



НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

План

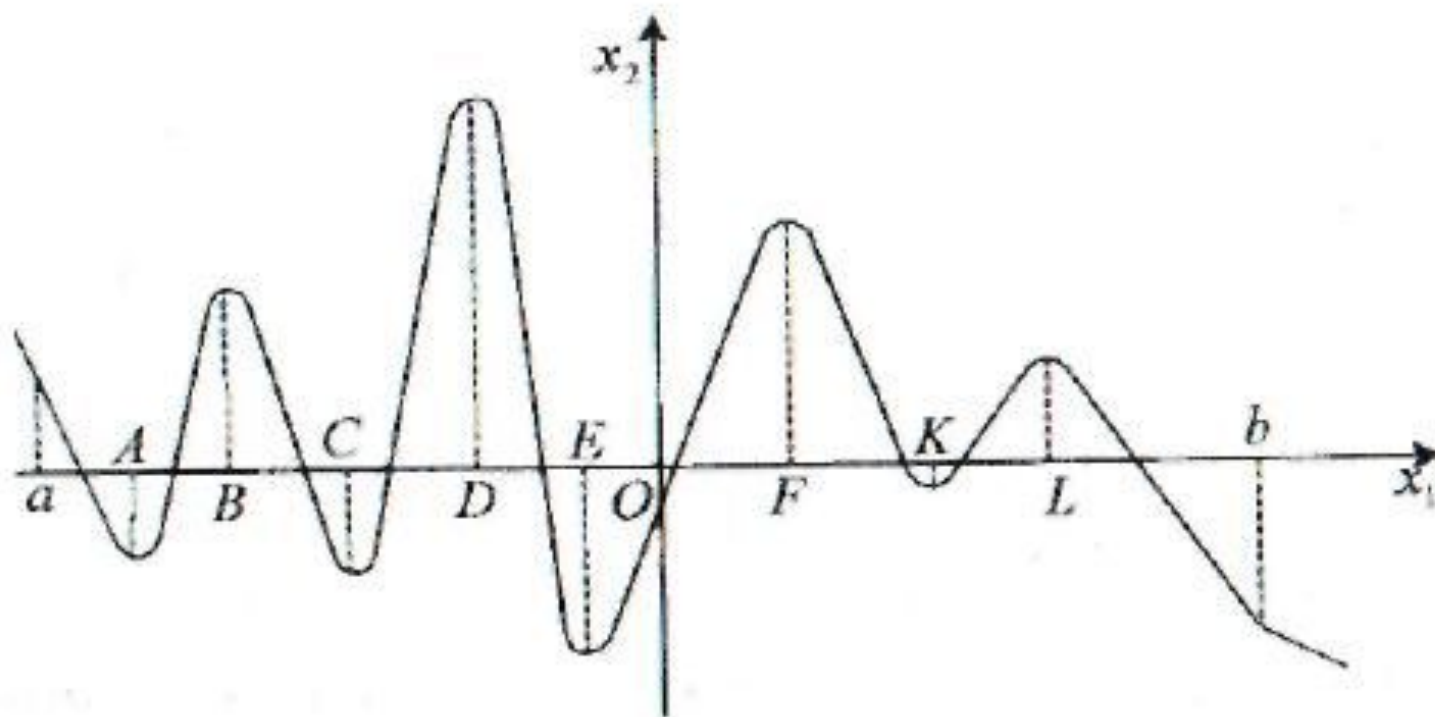
- 7.1 Постановка задачі нелінійного програмування; основні труднощі в задачах нелінійного програмування.*
- 7.2 Графічний метод: задача з лінійною цільовою функцією й нелінійною системою обмежень; задача з нелінійною цільовою функцією й лінійною системою обмежень; задача з нелінійною цільовою функцією й нелінійною системою обмежень.*
- 7.3 Класичний метод оптимізації: метод множників Лагранжа.*

7.1 Постановка задачі нелінійного програмування.

Основні труднощі в задачах нелінійного програмування

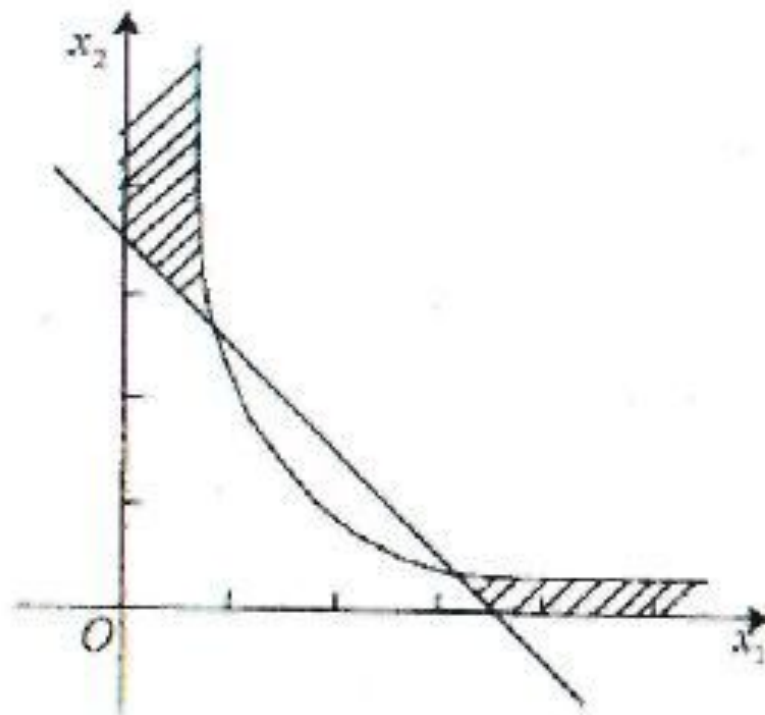
$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 7.1$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, (i = 1 \div k), \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, (i = k + 1 \div l), \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, (i = l + 1 \div m), \end{cases} \quad 7.2$$



$$\begin{cases} (x_1 - 1)x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 3.5, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Сепарабельна задача

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \rightarrow \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, (i = 1 \div m)$$

Квадратична задача НП

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j \rightarrow \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, (i = 1 \div m)$$

Задача опуклого програмування

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

7.2 Графічний метод

$$Z = f(x_1, x_2) \quad 7.3$$

$$g_i(x_1, x_2) \leq b_i, i = 1 \div m, \quad 7.4$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad 7.5$$

$$f(x) = c \quad f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad r = \sqrt{c}$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2$$

$$f(x_1, x_2) = c(x_1 - a)^2 + d(x_2 - b)^2$$

Приклад. Задача з лінійною цільовою функцією й нелінійною системою обмежень

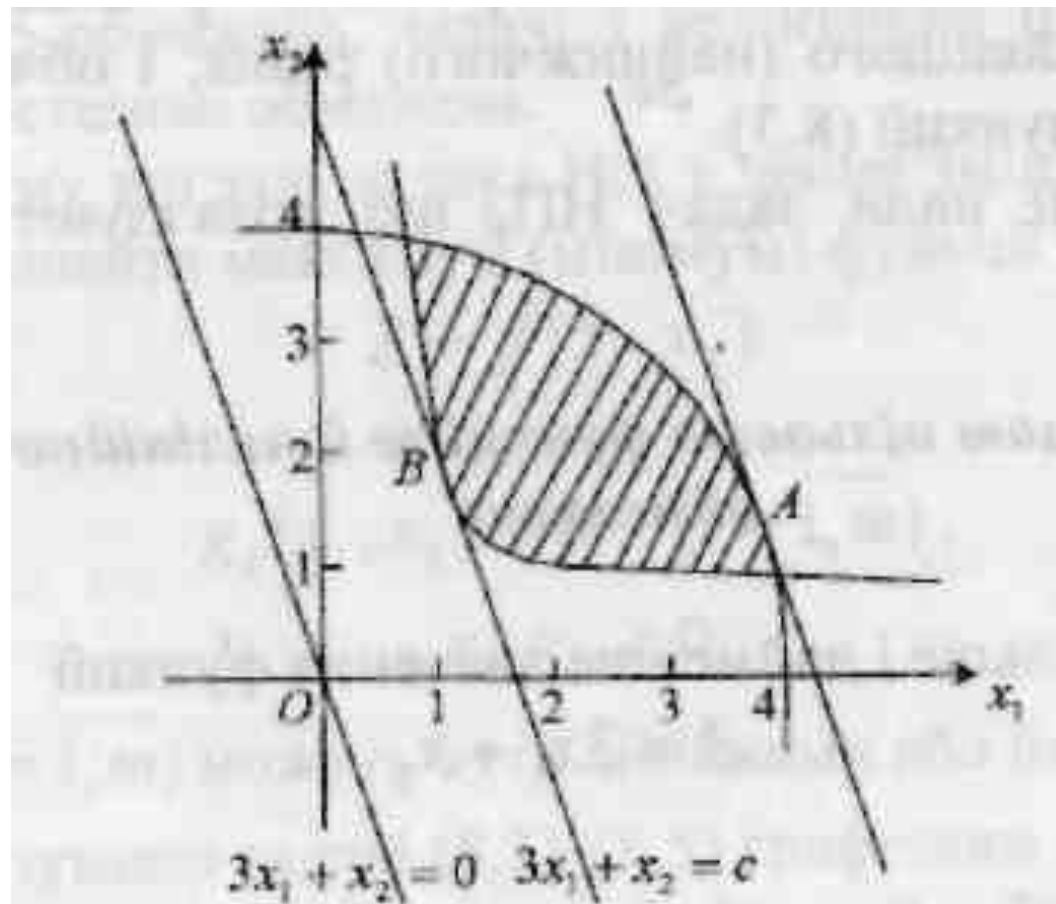
$$z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 \geq 2, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$3x_1 + x_2 = c \qquad 2x_1 + 2x_2 x_2' = 0$$

$$k = -3 \qquad x_2' = -\frac{x_1}{x_2}$$



$$\begin{cases} -\frac{x_1}{x_2} = -3 \\ x_1^2 + x_2^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 = 16 \end{cases}$$

$$x_1^* = \frac{6}{5}\sqrt{10}, x_2^* = \frac{2}{5}\sqrt{10} \quad A\left(\frac{6}{5}\sqrt{10}, \frac{2}{5}\sqrt{10}\right)$$

$$Z_{\max} = 3 \cdot \frac{6}{5}\sqrt{10} + \frac{2}{5}\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

$$\begin{cases} -\frac{x_2}{x_1} = -3 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3x_1, \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$$

$$x_1^* = \sqrt{\frac{2}{3}}, x_2^* = \sqrt{6} \quad B\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{6}\right)$$

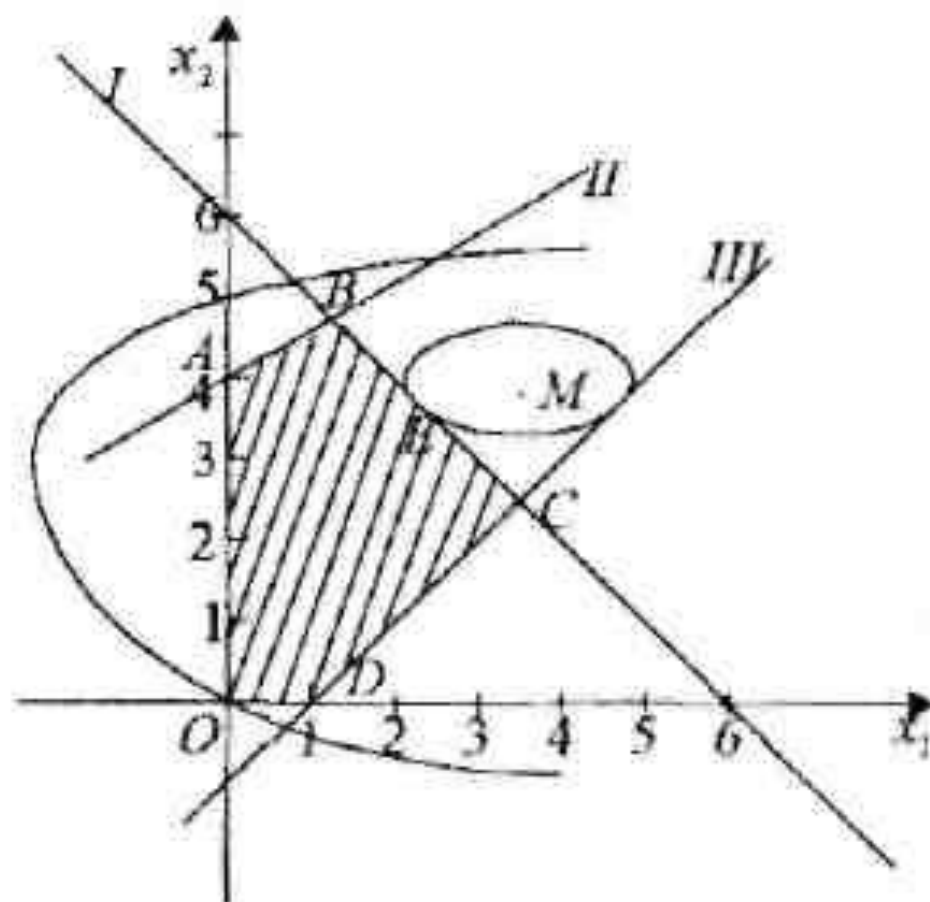
$$Z_{\min} = 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Приклад. Задача з нелінійною цільовою функцією й лінійною системою обмежень

$$Z = 5(x_1 - 3.5)^2 + 10(x_2 - 4)^2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$5(x_1 - 3.5)^2 + 10(x_2 - 4)^2 = c, c \geq 0$$

$$Z_{\max} = 5(-3.5)^2 + 10(-4)^2 = 221.25$$

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$5(x_1 - 3.5)^2 + 10(x_2 - 4)^2 = c$$

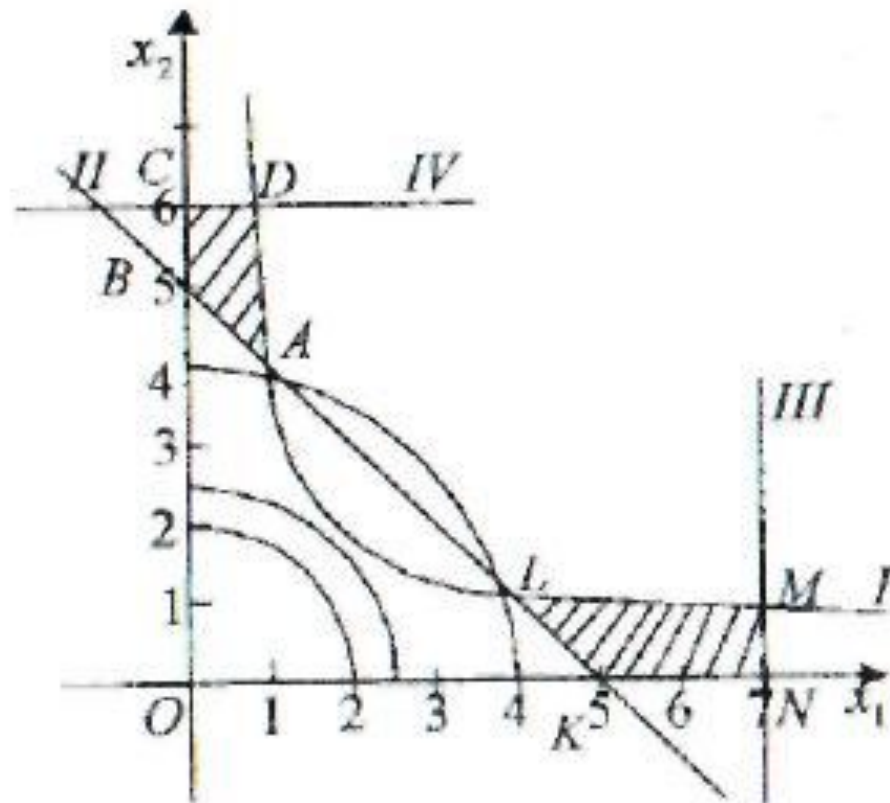
$$\begin{cases} -\frac{x_1 - 3.5}{2(x_2 - 4)} = -1 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{aligned} &E(2.5; 3.5), \\ &Z_{\min} = 5(2.5 - 3.5)^2 + \\ &+ 10(3.5 - 4)^2 = 7.5 \end{aligned}$$

Приклад. Задача з нелінійною цільовою функцією й нелінійною системою обмежень

$$Z = x_1^2 + x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \leq 7, \\ x_2 \leq 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$x_1^2 + x_2^2 = c, c \geq 0 \quad r = \sqrt{c}$$

$$D: \begin{cases} x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases}, M: \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases}$$

$$D\left(\frac{2}{3}; 6\right), M\left(7; \frac{4}{7}\right)$$

$$Z(D) = \frac{328}{9}, Z(M) = \frac{2417}{49} \quad Z_{\max} = \frac{2417}{49}$$

7.3 Класичний метод оптимізації: метод множників Лагранжа.

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad f'(x) = 0$$

$$\nabla Z = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} \right)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\nabla Z(X_0) = 0$$

$$H = \left\| \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, i, j = 1 \div n$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$M_1 = |f_{11}|, M_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \dots, M_n = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad M_1 > 0, M_2 > 0, \dots, M_n > 0, \dots, M_n > 0$$

$$M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, \dots$$

Приклад

$$Z = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 - x_2 + 1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 + 1 = 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_0 = (-1; 1)$$

$$\frac{\partial^2 Z(X_0)}{\partial x_1^2} = 2, \frac{\partial^2 Z(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} = 1, \frac{\partial^2 Z(X_0)}{\partial x_2^2} = 2, H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = 2 > 0, M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$X_0 = (-1; 1)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \quad 7.6$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, (i = 1 \div m) \quad 7.7$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \quad 7.8$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, j = 1 \div n \quad 7.9$$

$$, \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1 \div m$$

Приклад

$$\begin{aligned} Z &= 3x_1^2 + 2x_2^2 \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) &= 3x_1^2 + 2x_2^2 + \\ &+ \lambda_1(4 - 2x_1 - 3x_2) + \lambda_2(8 - x_1 - 2x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 4 - 2x_1 - 3x_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 8 - x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 Z(X_0)}{\partial x_1^2} = 6, \frac{\partial^2 Z(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 Z(X_0)}{\partial x_2^2} = 4, H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = 6 > 0, M_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

$$X_0 = (-16; 12), Z_{\min} = 1056$$