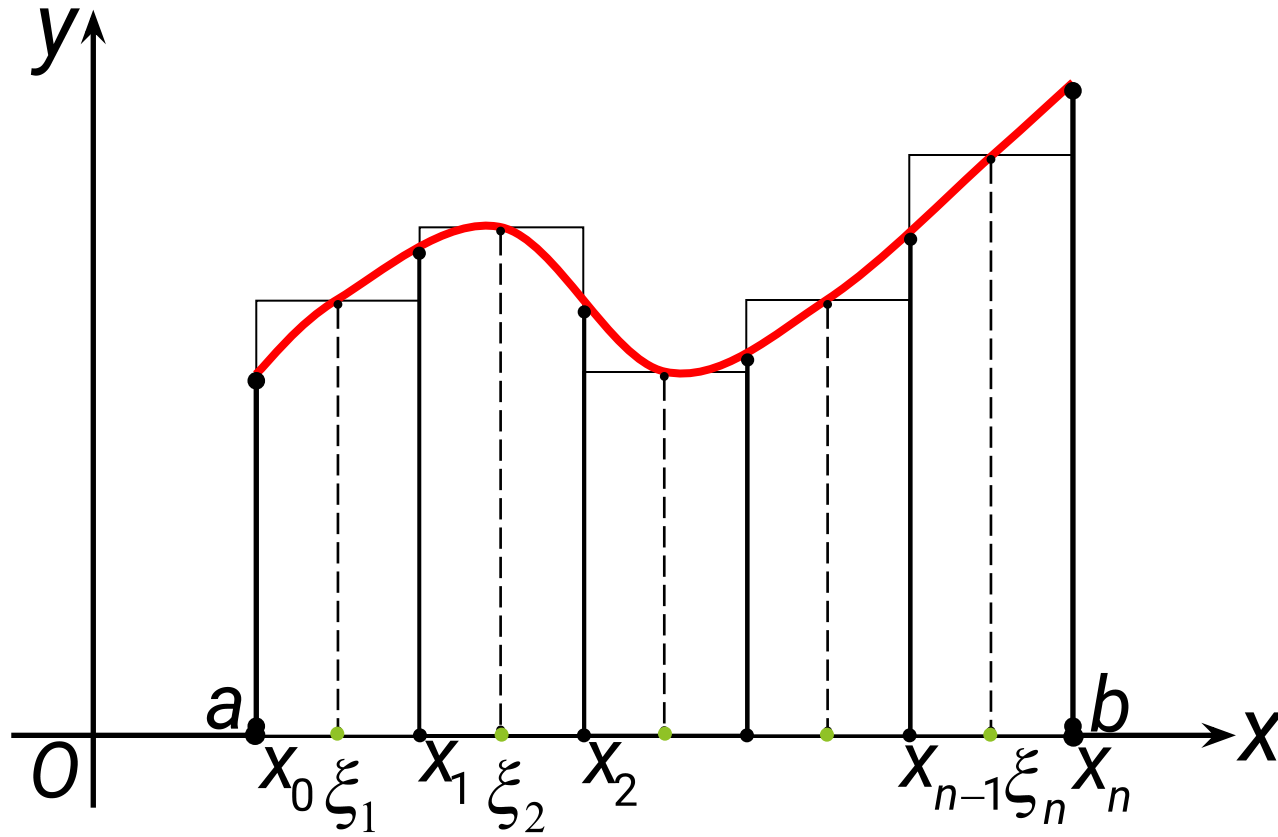


Визначений інтеграл і його застосування

Нехай $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a; b]$.

Площа S криволінійної трапеції (σ)

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



Визначений інтеграл і його застосування

$$I_n(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{i-1} - x_i|$$

- **інтегральна сума** для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Якщо існує границя сум $I_n(x_i, \xi_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, то її називають визначеним **інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$** (або **в межах від a до b**).

ПОЗНАЧАЮТЬ: $\int_a^b f(x) dx$

a и b — **нижня і верхня границя інтегрування**,
 $[a; b]$ — **проміжок інтегрування**,
 $f(x)$ — **підінтегральна функція**,
 $f(x)dx$ — **підінтегральний вираз**,
 x — **змінна інтегрування**.

Визначений інтеграл і його застосування

Функція $f(x)$, для якої на $[a;b]$ існує визначений інтеграл, називається **інтегрованою** на цьому відрізку.

ТЕОРЕМА 1 (необхідна умова інтегрованості функції на $[a;b]$).

Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, то вона на цьому відрізку обмежена.

ТЕОРЕМА 2 (достатня умова інтегрованості функції на $[a;b]$).

Для інтегрованості функції $f(x)$ на $[a;b]$, достатньо виконання однієї з умов:

- 1) $f(x)$ неперервна на $[a;b]$;*
- 2) $f(x)$ обмежена на $[a;b]$ і має на $[a;b]$ скінчене число точок розриву;*
- 3) $f(x)$ монотонна і обмежена на $[a;b]$.*

Визначений інтеграл і його застосування

Зауваження.

1) якщо $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

2) якщо $a = b$, то

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Визначений інтеграл і його застосування

1) Геометричний зміст визначеного інтеграла.

Якщо функція $f(x)$ – неперервна на $[a;b]$ і $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

де S – площа криволінійної трапеції с основою $[a;b]$ і обмеженою зверху кривою $y = f(x)$.

2) Фізичний зміст визначеного інтеграла.

Якщо функція $v = f(t)$ задає швидкість точки, що рухається в момент часу t , то

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

визначить шлях S , пройдений точкою за проміжок часу $[T_1 ; T_2]$.

Властивості визначеного інтеграла

$$1) \int_a^b dx = b - a.$$

$$2) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$3) \int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$$

$$4) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Властивості визначеного інтеграла

- ▶ 5) Якщо $f(x) > 0$ ($f(x) \geq 0$) $\forall x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx > 0 \quad \left(\int_a^b f(x) dx \geq 0 \right)$$

- ▶ 6) Якщо $f(x) \leq \phi(x)$ $\forall x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \phi(x) dx$

- ▶ 7) Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

- ▶ 8) Якщо $f(x)$ – непарна функція, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

- ▶ Якщо $f(x)$ – парна функція, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Теорема про середнє

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться така точка c , що справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбниці

- Заміна змінної

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt.$$

- Інтегрування за частинами

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx = \left| \begin{array}{ll} x^2 - 1 = t \\ 2x dx = dt \\ x = 1 \quad t = 0 \\ x = 3 \quad t = 8 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^8 (t + 1) \sqrt{t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^8 (t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}) dt = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^8 = \frac{464\sqrt{2}}{15}$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} &= 2 \int_0^1 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{3+3t^2+2-2t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\begin{aligned}\int_2^4 x e^{2x} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{2x} dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{x}{2} e^{2x} \Big|_2^4 - \frac{1}{2} \int_2^4 e^{2x} dx = \\ &= \frac{x}{2} e^{2x} \Big|_2^4 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_2^4 = \frac{7}{4} e^8 - \frac{3}{4} e^4\end{aligned}$$

Невласні інтеграли

Для існування $\int_a^b f(x)dx$ необхідне виконання умови:

- 1) $[a;b]$ – скінченний,
- 2) $f(x)$ – обмежена (необхідна умова існування визначеного інтеграла).

Невласні інтеграли – узагальнене поняття визначеного інтеграла у випадку коли одна з цих умов не виконується.

Невласні інтеграли I роду (за нескінченним проміжком)

ОЗНАЧЕННЯ. **Невласним інтегралом I роду** від функції $f(x)$ на проміжку $[a; +\infty)$ називається границя функції $I(b)$ при $b \rightarrow +\infty$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Якщо $y = f(x)$ неперервна на $(-\infty; b]$, то аналогічно визначається і позначається **Невласним інтегралом I роду** для функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Невласні інтеграли I роду

При цьому, якщо границя в правій частині формули існує і скінченний, то невластний інтеграл називають **збіжним**.

У протилежному випадку (якщо границя не існує або дорівнює нескінченності) невластний інтеграл називають **розбіжним**.

Якщо $y = f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$, то **невластним інтегралом I роду** для функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ називають

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

де c – довільне число.

Невластний інтеграл від $f(x)$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ називається **збіжним**, якщо **ОБІДВА** інтеграла в правій частині формули (2) збігаються.

У протилежному випадку, невластний інтеграл на проміжку $(-\infty; +\infty)$ називається **розбіжним**.

Невласні інтеграли I роду

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3} &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x(1+x^2)} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{B}{\sqrt{B^2+1}} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x + 1)} &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{d(\ln x + 1)}{\ln x + 1} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln(\ln x + 1) \Big|_e^B = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} (\ln(\ln B + 1) - \ln 2) = +\infty. \end{aligned}$$

Невласні інтеграли I роду

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} &= \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B \frac{dx}{(x-3)^2 + 1} = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \operatorname{arctg}(x-3) \Big|_A^B = \\ &= \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} (\operatorname{arctg}(B-3) - \operatorname{arctg}(A-3)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.\end{aligned}$$

Ознаки збіжності невластних інтегралів I роду

ТЕОРЕМА 1 (перша ознака збіжності).

Нехай $f(x)$ і $\phi(x)$ неперервні на $[a; +\infty)$ і $0 \leq f(x) \leq \phi(x)$, $\forall x \in [c; +\infty)$ (де $c \geq a$).

Тоді:

1) якщо $\int_a^{+\infty} \phi(x) dx$ – збіжний, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ теж збіжний,

ДО ТОГО Ж
$$\int_c^{+\infty} f(x) dx \leq \int_c^{+\infty} \phi(x) dx;$$

2) якщо $\int_a^{+\infty} \phi(x) dx$ – розбіжний, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ теж розбіжний.

Ознаки збіжності невластних інтегралів I роду

ТЕОРЕМА 2 (друга ознака збіжності)

Нехай $f(x)$ і $\phi(x)$ неперервні і невід'ємні на $[a; +\infty)$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = h$, де h – дійсне число, відмінне від нуля,

то інтеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{і} \quad \int_a^{+\infty} \phi(x) dx$$

поводять себе однаково відносно збіжності.

Ознаки збіжності невластних інтегралів I роду

- При використанні теорем 1 и 2 в якості «еталонних» інтегралів зазвичай використовують наступні невластні інтеграли:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} \quad - \begin{cases} \text{збігається,} & \text{при } n > 1, \\ \text{розбігається} & \text{при } n \leq 1. \end{cases}$$

$(a > 0)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \quad - \begin{cases} \text{збігається,} & \text{при } \alpha > 0, \\ \text{розбігається,} & \text{при } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Ознаки збіжності невластних інтегралів I роду

ТЕОРЕМА 3 (ознака абсолютної збіжності).

Якщо збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ теж буде збіжним і сходиться.

При цьому інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається **абсолютно збіжним**.

Ознаки збіжності невластних інтегралів I роду

Якщо $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбіжний, то про інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ нічого сказати неможна. Він може розбігатися, а може і збігатися.

Якщо $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбіжний, а $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – збіжний, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається **умовно збіжним**

Невласні інтеграли II роду (від необмежених функцій)

ОЗНАЧЕННЯ. **Невласним інтегралом II роду** на проміжку $[a; b]$ від функції $f(x)$, обмеженої в точці b називається границя функції $I(b_1)$ при $b_1 \rightarrow b - 0$.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} I(b_1) = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} \int_a^{b_1} f(x) dx$$

Якщо $y=f(x)$ неперервна на $(a; b]$ і $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +(-)\infty$ то аналогічно визначається і позначається **невласний інтеграл II роду** для функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ від функції $f(x)$, необмеженої в точці a

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{a_1 \rightarrow a+0} \int_{a_1}^b f(x) dx.$$

Невласні інтеграли II роду

Якщо $y = f(x)$ неперервна на $[a;b] \setminus \{c\}$ і $x = c$ – точка нескінченного розриву функції, то **невласний інтеграл II роду** для функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ називають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Невласний інтеграл на проміжку $[a;b]$ від функції $f(x)$, необмеженою всередині цього відрізка, називається **збіжним**, якщо **ОБИДВА** інтеграла в правій частині формули (2) збігаються.

У протилежному випадку, невлаcний інтеграл на проміжку $[a;b]$ називається **розбіжним**.

Невласні інтеграли II роду

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^1 \ln x dx \right) = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dV = dx \quad V = x \end{array} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(x \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 dx \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \Big|_{\varepsilon}^1 - x \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 + \varepsilon \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(0 - \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 + 0 \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon - 1) = 0 - 1 = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon)) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Невласні інтеграли II роду

► «Еталонні» інтеграли для невластних інтегралів II роду (від необмежених функцій)

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} \quad - \begin{cases} \text{збігається,} & \text{при } n < 1, \\ \text{розбігається} & \text{при } n \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} \quad - \begin{cases} \text{збігається,} & \text{при } n < 1, \\ \text{розбігається} & \text{при } n \geq 1. \end{cases}$$

Довжина дуги кривої

Плоска крива, задана параметрично рівняннями

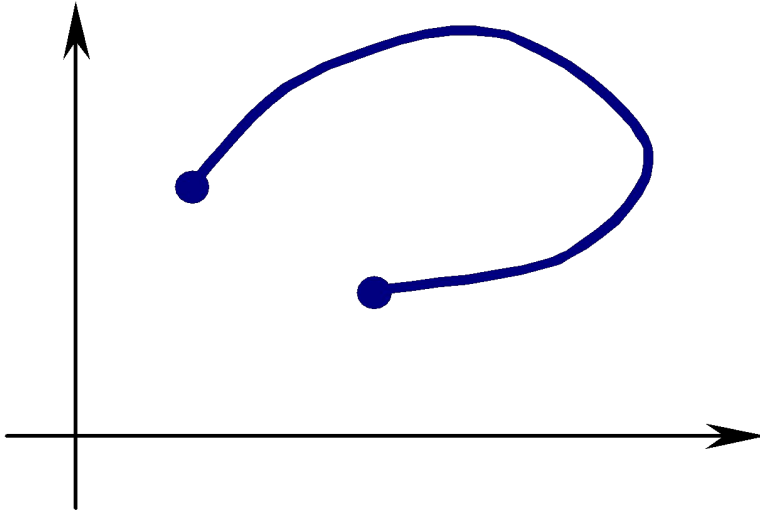
Нехай крива (ℓ) не має самоперетинів і задана параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неперервно диференційована на $[\alpha; \beta]$.

Довжина кривої (ℓ) .

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$



Довжина дуги кривої

Плоска крива в полярних координатах

Нехай $r = r(\phi)$ – неперервно диференційована на $[\alpha; \beta]$.

Довжина кривої

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\phi.$$

$r = r(\phi)$, де $\phi \in [\alpha; \beta]$.

$$x = r \cdot \cos \phi, \quad y = r \cdot \sin \phi$$

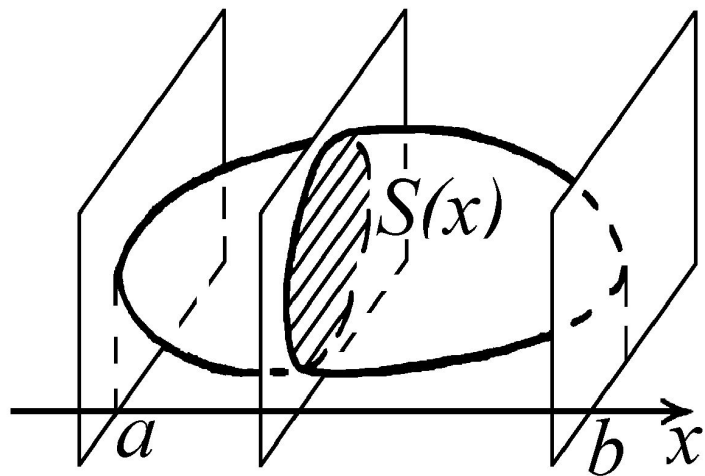
Обчислення об'єму тіла

За площею паралельних перерізів

Нехай (V) – замкнена і обмежена область у $Oxyz$ (тіло).

Нехай $S(x)$ ($a \leq x \leq b$) – площа довільного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox .

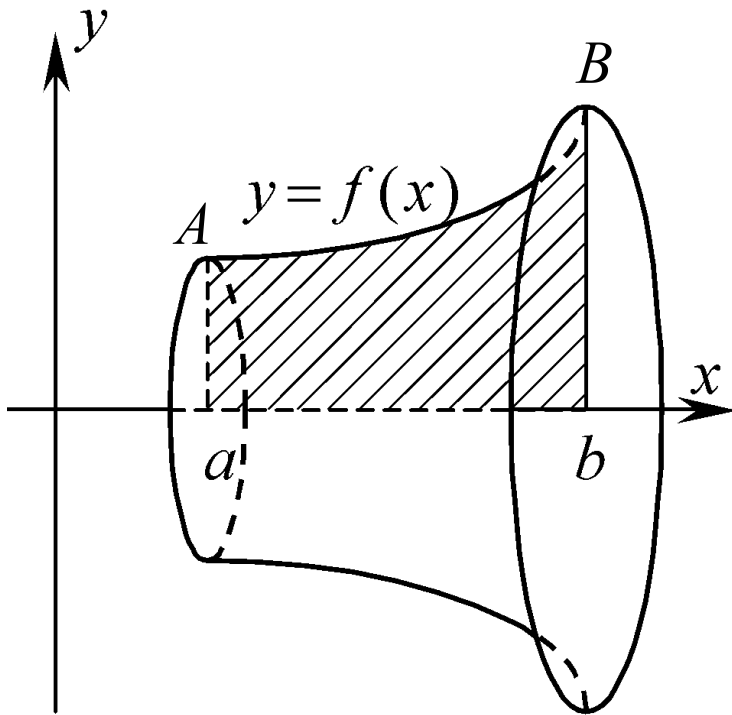
Тоді об'єм тіла (V)



$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Об'єм тіла обертання

- ▶ Нехай (V) – тіло, отримане в результаті обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції з основою $[a; b]$, обмеженою $y = f(x)$.
Об'єм цього тіла (V)



$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

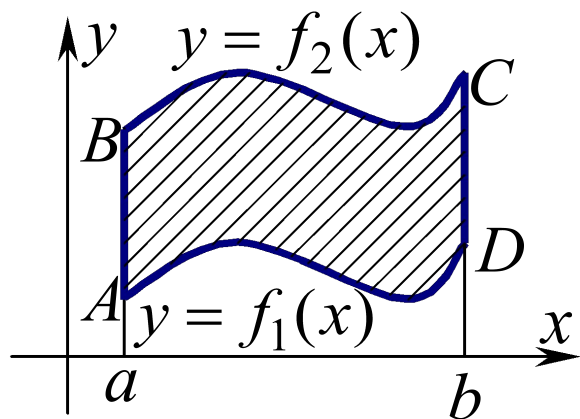
Об'єм тіла обертання

Нехай (V) – тіло, отримане в результаті обертання навколо осі Ox області (σ) , обмеженої лініями

$$x = a, \quad x = b, \quad y = f_1(x), \quad y = f_2(x),$$

де $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x), \quad \forall x \in [a; b]$.

Об'єм цього тіла (V)



$$V_x = \pi \int_a^b ([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2) dx.$$

Наближене обчислення визначених інтегралів

Нехай $y = f(x)$ – неперервна на $[a; b]$ і її первісна не є елементарною.

Необхідно знайти
$$\int_a^b f(x) dx.$$

5.1. Формула прямокутників

Розіб'ємо $[a; b]$ на n рівних відрізків довжини h точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{де } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n).$$

Нехай $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Складемо суми

$$S_n = y_0 h + y_1 h + y_2 h + \dots + y_{n-1} h,$$

$$\tilde{S}_n = y_1 h + y_2 h + y_3 h + \dots + y_n h,$$

де $h = \frac{b-a}{n}$ – довжина відрізків $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Наближене обчислення визначених інтегралів

S_n і $\tilde{S}_n$ – інтегральні суми для $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

$$(1) \quad \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx S_n = h \cdot (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}),$$

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \tilde{S}_n = h \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n).$$

Нехай R_n – модуль різниці між точними значеннями визначеного інтеграла і його наближеним значенням.

Тоді

$$R_n \leq \frac{M_1}{2n} (b - a)^2,$$

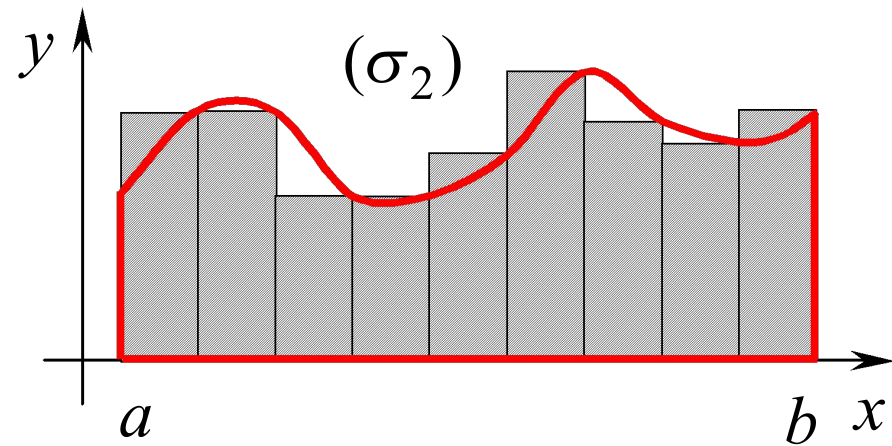
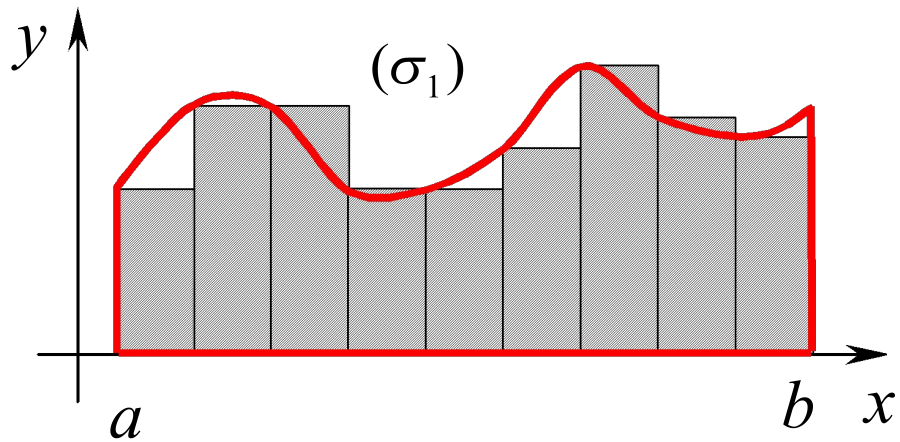
де

$$M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Формули (1) і (2) називаються **формулами прямокутників**

Наближене обчислення визначених інтегралів

Якщо $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$, то з геометричної точки зору (1) і (2) означає, що площа відповідної криволінійної трапеції замінюється площею області, що складається з прямокутників (області (σ_1) і (σ_2) відповідно).



Наближене обчислення визначених інтегралів

Формула трапеції

Розіб'ємо $[a;b]$ на n рівних відрізків довжини h точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{де } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n).$$

Нехай $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Тоді

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})),$$

де $h = \frac{b-a}{n}$ – довжина відрізків $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Для формули (3)

$$R_n \leq \frac{M_2}{12n^2} (b-a)^3,$$

де

$$M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Формула (3) називається **формулою трапеції**.

Якщо $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$, то з геометричної точки зору (3) означає, що площа відповідної криволінійної трапеції замінюється площею області, що складається з трапецій.

