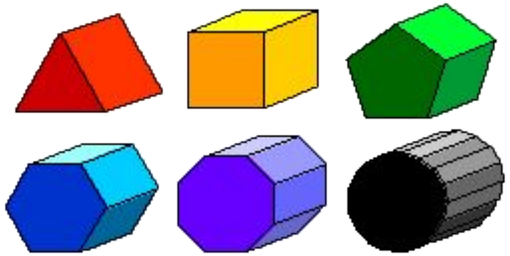


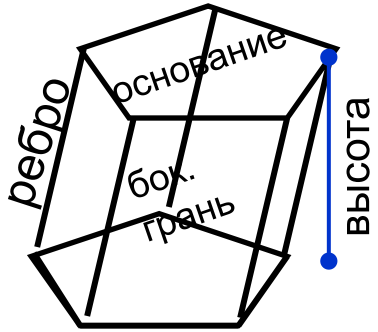
Практикум по решению стереометрических задач (базовый уровень)

Многогранники

невыпуклые

выпуклые

Призма



$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$$

$$S_{бок} = P_{\perp сеч} l$$

$$V = S_{осн} \cdot h$$

*__Наклонная__

* __Прямая__

** __Правильная__

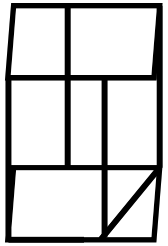
основание – прав. мн-к,

бок. ребра пер-ны   осн-ию

*__Параллелепипед__

грани – парал-мы

**__Прямой__

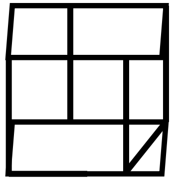


**__Прямоугольный__

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$S_{полн} = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$



**__Куб__

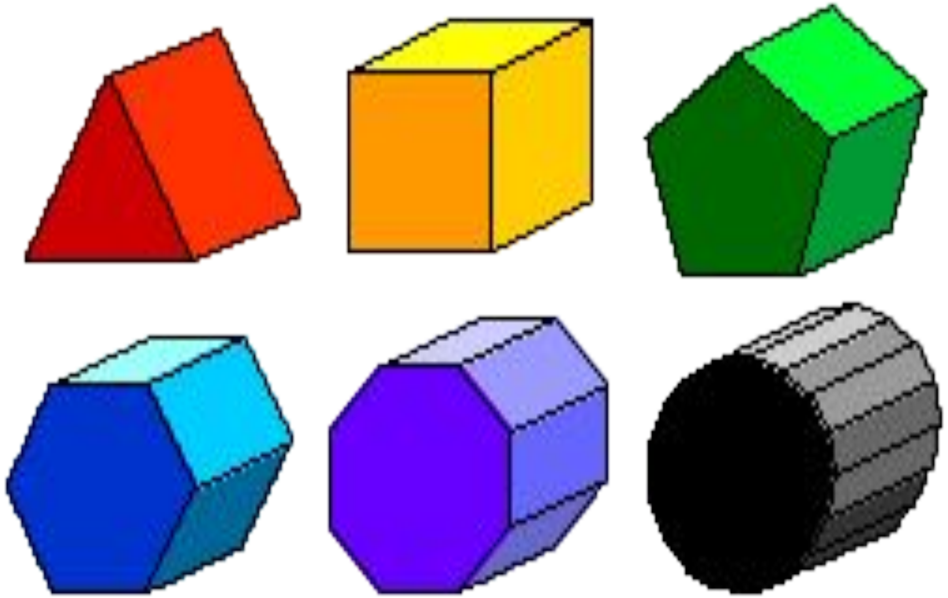
$$d^2 = 3a^2$$

$$S_{полн} = 6a^2$$

$$V = a^3$$

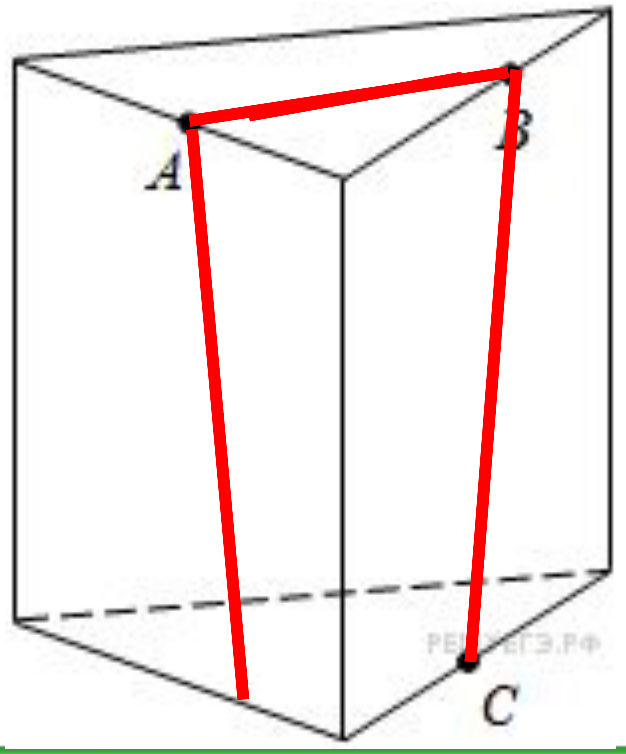
Пирамида

Призма в заданиях ЕГЭ



Задача №1

Плоскость, проходящая через три точки A, B и C, разбивает правильную треугольную призму на два многогранника. Сколько рёбер у многогранника, у которого больше вершин?



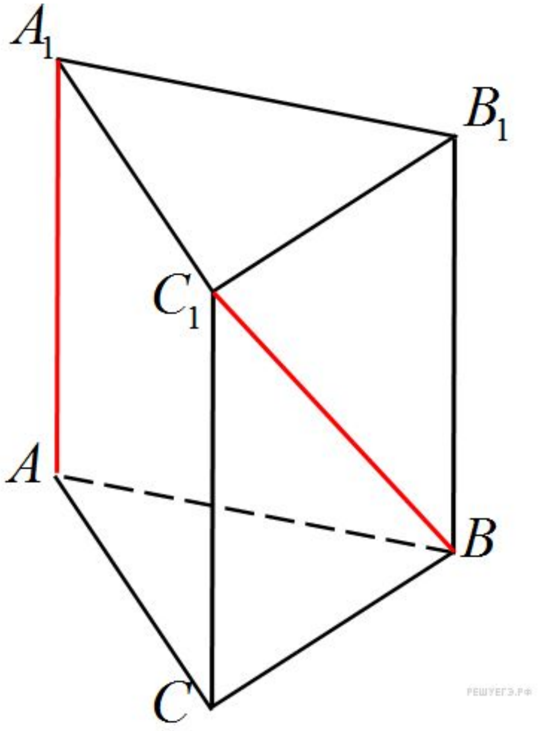
Плоскость делит призму на две призмы: треугольную, имеющую **6 вершин** и четырёхугольную, имеющую **8 вершин**.

Четырёхугольная призма имеет по 4 ребра в каждом из оснований и 4 боковых ребра, всего **12 рёбер**.

Ответ: 12.

Задача №2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 3, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1. Ответ дайте в градусах.



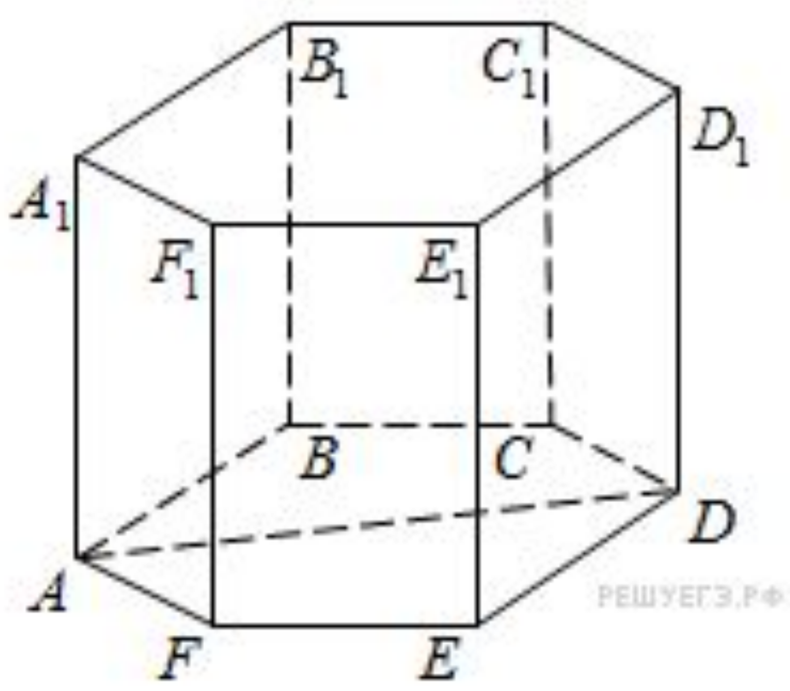
Отрезки A_1A и BB_1 лежат на параллельных прямых, поэтому искомый угол между прямыми A_1A и BC_1 равен углу между прямыми BB_1 и BC_1.

Боковая грань CBB_1C_1 — квадрат, поэтому угол между его стороной и диагональю равен **45°.**

Ответ: 45

Задача №3

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол DAB. Ответ дайте в градусах.



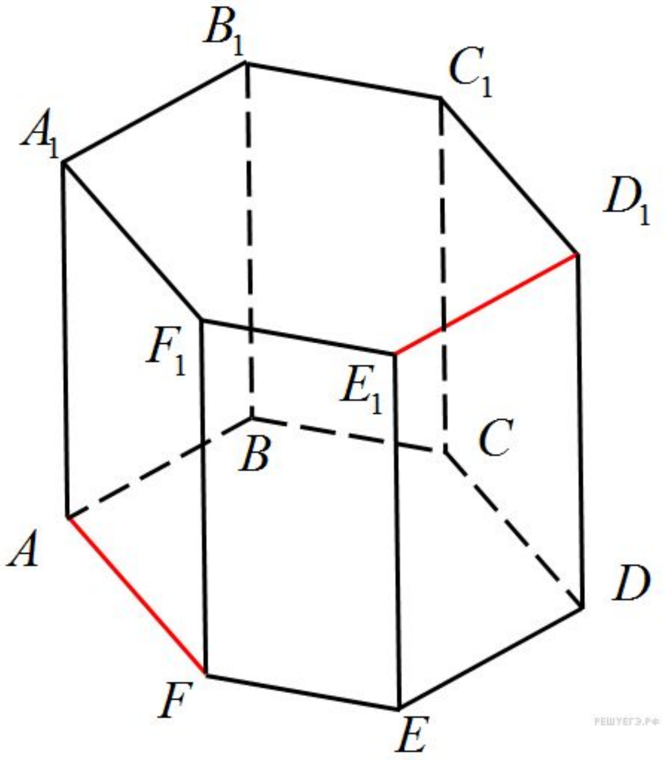
В правильном шестиугольнике углы между сторонами равны **120°** значит,

$$\angle DAB = \frac{1}{2}\angle FAB = \frac{1}{2}\cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

Ответ: 60

Задача №4

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 8. Найдите угол между прямыми FA и D_1E_1. Ответ дайте в градусах.



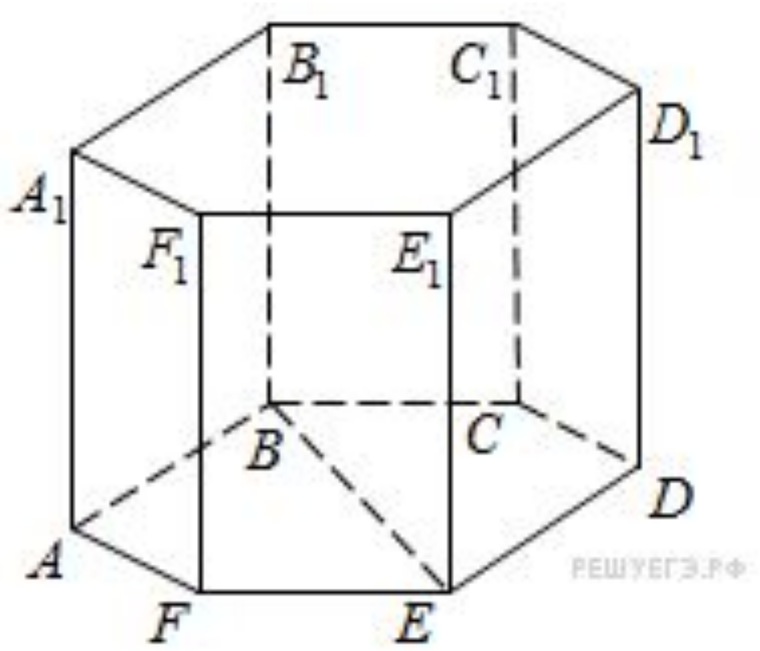
Отрезки D_1E_1, DE и AB лежат на параллельных прямых, поэтому искомый угол между прямыми FA и E_1D_1 равен углу между прямыми FA и AB.

Поскольку $\angle FAB$ между сторонами правильного шестиугольника равен **120°**, смежный с ним угол между прямыми FA и AB равен **60°**.

Ответ: 60

Задача №5

*В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны **1**. Найдите расстояние между точками B и E.*



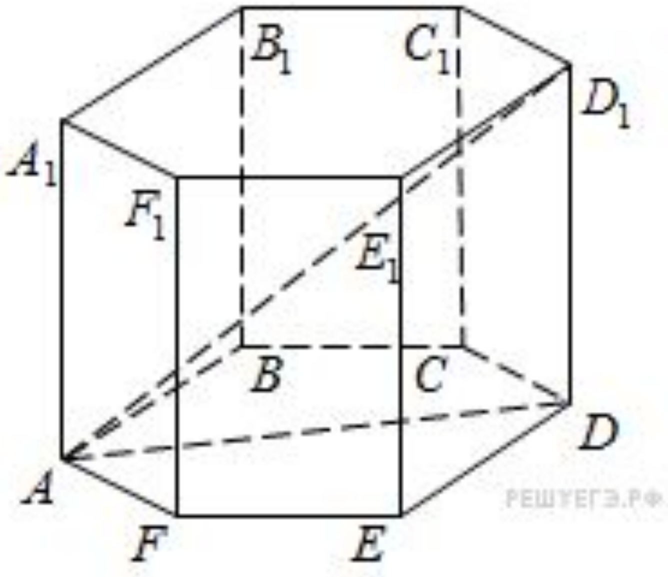
Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна его удвоенной стороне. Поэтому

$$BE = 1 \cdot 2 = 2$$

Ответ: 2

Задача №6

*В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны **1**. Найдите тангенс угла AD_1D.*



Рассмотрим прямоугольный **ΔAD_1D** катет которого является большей диагональю основания. Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна его удвоенной стороне: **$AD=2$**. Т.к. **D_1D** $=1$ имеем:

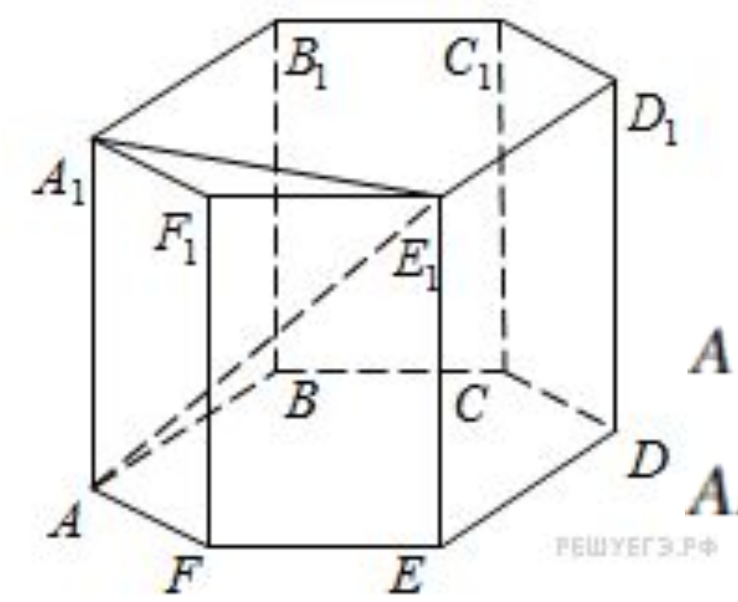
$$\operatorname{tg}\angle AD_1D=\frac{AD}{DD_1}=\frac{2}{1}=2.$$

Ответ: 2

Задача №7

*В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны **1**. Найдите расстояние между точками A и E_1.*

По теореме Пифагора $AE_1 = \sqrt{AA_1{}^2 + A_1E_1{}^2}$.



Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120°. По теореме косинусов

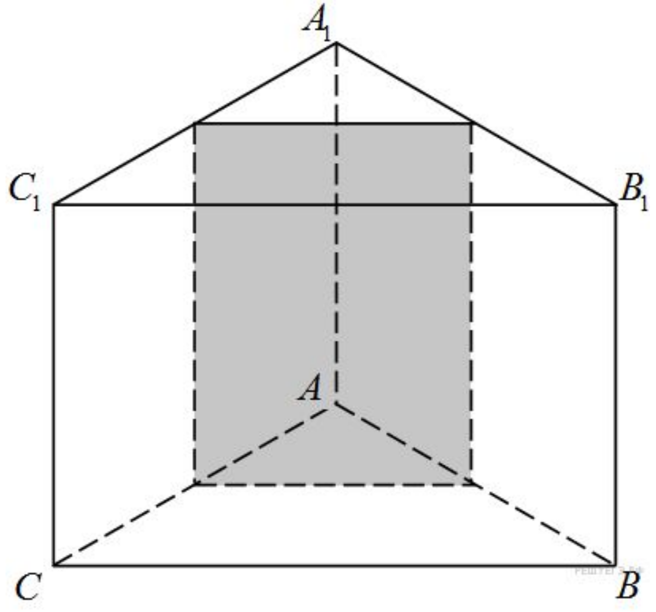
$$A_1E_1 = \sqrt{A_1F_1{}^2 + F_1E_1{}^2 - 2A_1F_1 \cdot F_1E_1 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}.$$

$$AE_1 = \sqrt{1+3} = 2.$$

Ответ: 2

Задача №8

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны ***2****, боковые рёбра равны* ***5****. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.*

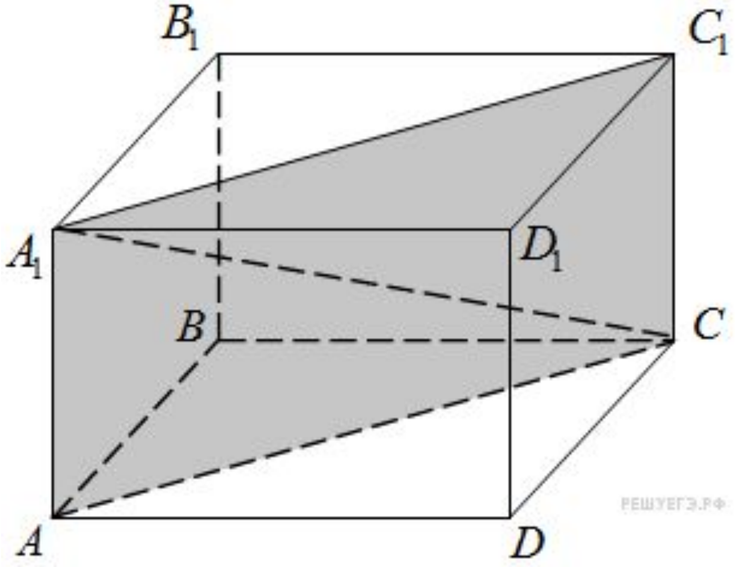


Противоположные стороны сечения являются соответственно средними треугольников, лежащих в основании, и прямоугольников, являющихся боковыми гранями призмы. Значит, сечение представляет собой прямоугольник со сторонами **1** и **5**, площадь которого равна **5.**

Ответ: 5

Задача №9

*В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно **15**, а диагональ BD_1 равна **17**. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A, A_1 и C.*



Диагональное сечение прямой призмы — прямоугольник AA_1C_1C. Диагонали правильной четырёхугольной призмы равны: $BD_1 = A_1C$. По теореме Пифагора получаем:

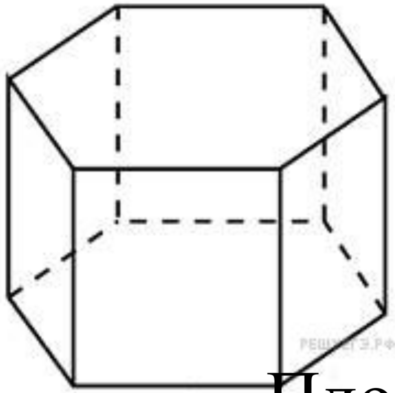
$$AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1{}^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$$

$$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = 120.$$

Ответ: 120

Задача №10

*Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна **5**, а высота – **10**.*



Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра ее основания на высоту $S_{бок.\,пр} = P_{осн} h$.

$$S_{бок} = 6 \cdot 5 \cdot 10 = 300$$

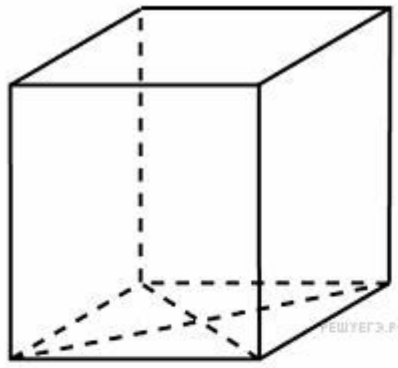
Другой способ:

Площадь боковой поверхности фигуры равна сумме площадей всех боковых граней $S_{бок} = 6S_{гр} = 6 \cdot 5 \cdot 10 = 300$

Ответ: 300

Задача №11

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными ***6 и 8****, и боковым ребром, равным* ***10****.*



Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и площади основания $S_{призмы} = S_{бок.} + 2S_{осн}$. Площадь ромба

$$S_P = \frac{1}{2}d_1 d_2 = 24.$$

Сторону основания вычислим по теореме Пифагора

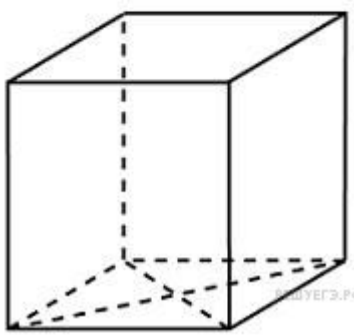
$$a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 5$$

$$S = 2S_{осн} + S_{бок} = 2S_P + 4aH = 48 + 4 \cdot 5 \cdot 10 = 248.$$

Ответ: 248

Задача №12

*В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными **6 и 8**. Площадь ее поверхности равна **248**. Найдите боковое ребро этой призмы.*



Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и площади основания $S_{призмы} = S_{бок.} + 2S_{осн}$. Площадь ромба

$$S_P = \frac{1}{2} d_1 d_2 = 24$$

Сторону основания вычислим по теореме Пифагора

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 5$$

$$S_{бок} = 4 \cdot 5 \cdot h = 20h$$

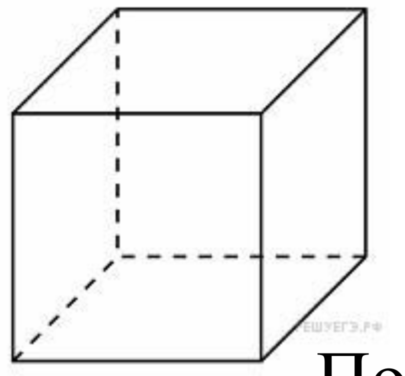
$$2 \cdot 24 + 20h = 248$$

$$h = \frac{248 - 48}{20} = 10$$

Ответ: 10

Задача №4

*Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна **20**, а площадь поверхности равна **1760**.*



Площадь поверхности правильной четырехугольной призмы выражается через сторону ее основания **а** и боковое ребро **Н** как $S = 2a^2 + 4aH.$

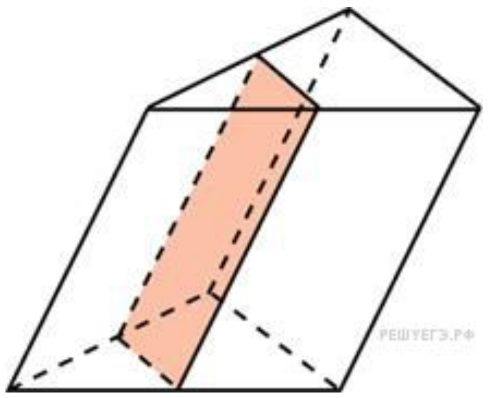
Подставим значения **а** и **S**: $1760 = 2 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20 \cdot H$

$H = 12.$

Ответ: 12

Задача №10

*Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна **8**. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.*



Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра основания на высоту боковой грани.

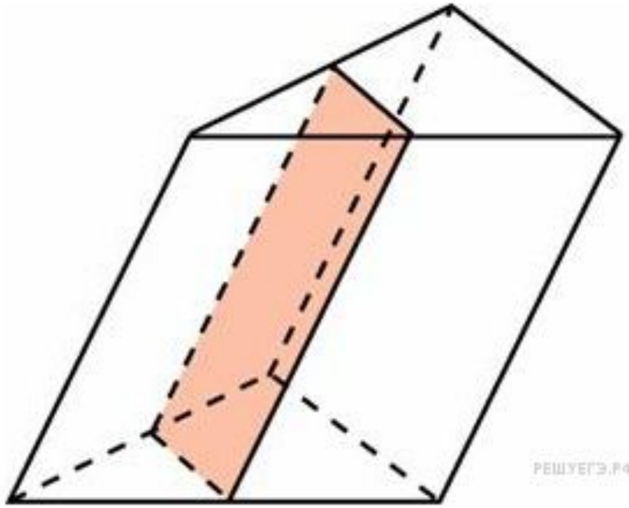
Высота боковой грани у исходной призмы и отсеченной призм совпадает. Поэтому площади боковых граней относятся как периметры оснований. Треугольники в основании исходной и отсеченной призм подобны, все их стороны относятся как **1:2.** Поэтому периметр основания отсеченной призмы вдвое меньше исходного. Значит, площадь боковой поверхности исходной призмы равна **16.**

Ответ: 16

Задача №13

Через среднюю линию основания треугольной призм

площадь боковой поверхности которой равна 24, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

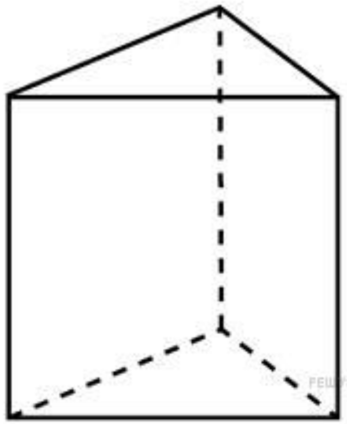


Площадь боковых граней отсеченной призмы вдвое меньше соответствующих площадей боковых граней исходной призмы. Поэтому площадь боковой поверхности отсеченной призмы вдвое меньше площади боковой поверхности исходной, т.е равна 12.

Ответ: 12

Задача №14

*Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами **6** и **8**, высота призмы равна **10**. Найдите площадь ее поверхности.*



Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и площади основания $S_{призмы}=S_{бок.}+2S_{осн.}$ Площадь прямоугольного треугольника

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}6\cdot 8=24.$$

Третья сторона треугольника в основании равна 10

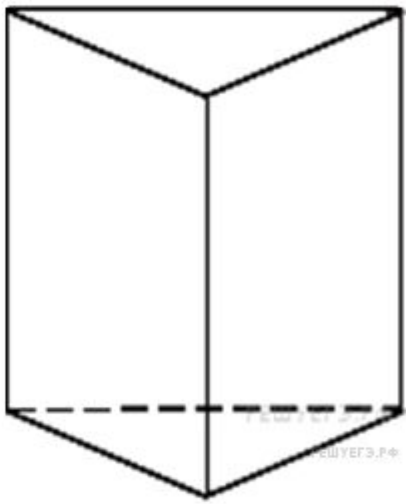
$$S_{бок}=Ph=24\cdot 10=240$$

$$S=2S_{\Delta}+S_{бок}=48+240=288.$$

Ответ: 288.

Задача №15

*Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна **6**. Какой будет площадь поверхности призмы, если все ее ребра увеличить в **три** раза?*



Площади подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия.

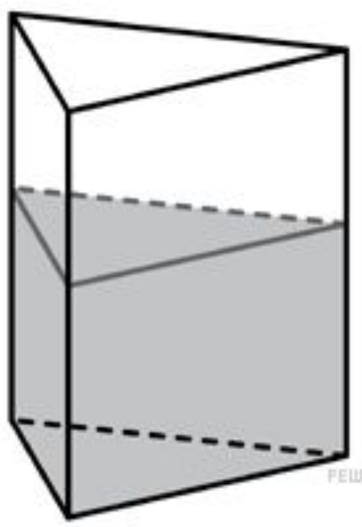
$$\frac{S_1}{S_2} = k^2, \quad k - \text{коэффициент} \quad \text{подобия}$$

Поэтому если все ребра увеличить **в три раза**, площадь поверхности увеличится **в 9 раз**. Значит, она станет равна **54**.

Ответ: 54.

Задача №16

*В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает **80 см**. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания **в 4 раза** больше, чем у первого? Ответ выразите в см.*



Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту $V_{призмы} = S_{осн} h$.

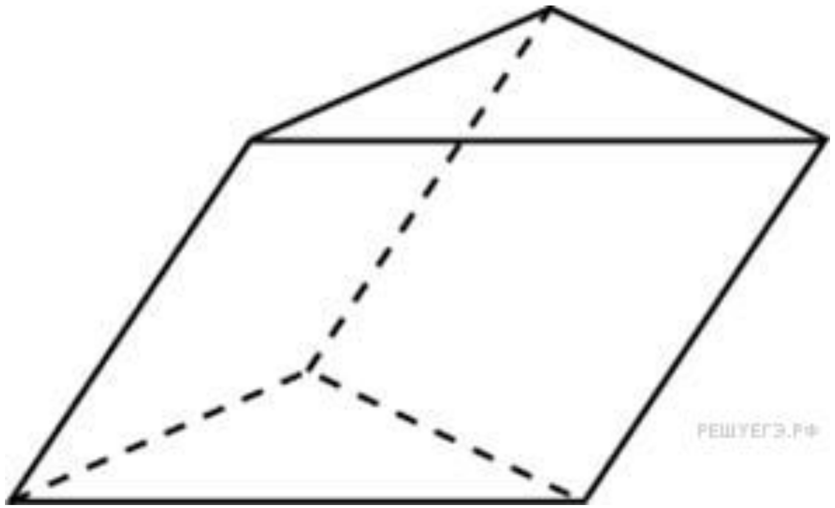
$$\frac{S_1}{S_2} = k^2, \quad k - \textit{коэффициент} \quad \textit{подобия}$$

Поэтому при увеличении стороны основания в **4 раза** площадь основания увеличится в **16 раз**, объем воды при этом остается неизменным. Следовательно, высота уменьшится в **16 раз** и будет равна **5 см**.

Ответ: 5

Задача №29

В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 и отстоит от других боковых ребер на 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

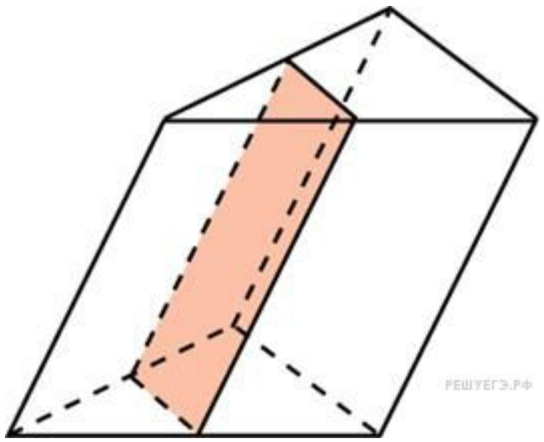


$$S_{бок} = l \cdot P_{\perp} = 10 \cdot (10 + 6 + 8) = 240$$

Ответ: 240

Задача №16

*Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен **5**. Найдите объем исходной призмы.*

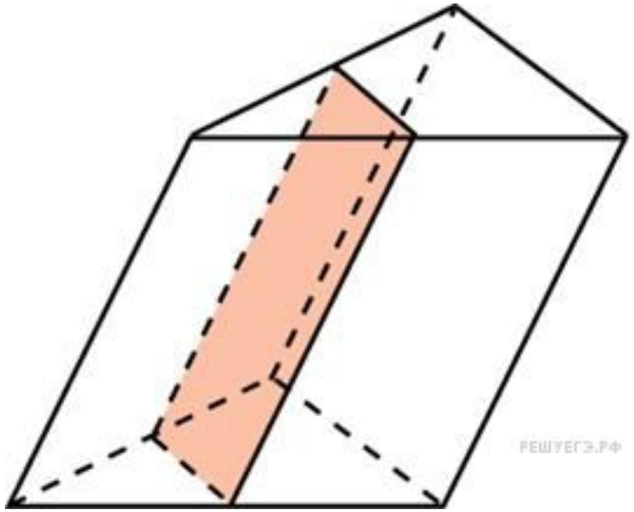


Площадь основания отсеченной части меньше площади основания всей призмы **в 4 раза** (т.к. стороны треугольника уменьшились в 2 раза). Высоты обеих частей одинаковы, поэтому объем отсеченной части в **4 раза** меньше объема целой призмы, который равен **20**.

Ответ: 20

Задача №17

*Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен **32**, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.*

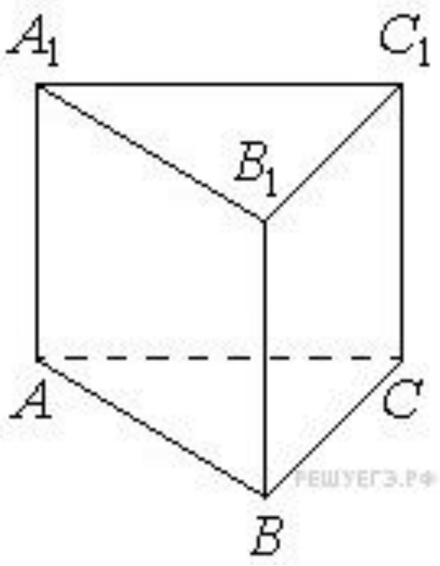


Площадь основания отсеченной части меньше площади основания всей призмы **в 4 раза** (т.к. стороны треугольника уменьшились в 2 раза). Высота осталась прежней, значит, объем уменьшился в **4 раза**.

Ответ: 8

Задача №18

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3, а высота этой призмы равна $4\sqrt{3}$. Найдите объём призмы $ABCA_1B_1C_1$.



Объём правильной треугольной призмы вычисляется по формуле:

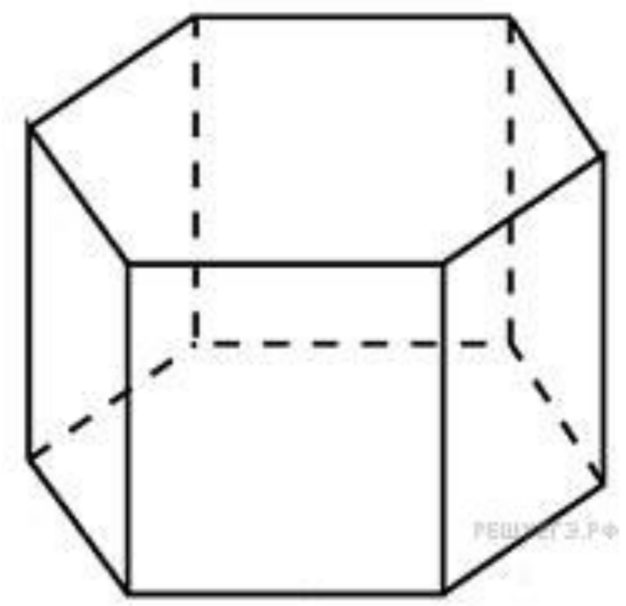
$$V = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}_{\text{Площадь правильного треугольника}} \cdot h,$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 \cdot 4\sqrt{3} = 27.$$

Ответ: 27.

Задача №19

*Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны **1**, а боковые ребра равны **√3**.*



Площадь правильного шестиугольника со стороной а, лежащего в основании, задается формулой:

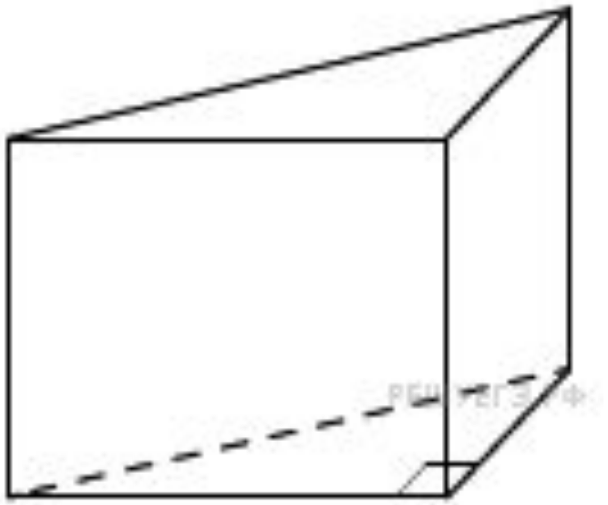
$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = Sh = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = 4{,}5$$

Ответ: 4,5

Задача №20

*В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен **2**, а гипотенуза равна $\sqrt{53}$. Найдите объём призмы, если её высота равна **3**.*



$$b=\sqrt{(\sqrt{53})^2-2^2}=\sqrt{53-4}=\sqrt{49}=7.$$

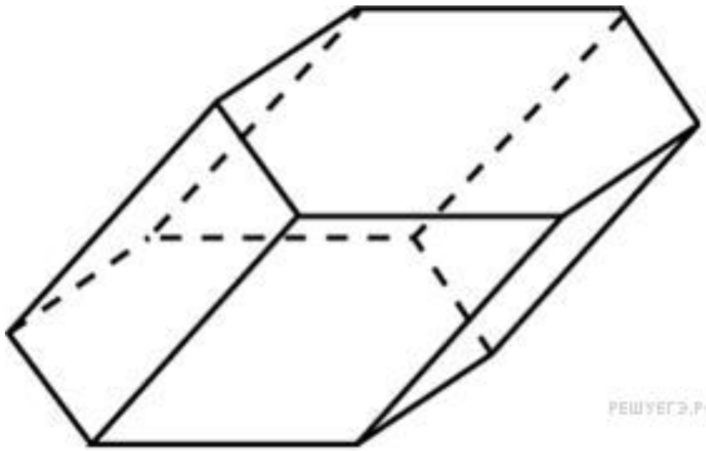
$$S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}ab\Leftrightarrow\frac{2\cdot7}{2}=7.$$

$$V_{\text{пр.}}=S_{\text{осн}}\cdot h\Leftrightarrow V_{\text{пр.}}=7\cdot3=21.$$

Ответ: 21

Задача №21

*Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами **2**, а боковые ребра равны **$2\sqrt{3}$** и наклонены к плоскости основания под углом **30°** .*



Объем призмы $V = S_{oc.} \cdot h = S_{oc.} \cdot L\sin\alpha$ где **S**– площадь основания, а **L** – длина ребра, составляющего с основанием угол **α**. Площадь правильного шестиугольника со стороной **а** равна

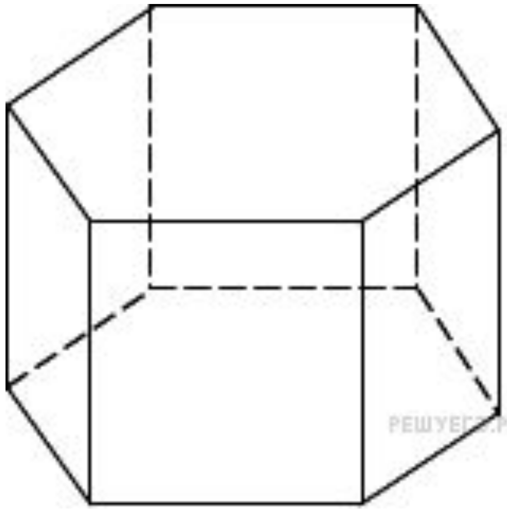
$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 18$$

Ответ: 18

Задача №22

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны √3.



Объем призмы равен произведению площади основания на высоту. Высотой правильной призмы является ее боковое ребро. Основание призмы — правильный шестиугольник. Площадь правильного шестиугольника со стороной **a** вычисляется по формуле

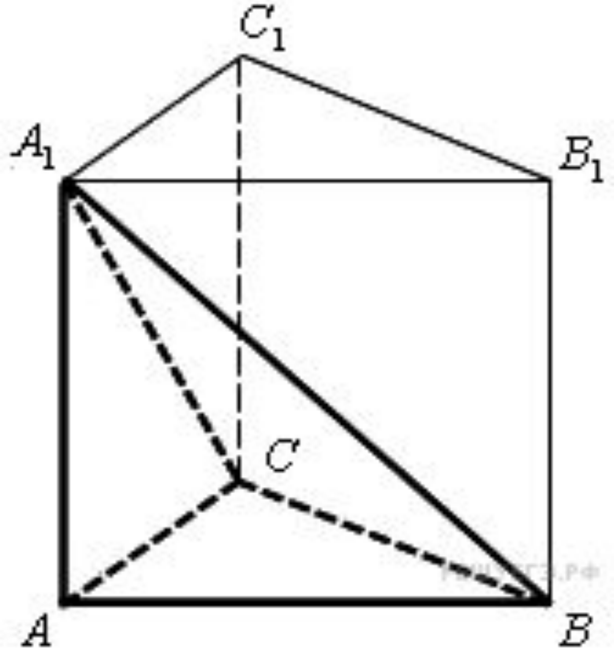
$$S = 1,5\sqrt{3}a^2$$

$$V = S_{осн}H = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2}a^2 = \frac{27}{2} = 13,5.$$

Ответ: 13,5

Задача №23

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна ***2****, а боковое ребро равно* ***3****.*

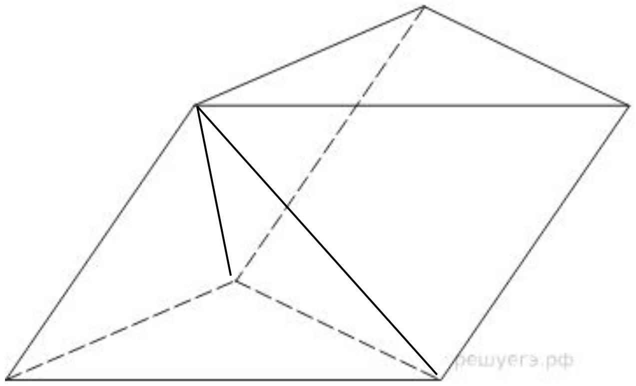


Требуется найти объём пирамиды, основание и высота которой совпадают с основанием и высотой данной треугольной призмы. Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пр}}h_{\text{пр}} = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3 = 2.$$

Задача №24

*От треугольной призмы, объем которой равен **6**, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.*



Объем призмы равен $V_{призмы} = S_{осн}h$.

Объем призмы равен $V_{пирамиды} = 1/3 S_{осн}h$.

$$V_{отсеч.пир.} = \frac{1}{3} V_{призмы}$$

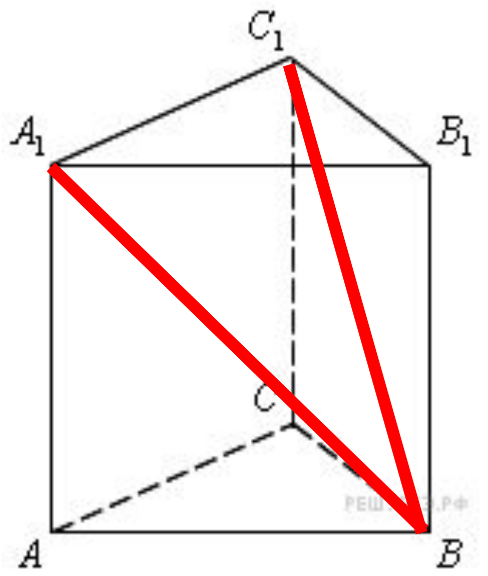
$$V_{отсеч.пир.} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

$$V_{остав.части.} = V_{призмы} - V_{отсеч.пир.} = 6 - 2 = 4$$

Ответ: 16

Задача №25

*Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A₁, C₁ правильной треугольной призмы ABCA₁B₁C₁, площадь основания которой равна **3**, а боковое ребро равно **2**.*



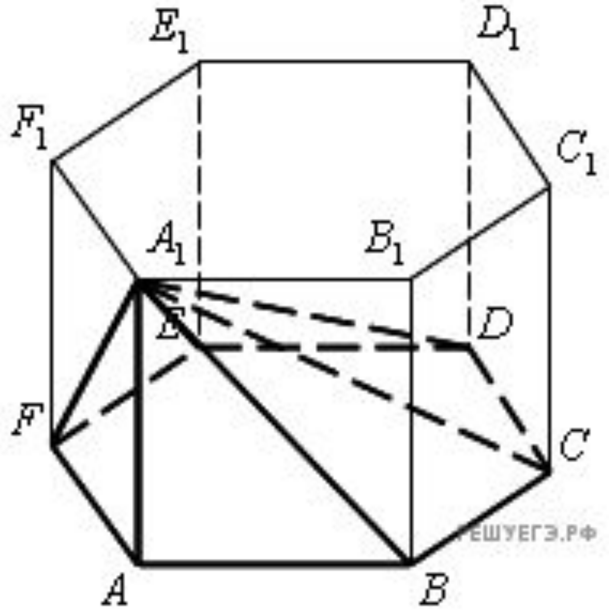
Искомый объём многогранника равен разности объёмов призмы **$ABCA_1B_1C_1$** и пирамиды **$BA_1B_1C_1$,** основания и высоты которых совпадают.

$$V_{\text{мног}} = S_{\text{пр}}h_{\text{пр}} - \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}} = 3\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 2 = 4.$$

Ответ: 4

Задача №26

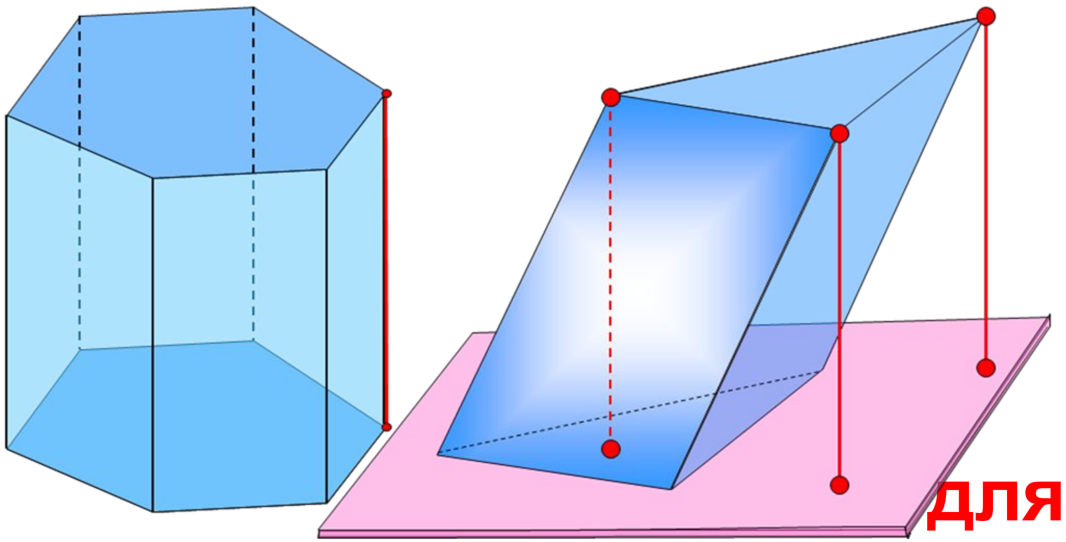
*Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна **4**, а боковое ребро равно **3**.*



Основание пирамиды такое же, как основание правильной шестиугольной призмы, и высота у них общая. Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} h_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пр}} h_{\text{пр}} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4.$$

Ответ: 4



Задачи

для самостоятельного решения