

Практическое занятие 5

Гидростатика.

Поверхностные явления.

Гидромеханика идеальной и вязкой жидкости.

Давление силы на поверхность

$$p = \frac{F_n}{S}$$
$$[p] = \frac{H}{m^2} = Па$$

Сила давления на
поверхность
независимо от
природы силы:

перпендикулярна
поверхности тела
в любой точке тела

$$F_{\partial} = pS$$

Действует на тело
«снаружи»

Закон Паскаля

Давление, производимое на поверхность жидкости (газа), передается во все точки жидкости (газа) без изменения

Абсолютное давление (следствие) складывается из «внутренних» давлений, обусловленных свойствами системы (внутренние причины) и внешнего атмосферного давления (внешняя причина)

$$P_{абс.} = P_0 + \sum P_{вн.}$$

Суммарное «внутреннее» давление —
избыточное над атмосферным.

Измеряется манометром.

$$P_{изб.} = \sum P_{вн.}$$

Часто составляющие абсолютного давления измеряются
во внесистемных единицах:

$$1 \text{ мм рт.ст.} = 13600 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} = 133 \text{ Па}$$

$$1 \text{ мм вод.ст.} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} = 9,81 \text{ Па}$$

Атмосферное давление измеряется барометром

Нормальное атмосферное давление:

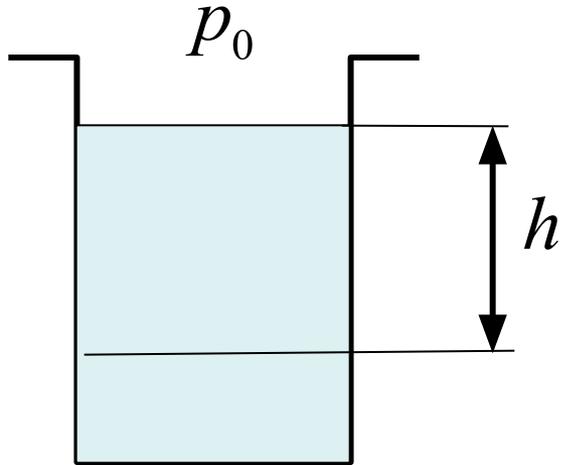
$$P_0 = 10^5 \text{ Па} \quad \text{или} \quad 760 \text{ мм рт.ст.}$$

Абсолютное давление:

$$P_{абс.} = P_0 + P_{изб.}$$

Пример:

абсолютное давление
на глубине h в водоеме



«Внутреннее» гидростатическое
давление: $p_{\text{вн.}} = p_{\text{ГС}} = \rho gh$

«Внешнее» атмосферное
давление: p_0

Абсолютное давление
(основное уравнение
гидростатики):

$$p_{\text{абс.}} = p_0 + \rho gh$$

На какой глубине в водоеме давление в 2 раза больше нормального (атмосферного)?

Атмосферное давление:

$$p_0 = 10^5 \text{ Па}$$

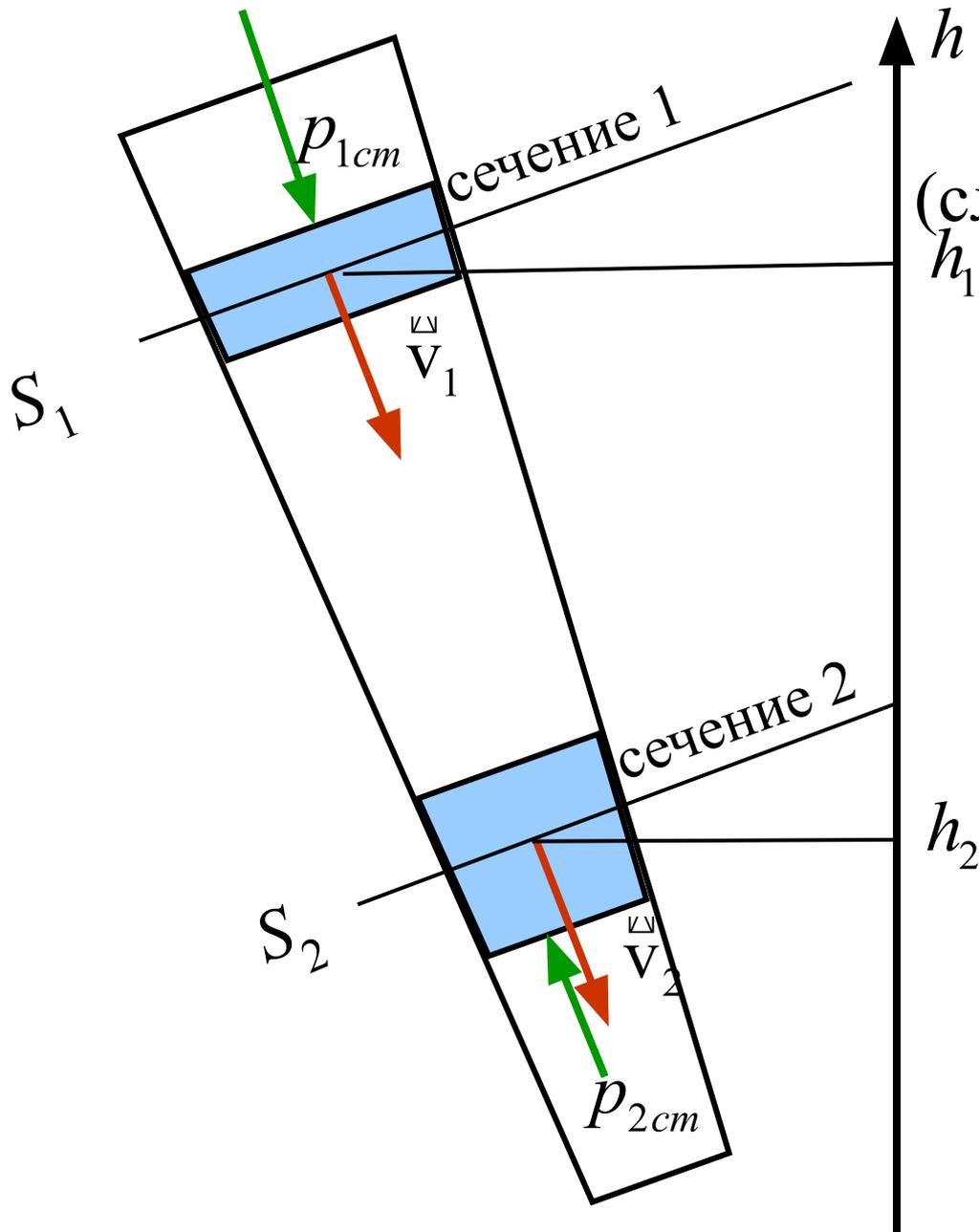
Абсолютное давление на глубине h :

$$p_{\text{абс.}} = p_0 + \rho gh$$

$$\frac{p_{\text{абс.}}}{p_0} = \frac{p_0 + \rho gh}{p_0} = 1 + \frac{\rho gh}{p_0} = 2$$

$$h = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{10^5}{10^3 \cdot 10} = 10$$

Участок трубы с идеальной жидкостью



Уравнение
неразрывности струи
(следствие несжимаемости):

$$Q_V = Sv = const$$

$$Q_m = \rho Sv = const$$

S – площадь сечения

v – скорость жидкости
в данном сечении

h – высота сечения
относительно
условного «0»

Составляющие абсолютного давления:

$$P_{абс.} = P_0 + P_{изб.}$$

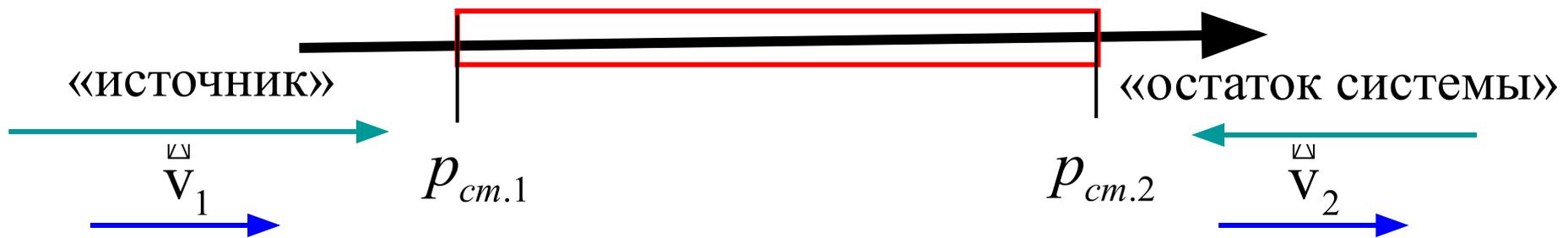
Атмосферное давление:

$$P_{01} = P_{02} = P_0$$

Составляющие избыточного давления:

1. $p_{ст.}$ – статическое давление на выделенное сечение «снаружи», связанное с работой по перемещению объема жидкости против сил давления

Трубопровод



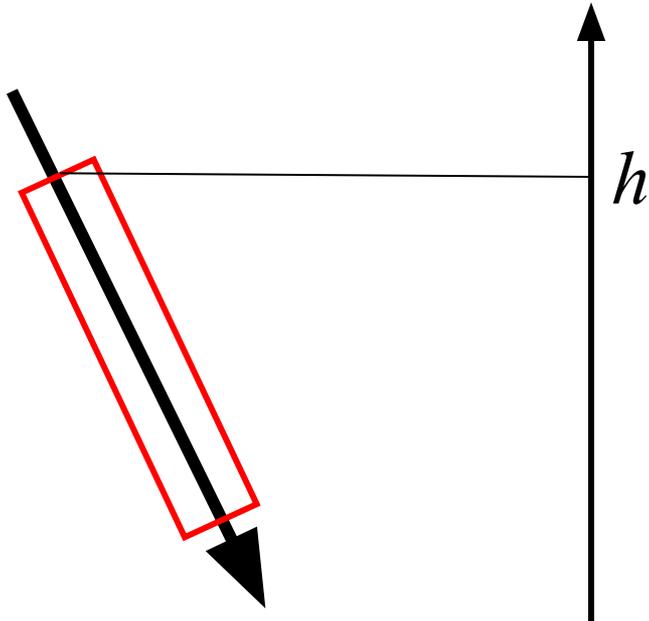
$P_{ст.1}$ – статическое давление со стороны «источника»

$P_{ст.2}$ – статическое давление со стороны
«остальной» части системы (противодавление)

2. $p_{дин.}$ – динамическое давление связанное с движением
(кинетической энергией движения) жидкости:

$$p_{дин.} = \frac{\rho v^2}{2} \quad \left(K = \frac{mv^2}{2} \right)$$

3. $p_{ГС}$ – гидростатическое давление, связанное с положением сечения относительно условного «0» (потенциальной энергией положения):

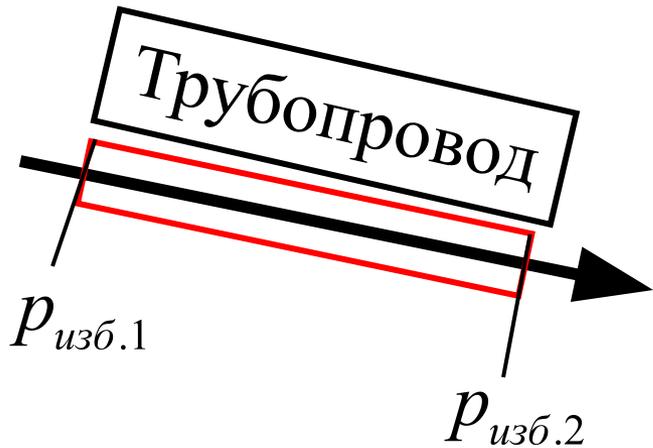


$$p_{ГС} = \rho gh$$

$$(\Pi = mgh)$$

Суммарное *избыточное* давление в данном сечении:

$$p_{избГС} = p_{\Sigma} = p_{вн.} + p_{ст.} + p_{дин.}$$



Жидкость идеальная →
→ нет потерь давления:

$$p_{изб.1} = p_{изб.2} = const$$

Уравнение Бернулли (закон сохранения энергии):

$$p_{cm.1} + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_{cm.2} + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 = const$$

Система кровообращения человека обладает
минимальным сечением

в области аорты, равным примерно 8 см^2 ,
и максимальным сечением в области капилляров.

Оцените примерную суммарную
площадь сечения капилляров в теле человека
и общее их количество, если скорость
течения крови уменьшается от $0,5 \text{ м/с}$
в аорте до $0,001 \text{ м/с}$ в капиллярах.

Диаметр капилляра считать равным 10^{-5} м .

Эластичностью сосудов пренебречь.

СИ:

$$S_A = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$v_A = 0,5 \text{ м/с}$$

$$v_K = 0,001 \text{ м/с}$$

$$d_K = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

Уравнение неразрывности:

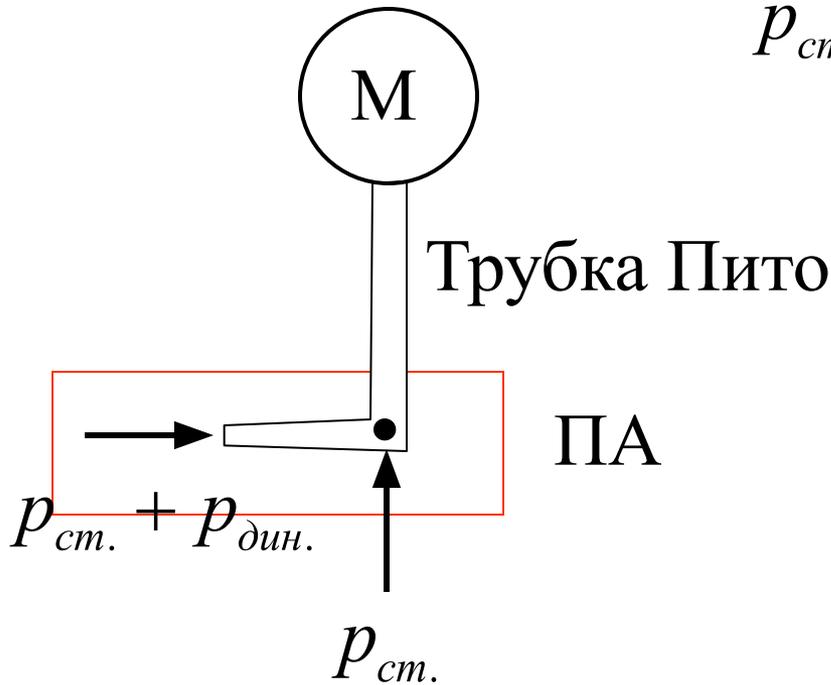
$$v_A S_A = v_K S_{\Sigma K} \quad S_{\Sigma K} = \frac{v_A S_A}{v_K}$$

$$S_{\Sigma K} = \frac{0,5 \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{0,001} = 0,4 \text{ м}^2$$

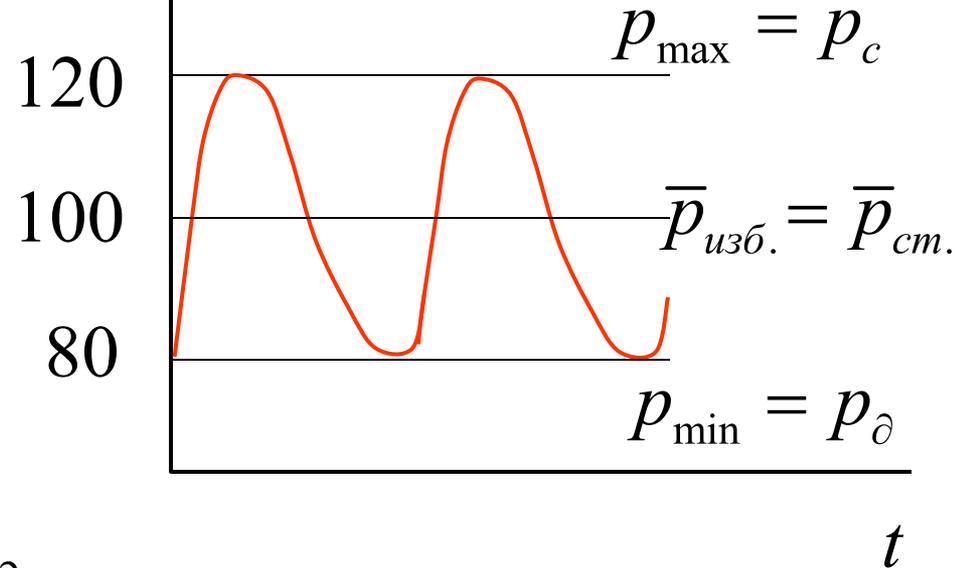
$$N_K = \frac{S_{\Sigma K}}{\frac{\pi d_K^2}{4}} = \frac{4 S_{\Sigma K}}{\pi d_K^2}$$

$$N_K = \frac{4 \cdot 0,4}{3,14 \cdot (1 \cdot 10^{-5})^2} = 5 \cdot 10^9$$

Зависимость *избыточного* давления крови в плечевой артерии от времени:



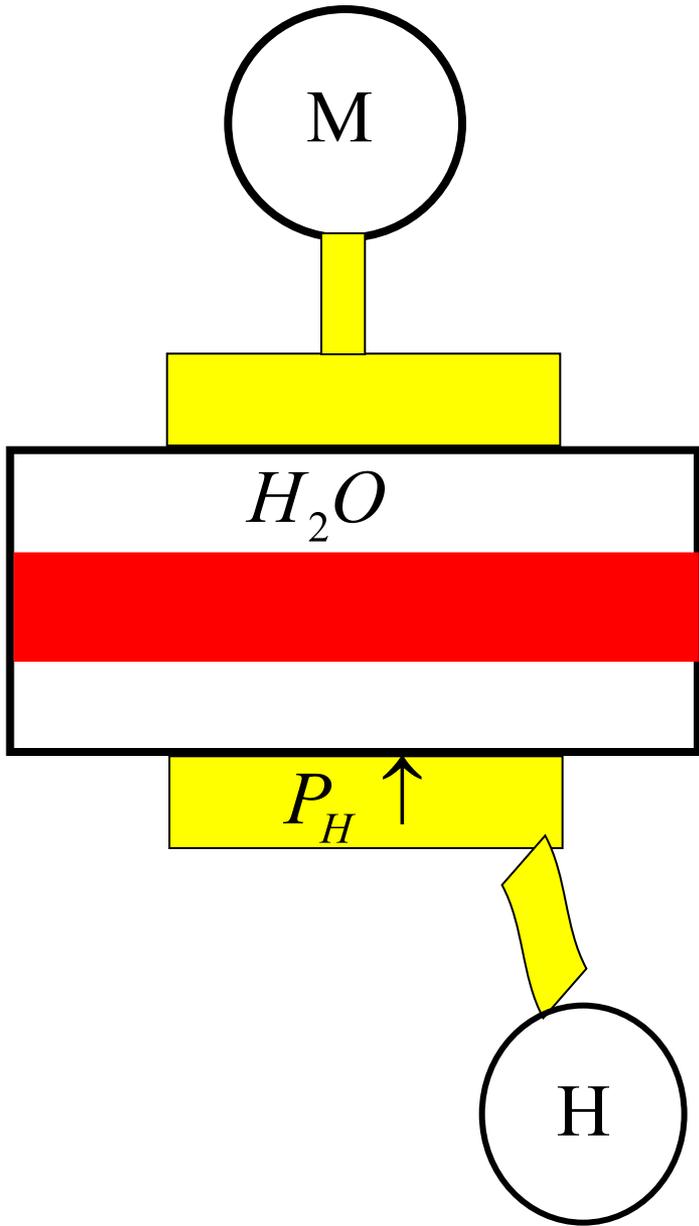
$p_{ст.} + p_{дин.}$, мм рт. ст.



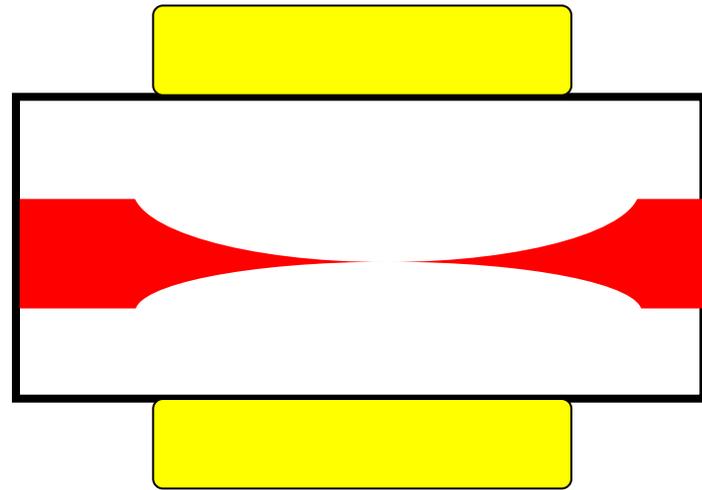
$$p_{дин.} = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{1050 \cdot 0,5^2}{2} = 130 \quad = 1 \quad . \quad . \quad .$$

$$p_{ГС} = \rho g h = 0$$

$$\bar{p}_{абс.} = p_0 + \bar{p}_{изб.} = 760 + 100 = 860 \quad . \quad .$$



$$P_M \approx P_{TK} \approx P_{APT}$$



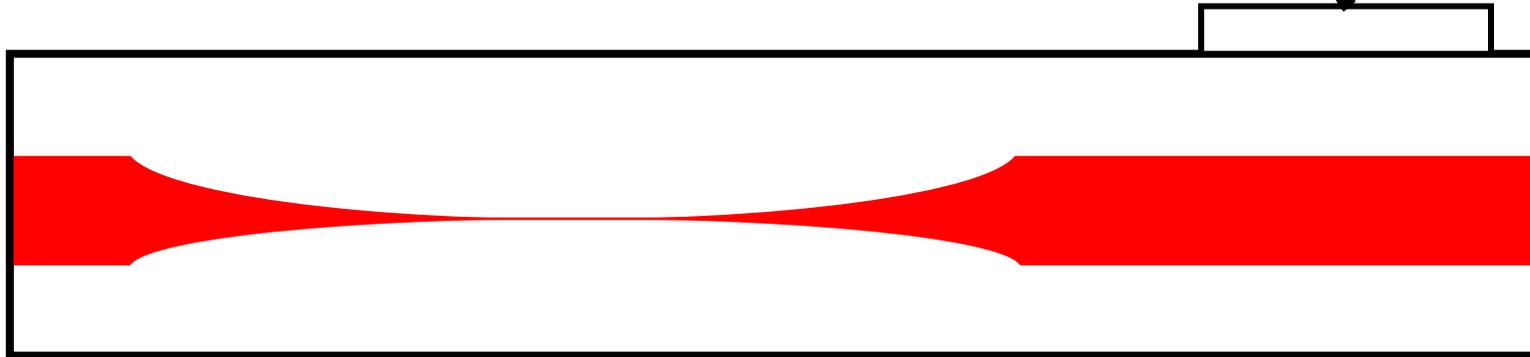
$$v_K = 0$$

Давление в манжете плавно уменьшается

Врач

Приемник
звука

Звукопровод



$$p = p_{\max} = p_C \Rightarrow v_K \approx 0 \Rightarrow \text{начало шумов}$$

Фиксируется давление, соответствующее началу шумов: p_C

Давление в манжете плавно уменьшается

Врач

Приемник
звука

Звукопровод



$p = p_{\min} = p_{\partial}$ прекращение шумов

Фиксируется давление, соответствующее
прекращению шумов: p_{∂}

Вода вытекает из сосуда в виде параллелепипеда размерами $a \times b \times c$ через трубку с наконечником радиуса $r = 1$ мм. Уровень наконечника на $l = 1$ м ниже нижней грани сосуда. Наконечник погружен в водоем на глубину $h_2 = 25$ см. Оценить за какое время вода вытечет из сосуда?

СИ:

$$l = 1 \text{ м}$$

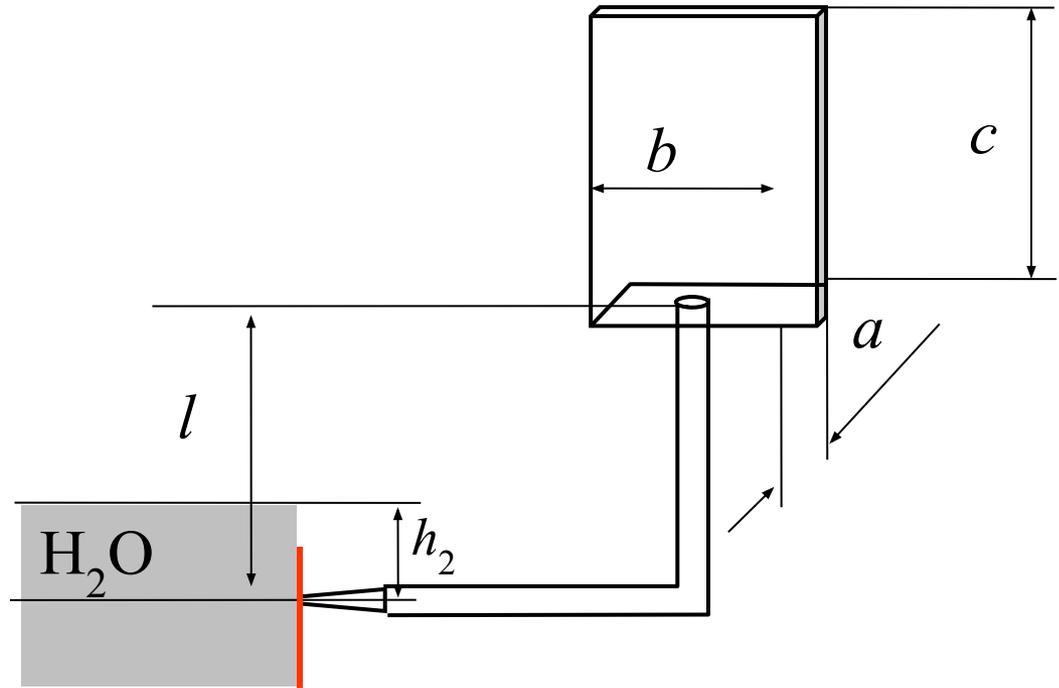
$$r = 1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$h_2 = 25 \text{ см} = 0,25 \text{ м}$$

$$a = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$$

$$b = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$$c = 25 \text{ см} = 0,25 \text{ м}$$



Для момента времени t :

$$p_{1\text{изб.}} = \rho g h \quad p_{2\text{изб.}} = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2$$

Уравнение Бернулли:

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2$$

Уровень водоема



h_2

\vec{v}

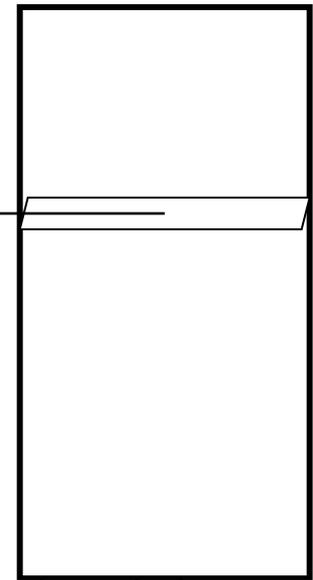


$p_{2\text{изб.}}$

$p_{1\text{изб.}}$

h

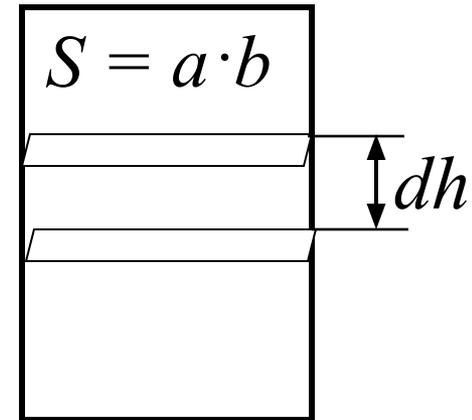
l



Скорость вытекания воды из наконечника при уровне воды в сосуде h :

$$v = \sqrt{2g(h - h_2)}$$

За время dt :



1. Из наконечника вытечет объем воды:

$$\begin{aligned} dQ &= \pi \cdot r^2 dt = \\ &= \sqrt{2g(h - h_2)} \cdot r^2 dt \end{aligned}$$

2. Уровень воды в сосуде опустится на dh :

$$\begin{aligned} dh &= \frac{dQ}{a \cdot b} \\ dQ &= a \cdot b \cdot dh \end{aligned}$$

$$\sqrt{2g(h - h_2)} \cdot r^2 dt = a \cdot b \cdot dh$$

Разделение переменных:

$$\frac{\sqrt{\alpha g} \cdot r^2}{a \cdot b} dt = \frac{dh}{\sqrt{(h - h_2)}}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha g} \cdot r^2}{a \cdot b} \int_0^t dt = \int_l^{l+c} \frac{dh}{\sqrt{(h - h_2)}}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha g} \cdot r^2}{a \cdot b} t = 2 \sqrt{(h - h_2)} \Big|_l^{l+c} = 2 \left(\sqrt{(l + c - h_2)} - \sqrt{(l - h_2)} \right)$$

$$t = \frac{2a \cdot b \cdot \left(\sqrt{(l + c - h_2)} - \sqrt{(l - h_2)} \right)}{\sqrt{\alpha g} \cdot r^2}$$

$$t = \frac{\sqrt{2} \cdot 0,02 \cdot 0,2 \cdot \left(\sqrt{(1 + 0,25 - 0,25)} - \sqrt{(1 - 0,25)} \right)}{\sqrt{10} \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}} = 80 \text{ c}$$

20

Поверхность жидкости ведет себя подобно пленке из упругого материала, стремящейся максимально уменьшить площадь поверхности жидкости

$$p_{\Pi} = \frac{F_{\Pi}}{S}$$

Характеристика поверхностных свойств жидкости — коэффициент поверхностного натяжения:

$$\sigma = \frac{F_{\Pi}}{l}$$

Сила F поверхностного натяжения, действующая на участок (контур), ограничивающий поверхность жидкости

Масса 110 капель сыворотки крови, вытекающей из капилляра 1,45 г. Определить коэффициент поверхностного натяжения сыворотки, если диаметр шейки капли в момент отрыва 1,00 мм.

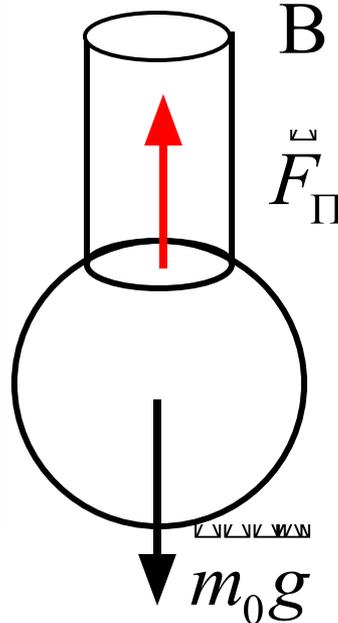
СИ:

$$m = 1,45 \text{ г} = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$d = 1,00 \text{ мм} = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$N = 100$$

$$\rho = 1030 \text{ кг/м}^3$$



В момент отрыва капли:

$$m_0 g = F_{\Pi} = \sigma l$$

$$m_0 = \frac{m}{N} \pi \quad l = d$$

$$\sigma = \frac{mg}{\pi N d}$$

$$\sigma = \frac{1,45 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{3,14 \cdot 110 \cdot 1,00 \cdot 10^{-3}} = 0,0412 \text{ Н/м} = 41,2 \text{ мН/м}$$

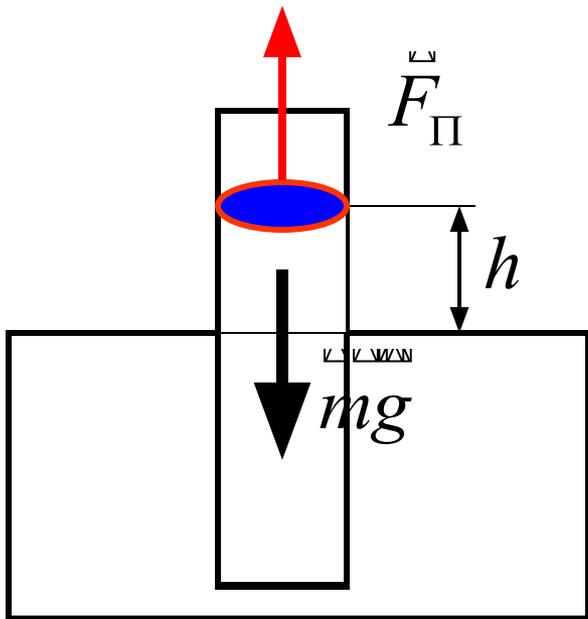
Уровень плазмы в капилляре диаметром 1,0 мм поднялся на 18 мм. Определить коэффициент поверхностного натяжения плазмы. Плотность плазмы 1030 кг/м³.

СИ:

$$h = 18 \text{ мм} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$d = 1,0 \text{ мм} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\rho = 1030 \text{ кг/м}^3$$



$$mg = F_{\Pi}$$

$$m = \rho V = \rho \pi r^2 h \quad F_{\Pi} = \sigma l = \sigma 2\pi r$$

$$\rho \pi r^2 h g = \sigma 2\pi r$$

$$\rho r h g = 2\sigma$$

$$\sigma = \frac{\rho r h g}{2} = \frac{\rho d h g}{4}$$

$$\sigma = \frac{1030 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{4} =$$

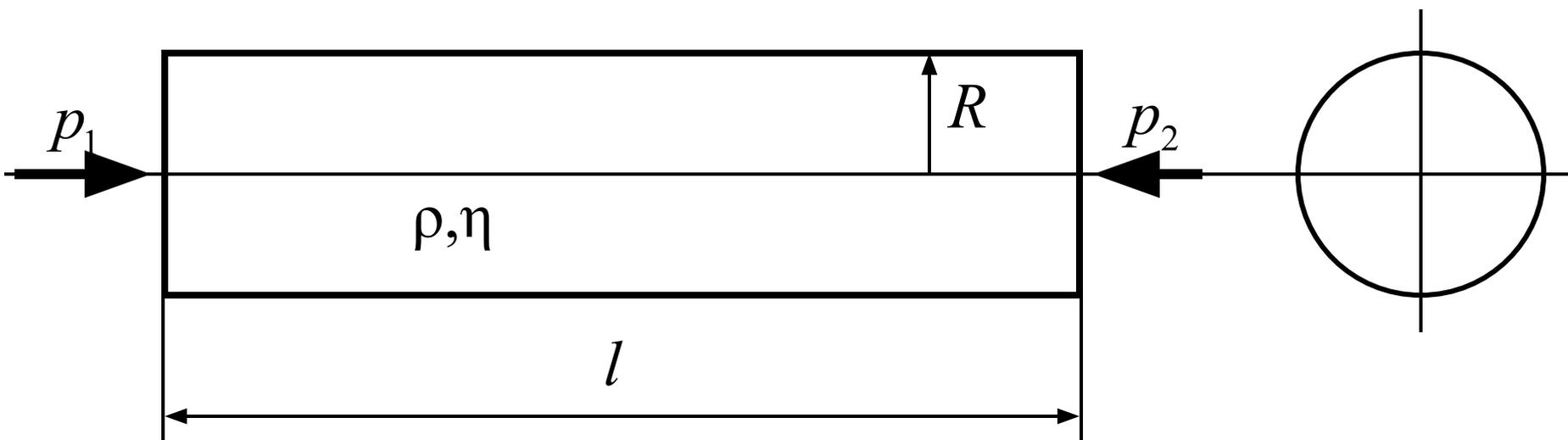
$$= 0,045 \text{ Н/м} = 45 \text{ мН/м}_{23}$$

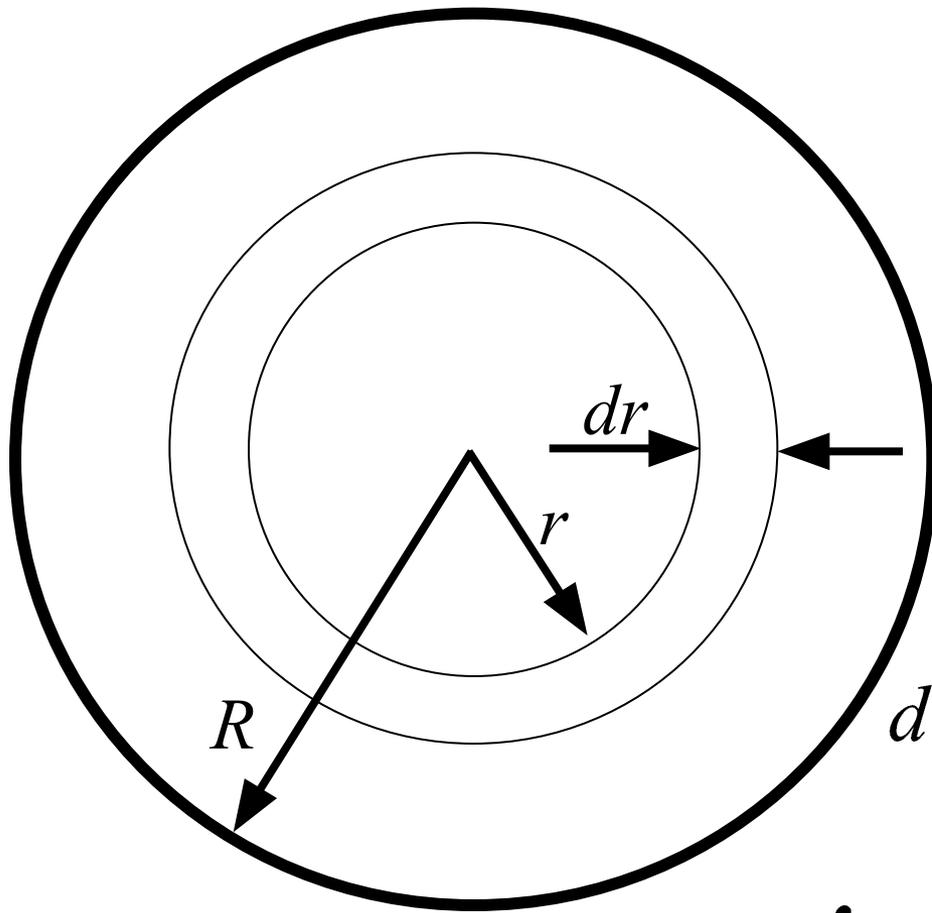
Течение ньютоновской вязкой жидкости по круглой гладкой трубе с жесткими стенками

Заданы: длина трубы l ; радиус трубы R ;

свойства жидкости: плотность ρ и вязкость η ;

перепад давлений на торцах трубы: $p_1 - p_2$





$$dQ = \rho v dS = \rho v 2\pi r \cdot dr$$

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

$$dQ = \rho \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) 2\pi r \cdot dr$$

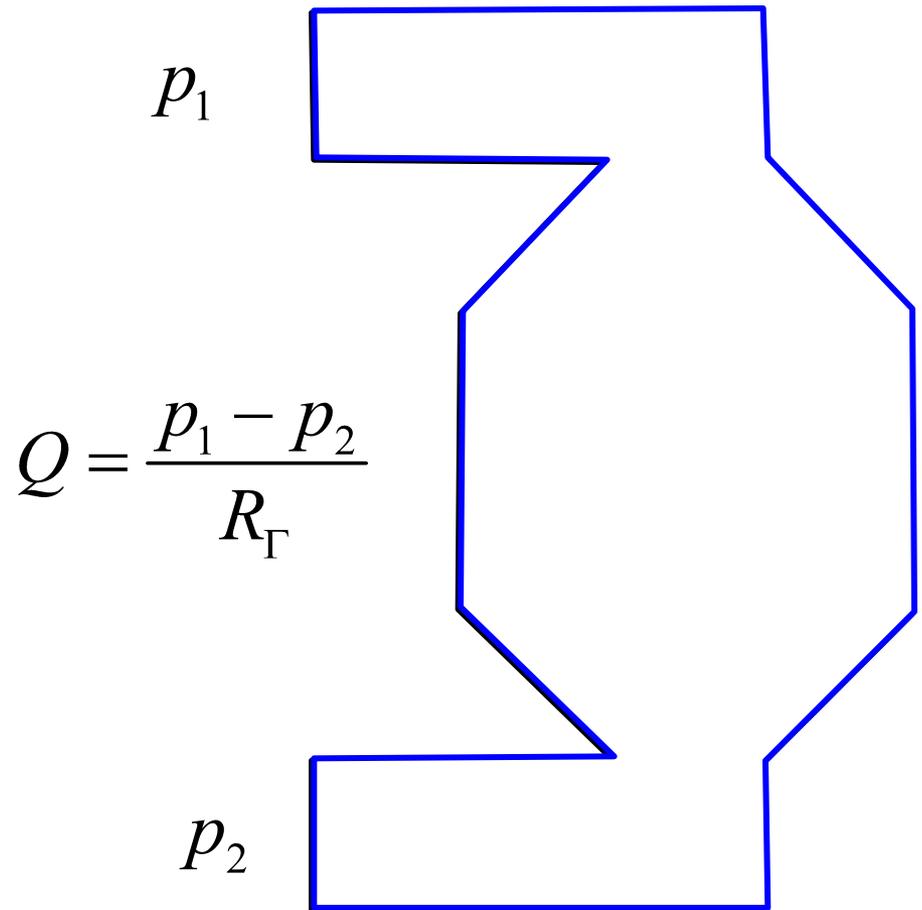
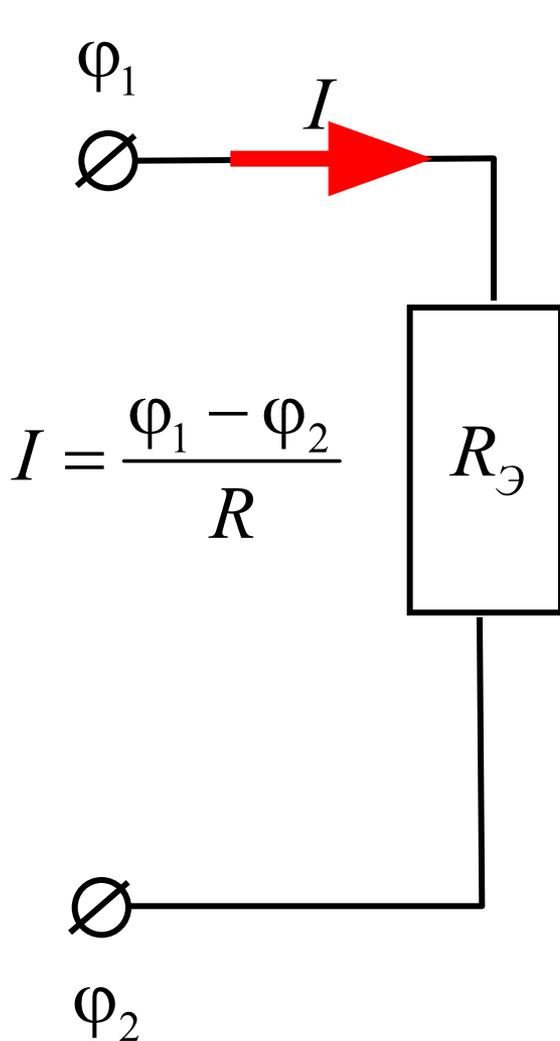
$$Q = \int dQ = \frac{\rho}{4\eta l} \frac{p_1 - p_2}{l} \int_0^R (R^2 - r^2) r \cdot dr$$

Уравнение Пуазейля:

$$Q = \frac{\pi \rho}{8\eta l} \frac{p_1 - p_2}{l} R^4$$

Следствие из уравнения Пуазейля:

Электрическая аналогия по принципу передачи энергии:



$$Q \rightarrow I$$

$$p_1 - p_2 \rightarrow \varphi_1 - \varphi_2$$

$$Q = \pi\rho \frac{p_1 - p_2}{8\eta l} R^4 \rightarrow$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_\vartheta} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_\Gamma = \frac{p_1 - p_2}{Q}$$

$$\rightarrow R_\vartheta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I}$$

$$R_\Gamma = \frac{8\eta l}{\pi\rho R^4}$$

$$[R_\Gamma] = \frac{[p]}{[Q]} = \frac{\frac{\text{Pa}}{c}}{\frac{\text{kg}}{c}} = \frac{\text{Pa} \cdot c}{\text{kg}}$$

Оцените гидравлическое сопротивление кровеносного сосуда длиной 1,2 см и радиусом 1,0 мм.

Коэффициент вязкости крови примите равным 5,0 мПа·с.

Плотность крови 1050 кг/м³.

СИ:

$$l = 1,2 \text{ см} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r = 1,0 \text{ мм} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$$

$$\eta = 5,0 \text{ мПа} \cdot \text{с} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

Оценка по Пуазейлю:

$$R_{\Gamma} = \frac{8\eta l}{\pi r R^4}$$

$$\begin{aligned} R_{\Gamma} &= \frac{8 \cdot 5,0 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot 1050 \cdot (1,0 \cdot 10^{-3})^4} = \\ &= 1,5 \cdot 10^5 \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{к}2} \end{aligned}$$

При нормальной частоте сокращений сердца полный кругооборот крови происходит за 60 с.

Считая объём крови равным 5,0 л, определите общее гидравлическое сопротивление кровотоку.

Перепад давления в сердце принять равным 13,3 кПа.

Плотность крови 1050 кг/м³.

СИ:

$$M_K = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\Delta p = 13,3 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$t = 60 \text{ с}$$

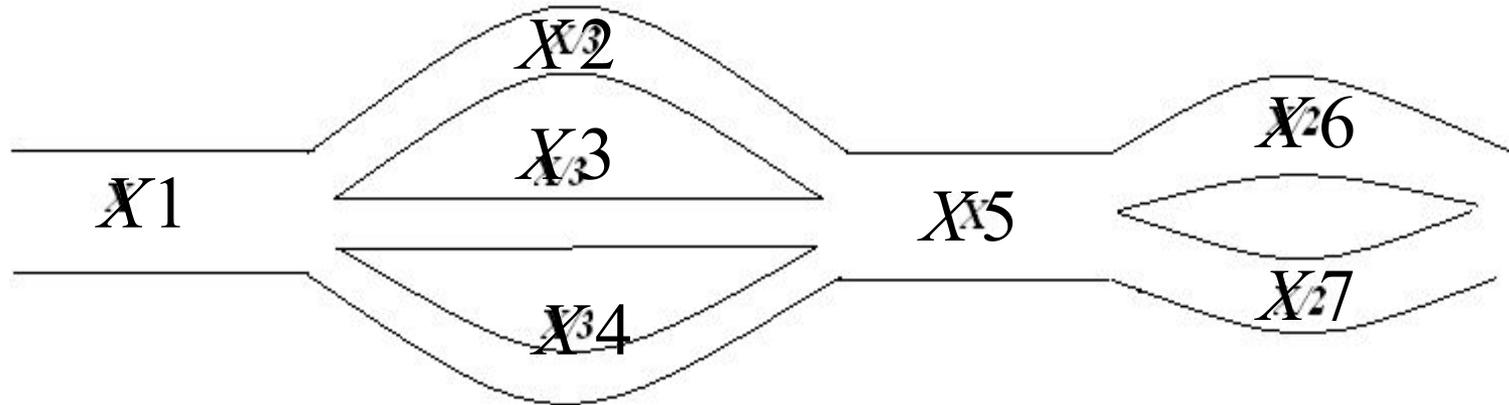
$$Q = \frac{\Delta p}{R_{\Gamma}} \Rightarrow R_{\Gamma} = \frac{\Delta p}{Q}$$

$$Q = \frac{m_K}{t} = \frac{\rho V_K}{t}$$

$$R_{\Gamma} = \frac{\Delta p \cdot t}{m_K} = \frac{\Delta p \cdot t}{\rho \cdot V_K}$$

$$R_{\Gamma} = \frac{13,3 \cdot 10^3 \cdot 60}{1050 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^5 \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{кг}}$$

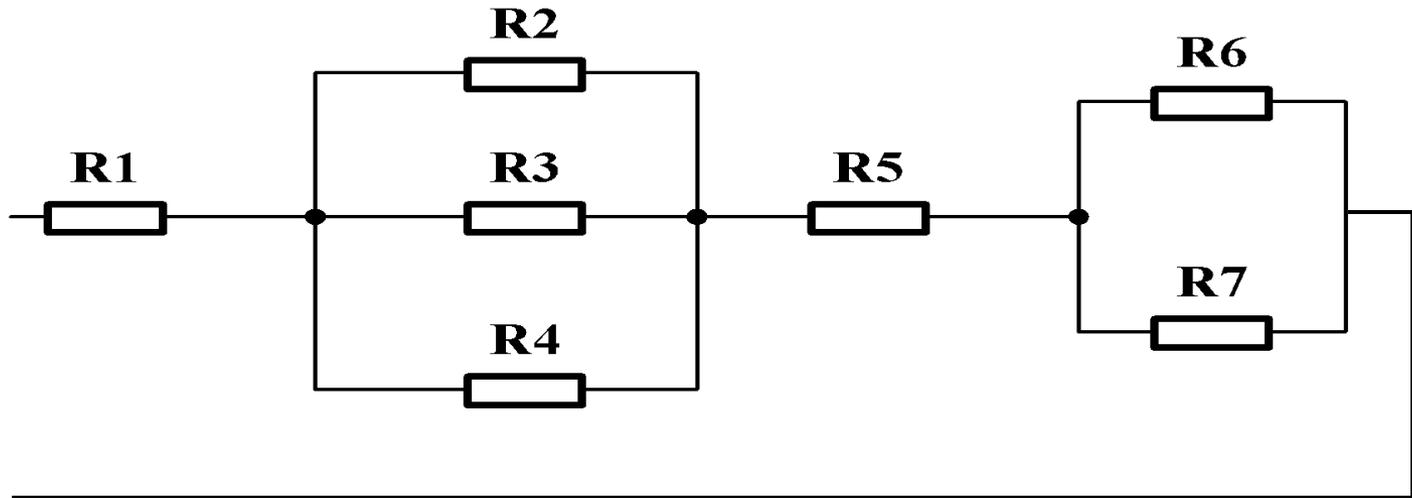
Оцените общее гемодинамическое сопротивление участка системы сосудов ($R_{\Gamma} = X$).



Описание соединения сосудов:

$$X = X_1 + (X_2 \parallel X_3 \parallel X_4) + X_5 + (X_6 \parallel X_7)$$

Электрическая аналогия:



$$\frac{1}{R_{(2-4)}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$\frac{1}{X_{(2-4)}} = \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \frac{1}{X_4}$$

$$\frac{1}{R_{(6-7)}} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}$$

$$\frac{1}{X_{(6-7)}} = \frac{1}{X_6} + \frac{1}{X_7}$$

$$X = X_1 + X_{(2-4)} + X_5 + X_{(6-7)}$$

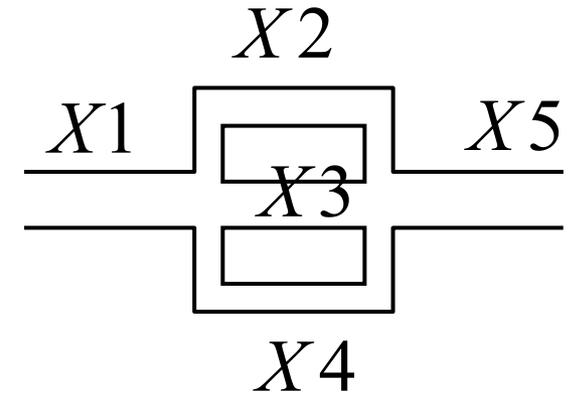
Для девочек – не забудь, солнышко, перевернуть! 32

Казалось бы сложная задача ($R_{\Gamma} = X$). :

.Перепад давлений на участке из
пяти сосудов равен 1500 Па.

$$X_1 = 1; X_2 = 2; X_3 = 4; X_4 = 6; X_5 = 1,5$$

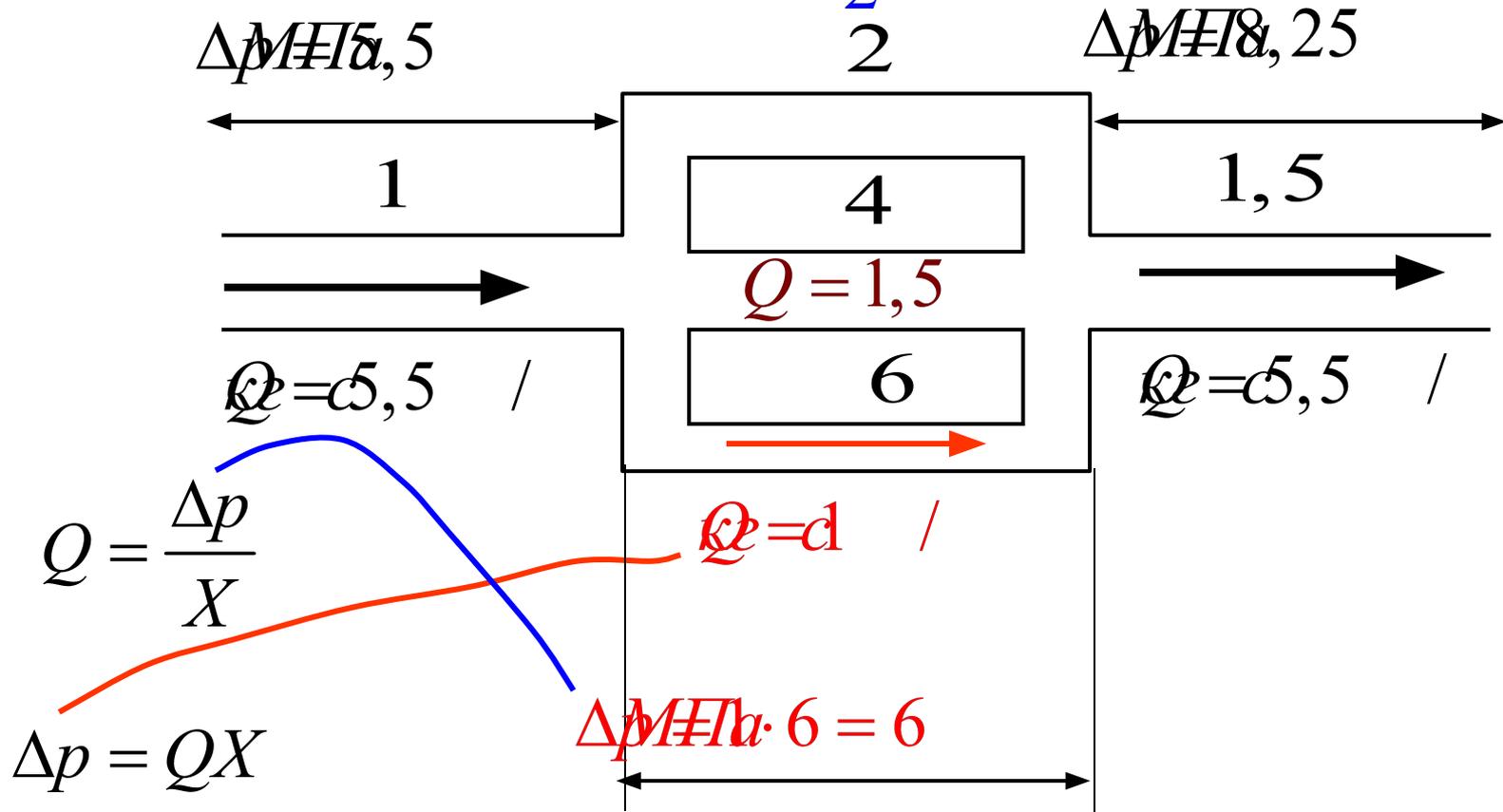
$$X = \left[\frac{\text{МПа} \cdot \text{с}}{\text{кг}} \right]$$



Определить расходы крови в каждом сосуде:

$$X = \left[\frac{MПа \cdot c}{кг} \right]$$

$$Q = \frac{6}{2} = 3$$



Итого по перепаду давления:

$$\sum \Delta p = 5,5 + 6 + 8,25 = 19,75 \text{ МПа} = 19,75 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

По условию:
 $\Delta p = 1500 \text{ Па}$

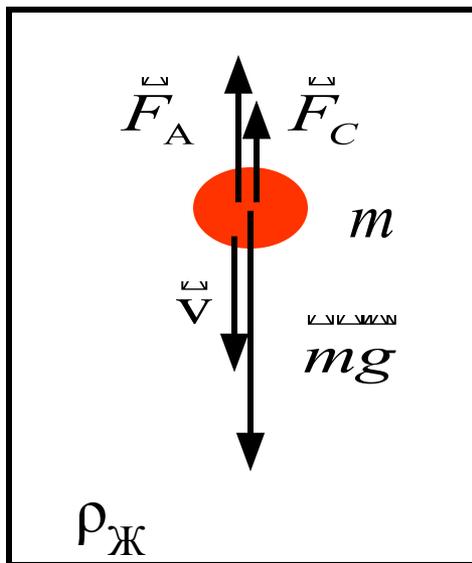
Коэффициент пересчета:

$$k = \frac{1500}{19,75 \cdot 10^6} = 7,6 \cdot 10^{-5}$$

Все «потолочные» цифры умножаются на коэффициент.

$$Q = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow Q = 3 \cdot 7,6 \cdot 10^{-5} = 23 \cdot 10^{-5} \quad /c$$

$$\Delta p_{\text{МЭП}} \cdot 6 = 6 \quad a \rightarrow \Delta p = 6 \cdot 10^6 \cdot 7,6 \cdot 10^{-5} = 460 \text{ П}$$



Сила Стокса:

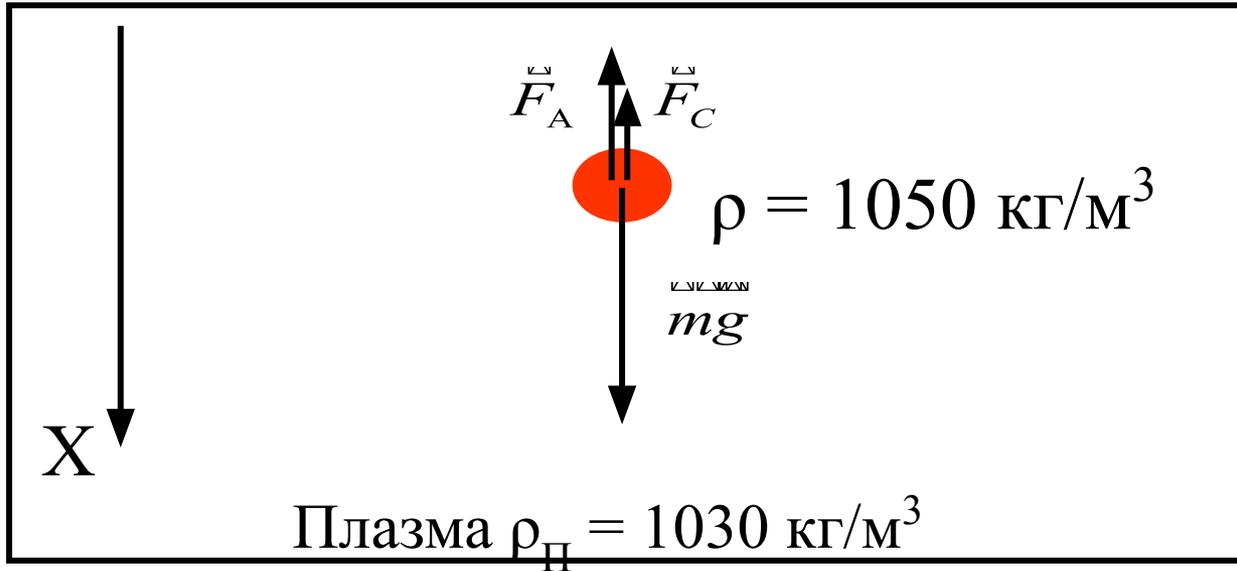
$$\vec{v} = const \quad \vec{F}_C \uparrow \downarrow \vec{v}$$

Для шарика радиуса r :

$$F_C = 6\pi \eta v$$

Определите скорость оседания эритроцитов в плазме крови (в мм/ч)

исходя из предположения, что они имеют форму шариков диаметром 7 мкм и не склеиваются между собой. Вязкость крови 5 мПа·с, плотность крови 1050 кг/м³, плотность плазмы крови 1030 кг/м³.



$$\vec{v} = \text{const}$$

$$\sum \vec{F}_i = mg + \vec{F}_A + \vec{F}_C = 0$$

$$mg - F_A - F_C = 0$$

$$mg = \rho V g = \rho \frac{1}{6} \pi d^3 g$$

$$F_A = \rho_{\text{П}} V g = \rho_{\text{П}} \frac{1}{6} \pi d^3 g$$

$$F_C = 6\pi \eta v \Rightarrow 3\pi \eta d$$

$$\rho \frac{1}{6} \pi d^3 g - \rho_{\Pi} \frac{1}{6} \pi d^3 g - 3\pi \eta d v = 0 \quad \times \frac{6}{\pi d}$$

$$\rho d^2 g - \rho_{\Pi} d^2 g - 18\eta v = 0$$

$$v = \frac{(\rho - \rho_{\Pi}) d^2 g}{18}$$

$$[v] = \frac{m}{c} = \frac{10^3 \text{ мм}}{\frac{1}{3600} \text{ час}} = 3,6 \cdot 10^6 \frac{\text{мм}}{\text{час}}$$

При атеросклерозе критическое число Рейнольдса в некоторых сосудах становится равным 1060.

Оцените скорость, при которой возможен переход ламинарного течения крови в турбулентное в сосуде диаметром 15 мм.

$$d = 15 \cdot 10^{-3}$$

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}$$

$$v = \frac{Re \cdot \eta}{\rho \cdot d}$$

$$\eta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$$

Методы измерения вязкости

1. Капиллярный. Основан на уравнении Пуазейля:
определяется время протекания жидкости
заданного объема через капилляр известных
размеров при фиксированном перепаде давления

$$Q = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{8 \eta l} R^4$$

$$\frac{\rho V}{\Delta t} = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{8 \eta l} R^4$$

$$\eta = \pi \frac{p_1 - p_2}{8 l V} R^4 \Delta t$$

2. Метод падающего шарика. Основан на измерении скорости *равномерного* падения шарика известного радиуса в исследуемой жидкости.

$$mg - F_A - F_C = 0$$

$$F_C = 6\pi \eta v$$

3. Ротационный. Основан на измерении вращающего момента одного из соосных цилиндров при равномерном вращении его. В пространство между цилиндрами заливается исследуемая жидкость. Измеряется не только вязкость, но и зависимость вязкости от градиента скорости (неньютоновские жидкости).

На зачетное занятие
«Математика. Механика и гидромеханика»

иметь:

1. Чистая бумага;
2. Авторучки;
3. Калькулятор

Не иметь (даже в мыслях):

1. Полиграфия;
2. Гаджеты

Тема следующего практического занятия:

Электрическое поле и его характеристики.

Поле диполя. Диполь в электрическом поле.

Иметь при себе распечатанные выдачи лекции №4