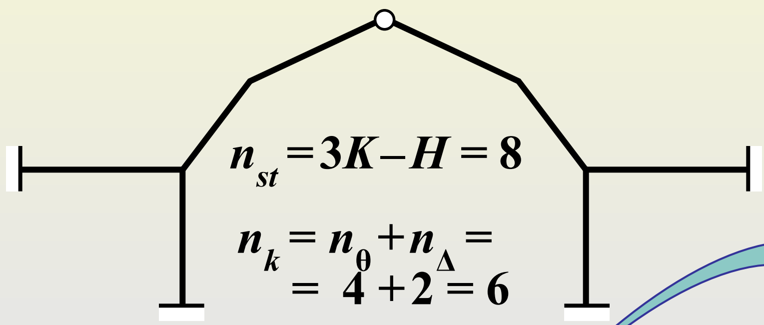
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
Часть II

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Расчёт СНС смешанным методом

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Смешанный метод – **метод расчёта деформируемых систем, в котором за основные неизвестные принимаются одновременно** ***реакции лишних связей и перемещения расчётных узлов.***

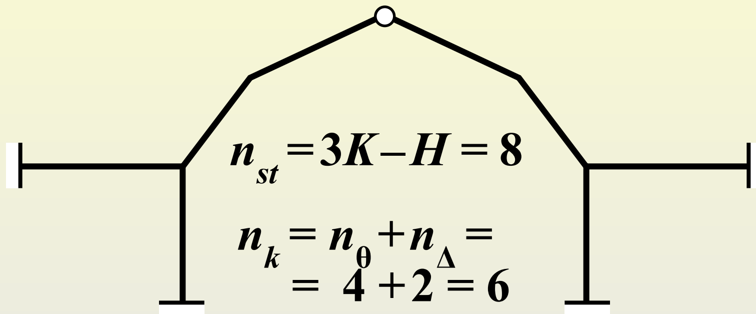


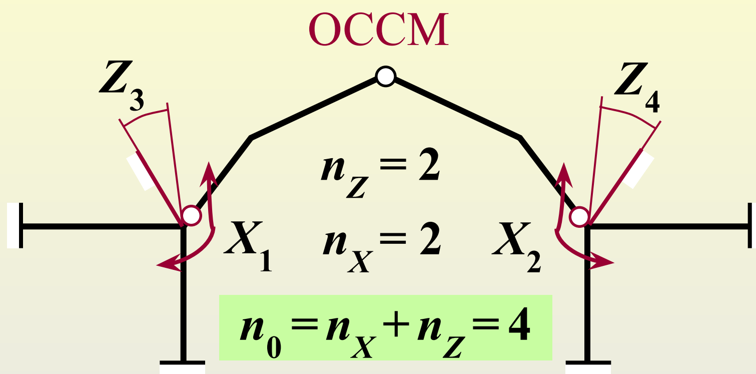
Основная система смешанного метода (ОССМ) – геометрически неизменяемая система, получаемая из рассчитываемой СНС удалением лишних связей, реакции которых принимаются за силовые основные неизвестные X, и введением угловых и линейных связей в расчётные узлы, перемещения которых принимаются за неизвестные Z.

Рекомендуется: лишние связи удалять в тех частях системы, где их число меньше, чем количество неизвестных перемещений узлов; а дополнительные связи вводить в узлы тех частей системы, где суммарное число перемещений узлов меньше числа лишних связей.

Свойство ОССМ: в результате удаления лишних связей в ОССМ образуются ***статически определимые*** **(как правило) части; а остальные части ОССМ, где введены дополнительные связи – как правило,** ***кинематически определимые*.**

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ





Условия эквивалентности НДС РСНС и ОССМ:

1-я группа – *кинематические* условия: $\Delta_i = 0, \; i = 1, \ldots, n_X$ (отрицание перемещений по направлениям удалённых лишних связей)

2-я группа – *статические* условия: $R_i = 0, \; i = n_X + 1, \ldots, n_0$ (отрицание реакций введённых связей)

$$\Delta_i = \Delta_{iX} + \Delta_{iZ} + \Delta_{i\Sigma}; \quad \Delta_{iX} = \sum_{k=1}^{n_X} \Delta_{iX_k} = \sum_{k=1}^{n_X} \delta_{ik} X_k; \quad \Delta_{iZ} = \sum_{k=n_X+1}^{n_0} \Delta_{iZ_k} = \sum_{k=n_X+1}^{n_0} \delta'_{ik} Z_k;$$

$$R_i = R_{iX} + R_{iZ} + R_{i\Sigma}; \quad R_{iX} = \sum_{k=1}^{n_X} R_{iX_k} = \sum_{k=1}^{n_X} r'_{ik} X_k; \quad R_{iZ} = \sum_{k=n_X+1}^{n_0} R_{iZ_k} = \sum_{k=n_X+1}^{n_0} r_{ik} Z_k$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n_X} \delta_{ik} X_k + \sum_{k=n_X+1}^{n_0} \delta'_{ik} Z_k + \Delta_{i\Sigma} = 0, \quad i = \overline{1, n_X} \\ &\sum_{k=1}^{n_X} r'_{ik} X_k + \sum_{k=n_X+1}^{n_0} r_{ik} Z_k + R_{i\Sigma} = 0, \quad i = \overline{n_X + 1, n_0} \end{aligned}\right\} \text{– канонические уравнения смешанного метода (КУСМ)}$$

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Система канонических уравнений смешанного метода:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left.
\begin{array}{l}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1n_X}X_{n_X} + \delta'_{1,n_X+1}Z_{n_X+1} + \delta'_{1,n_X+2}Z_{n_X+2} + \ldots + \delta'_{1n_0}Z_{n_0} + \Delta_{1\Sigma} = 0, \\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2n_X}X_{n_X} + \delta'_{2,n_X+1}Z_{n_X+1} + \delta'_{2,n_X+2}Z_{n_X+2} + \ldots + \delta'_{2n_0}Z_{n_0} + \Delta_{2\Sigma} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_{n_X1}X_1 + \delta_{n_X2}X_2 + \ldots + \delta_{n_Xn_X}X_{n_X} + \delta'_{n_X,n_X+1}Z_{n_X+1} + \delta'_{n_X,n_X+1}Z_{n_X+2} + \ldots + \delta'_{n_Xn_0}Z_{n_0} + \Delta_{n_X\Sigma} = 0,
\end{array}
\right\} \text{1-я группа уравнений} \\
\left.
\begin{array}{l}
r'_{n_X+1,1}X_1 + r'_{n_X+1,2}X_2 + \ldots + r'_{n_X+1,n_X}X_{n_X} + r_{n_X+1,n_X+1}Z_{n_X+1} + r_{n_X+1,n_X+2}Z_{n_X+2} + \ldots + r_{n_X+1,n_0}Z_{n_0} + R_{n_X+1,\Sigma} = 0, \\
r'_{n_X+2,1}X_1 + r'_{n_X+2,2}X_2 + \ldots + r'_{n_X+2,n_X}X_{n_X} + r_{n_X+2,n_X+1}Z_{n_X+1} + r_{n_X+2,n_X+2}Z_{n_X+2} + \ldots + r_{n_X+2,n_0}Z_{n_0} + R_{n_X+2,\Sigma} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
r'_{n_01}X_1 + r'_{n_02}X_2 + \ldots + r'_{n_0n_X}X_{n_X} + r_{n_0,n_X+1}Z_{n_X+1} + r_{n_0,n_X+2}Z_{n_X+2} + \ldots + r_{n_0n_0}Z_{n_0} + R_{n_0\Sigma} = 0.
\end{array}
\right\} \text{2-я группа уравнений}
\end{array}
\right.
$$

В матричной форме:

$$
\begin{array}{c c}
\begin{array}{c} n_X \\ \\ \\ \\ n_Z \end{array} &
\left[
\begin{array}{cccc|cccc}
\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n_X} & \delta'_{1,n_X+1} & \delta'_{1,n_X+2} & \cdots & \delta'_{1n_0} \\
\delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n_X} & \delta'_{2,n_X+1} & \delta'_{2,n_X+2} & \cdots & \delta'_{2n_0} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\delta_{n_X1} & \delta_{n_X2} & \cdots & \delta_{n_Xn_X} & \delta'_{n_X,n_X+1} & \delta'_{n_X,n_X+1} & \cdots & \delta'_{n_Xn_0} \\
\hline
r'_{n_X+1,1} & r'_{n_X+1,2} & \cdots & r'_{n_X+1,n_X} & r_{n_X+1,n_X+1} & r_{n_X+1,n_X+2} & \cdots & r_{n_X+1,n_0} \\
r'_{n_X+2,1} & r'_{n_X+2,2} & \cdots & r'_{n_X+2,n_X} & r_{n_X+2,n_X+1} & r_{n_X+2,n_X+2} & \cdots & r_{n_X+2,n_0} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
r'_{n_01} & r'_{n_02} & \cdots & r'_{n_0n_X} & r_{n_0,n_X+1} & r_{n_0,n_X+2} & \cdots & r_{n_0n_0}
\end{array}
\right]
\cdot
\left[
\begin{array}{c}
X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n_X} \\ \hline Z_{n_X+1} \\ Z_{n_X+2} \\ \vdots \\ Z_{n_0}
\end{array}
\right]
+
\left[
\begin{array}{c}
\Delta_{1\Sigma} \\ \Delta_{2\Sigma} \\ \vdots \\ \Delta_{n_X\Sigma} \\ \hline R_{n_X+1,\Sigma} \\ R_{n_X+2,\Sigma} \\ \vdots \\ R_{n_0\Sigma}
\end{array}
\right]
= 0 \\
& \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n_X} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n_Z}
\end{array}
$$

$$
\overbrace{\left[\begin{array}{cc} \delta_{XX} & \delta'_{XZ} \end{array}\right]}^{A_{XZ}}
\overbrace{\left[X \right]}^{Y}
\overbrace{\left[\Delta_\Sigma \right]}^{B_\Sigma} = 0
$$

$$\boxed{A_{XZ} * Y + B_\Sigma = 0}$$

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Перемещения в ОССМ по направлениям силовых основных неизвестных X

– от единичных сил $X = 1$

$$\underset{(n_X \cdot n_X)}{\delta_{XX}} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n_X} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n_X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n_X 1} & \delta_{n_X 2} & \cdots & \delta_{n_X n_X} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{ii} > 0 \qquad \delta_{ik} = \delta_{ki}$$

Вычисление δ_{ik} – методом Максвелла – Мора

– от единичных перемещений $Z = 1$

$$\underset{(n_X \cdot n_Z)}{\delta'_{XZ}} = \begin{bmatrix} \delta'_{1,n_X+1} & \delta'_{1,n_X+2} & \cdots & \delta'_{1,n_0} \\ \delta'_{2,n_X+1} & \delta'_{2,n_X+2} & \cdots & \delta'_{2,n_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta'_{n_X,n_X+1} & \delta'_{n_X,n_X+2} & \cdots & \delta'_{n_X,n_0} \end{bmatrix}$$

$$\delta'_{ik} = -r'_{ki} \qquad \delta'_{XZ} = -(r'_{ZX})^{\mathrm{т}}$$

Вычисление δ'_{ik} – только через $-r'_{ki}$

Реакции введенных связей в расчётных узлах ОССМ

– от единичных сил $X = 1$

$$\underset{(n_Z \cdot n_X)}{r'_{ZX}} = \begin{bmatrix} r'_{n_X+1,1} & r'_{n_X+1,2} & \cdots & r'_{n_X+1,n_X} \\ r'_{n_X+2,1} & r'_{n_X+2,2} & \cdots & r'_{n_X+2,n_X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r'_{n_0,1} & r'_{n_0,2} & \cdots & r'_{n_0,n_X} \end{bmatrix}$$

$$r'_{ik} = -\delta'_{ki} \qquad r'_{ZX} = -(\delta'_{XZ})^{\mathrm{т}}$$

Вычисление r'_{ik} – статическим или кинематическим способами

– от единичных перемещений $Z = 1$

$$\underset{(n_Z \cdot n_Z)}{r_{ZZ}} = \begin{bmatrix} r_{n_X+1,n_X+1} & r_{n_X+1,n_X+2} & \cdots & r_{n_X+1,n_0} \\ r_{n_X+2,n_X+1} & r_{n_X+2,n_X+2} & \cdots & r_{n_X+2,n_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n_0,n_X+1} & r_{n_0,n_X+2} & \cdots & r_{n_0 n_0} \end{bmatrix}$$

$$r_{ii} > 0 \qquad r_{ik} = r_{ki}$$

Вычисление r_{ik} – статическим или кинематическим способами

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} \\ n_X \\ \\ \end{array}\right\{ \\ \left.\begin{array}{c} \\ n_Z \\ \\ \end{array}\right\{ \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|cccc} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n_X} & \delta'_{1,n_X+1} & \delta'_{1,n_X+2} & \cdots & \delta'_{1n_0} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n_X} & \delta'_{2,n_X+1} & \delta'_{2,n_X+2} & \cdots & \delta'_{2n_0} \\ \delta_{n_X 1} & \delta_{n_X 2} & \cdots & \delta_{n_X n_X} & \delta'_{n_X,n_X+1} & \delta'_{n_X,n_X+1} & \cdots & \delta'_{n_X n_0} \\ \hline r'_{n_X+1,1} & r'_{n_X+1,2} & \cdots & r'_{n_X+1,n_X} & r_{n_X+1,n_X+1} & r_{n_X+1,n_X+2} & \cdots & r_{n_X+1,n_0} \\ r'_{n_X+2,1} & r'_{n_X+2,2} & \cdots & r'_{n_X+2,n_X} & r_{n_X+2,n_X+1} & r_{n_X+2,n_X+2} & \cdots & r_{n_X+2,n_0} \\ r'_{n_0 1} & r'_{n_0 2} & \cdots & r'_{n_0 n_X} & r_{n_0,n_X+1} & r_{n_0,n_X+2} & \cdots & r_{n_0 n_0} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n_X} \\ \hline Z_{n_X+1} \\ Z_{n_X+2} \\ \vdots \\ Z_{n_0} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \Delta_{1\Sigma} \\ \Delta_{2\Sigma} \\ \vdots \\ \Delta_{n_X\Sigma} \\ \hline R_{n_X+1,\Sigma} \\ R_{n_X+2,\Sigma} \\ \vdots \\ R_{n_0\Sigma} \end{array}\right] = 0$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n_X} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{n_Z}$$

$$A_{XZ} {}^{*} Y + B_{\Sigma} = 0$$

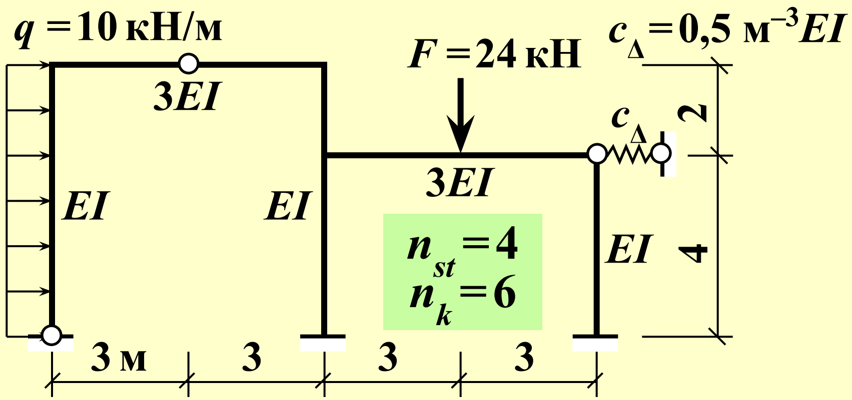
$$\begin{bmatrix} \delta_{XX} & \delta'_{XZ} \\ r'_{ZX} & r_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{\Sigma} \\ R_{\Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

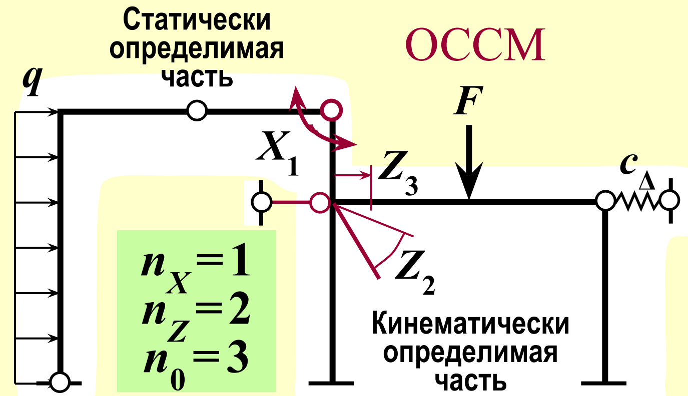
$$Y = -A_{XZ}^{-1} B_{\Sigma}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n_X} S_k X_k + \sum_{k=n_X+1}^{n_0} S_k Z_k + S_{\Sigma}$$

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Пример

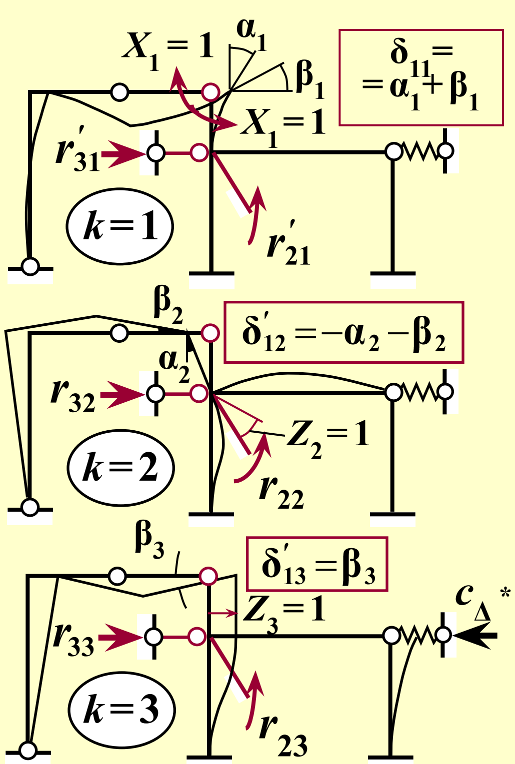


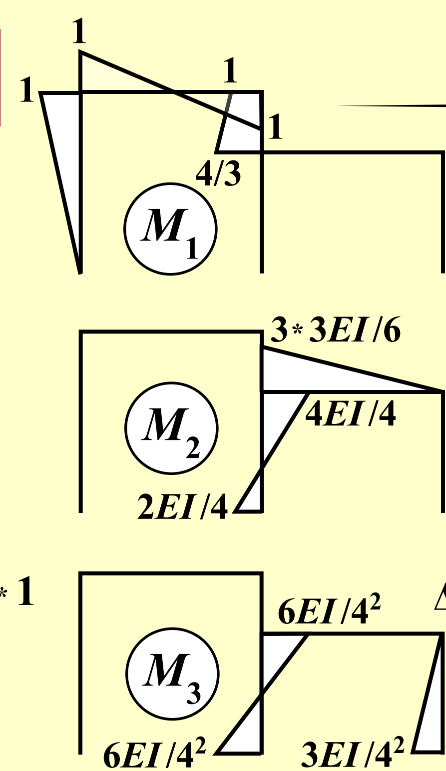


Канонические уравнения смешанного метода:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ R_2 = 0, \\ R_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta'_{12}Z_2 + \delta'_{13}Z_3 + \Delta_{1F} = 0, \\ r'_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r'_{31}X_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

Единичные состояния ОССМ





$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^{3} \int_{l_j} \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{109}{27EI}$$

$$\delta'_{12} = -r'_{21} = -4/3$$

$$\delta'_{13} = -r'_{31} = 1/6$$

$$r_{22} = 5EI/2$$

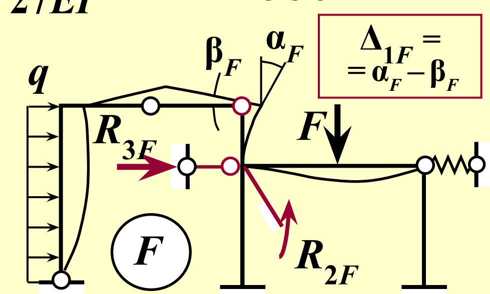
$$r_{23} = r_{32} = 3EI/8$$

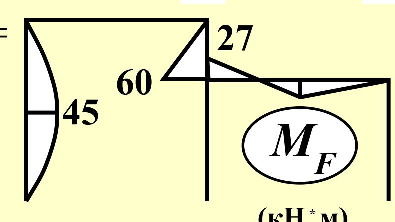
$$r_{33} = 47EI/64$$

$$\Delta_{1F} = \sum_{j=1}^{3} \int_{l_j} \frac{M_1 M_F}{EI} ds = -\frac{50}{3EI}$$

$$R_{2F} = 87; \quad R_{3F} = -30$$

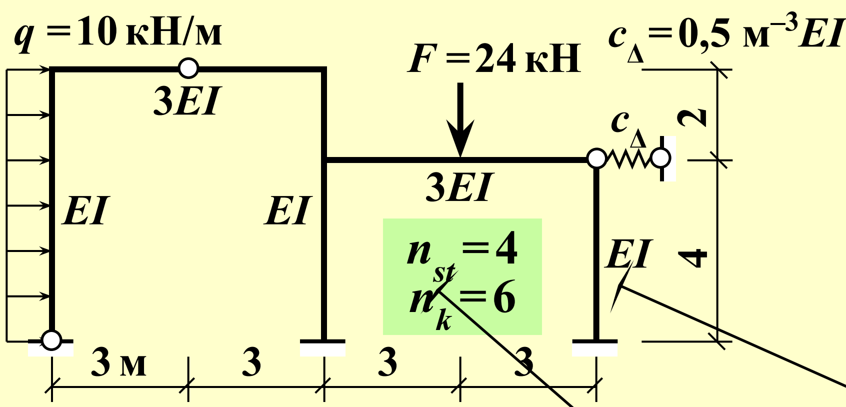
Грузовое состояние ОССМ

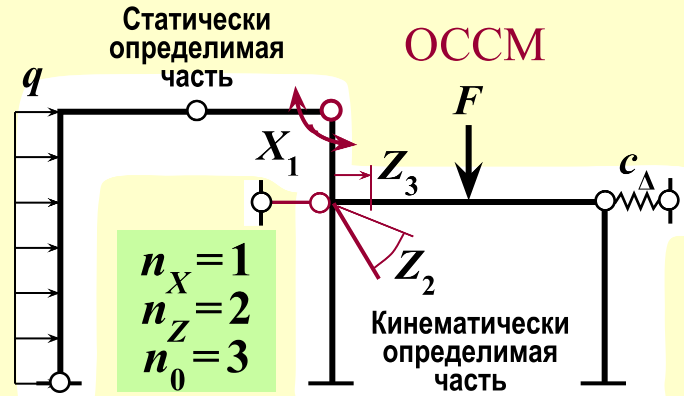




РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

Пример

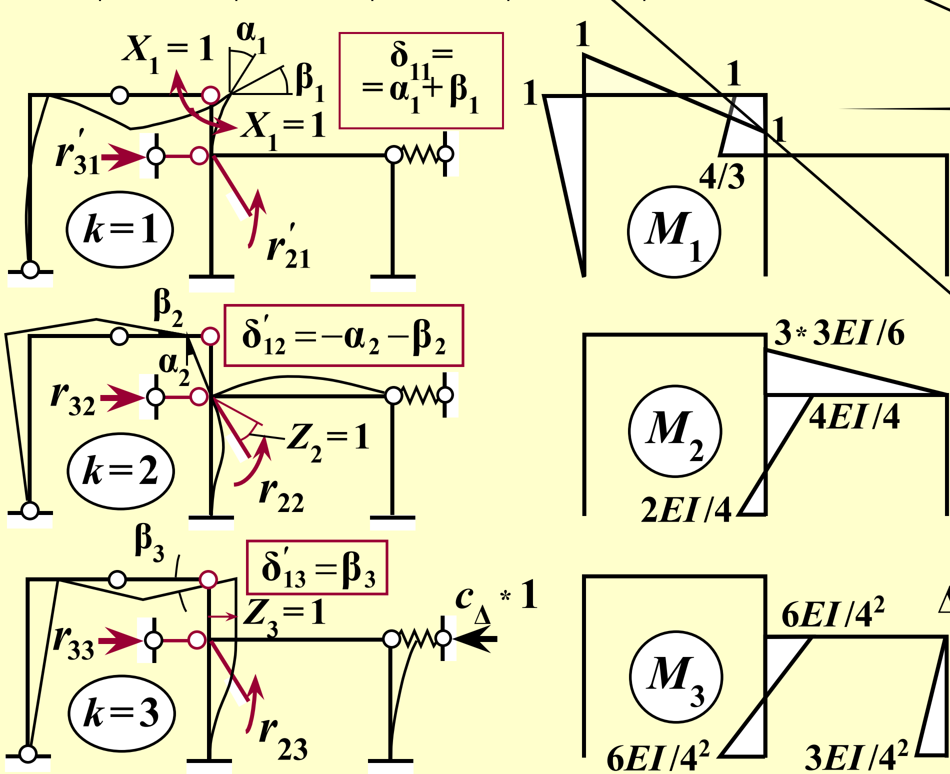




Канонические уравнения смешанного метода:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ R_2 = 0, \\ R_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta'_{12} Z_2 + \delta'_{13} Z_3 + \Delta_{1F} = 0, \\ r'_{21} X_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r'_{31} X_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

Единичные состояния ОССМ



$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^{3} \int_{l_j} \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{109}{27EI}$$

$$\delta'_{12} = -r'_{21} = -4/3$$

$$\delta'_{13} = -r'_{31} = 1/6$$

$$r_{22} = 5EI/2$$

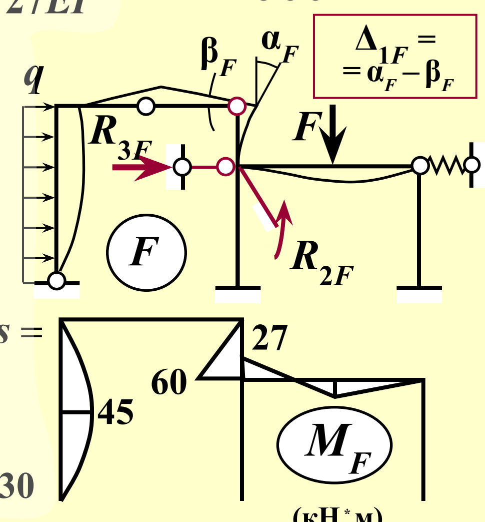
$$r_{23} = r_{32} = 3EI/8$$

$$r_{33} = 47EI/64$$

$$\Delta_{1F} = \sum_{j=1}^{3} \int_{l_j} \frac{M_1 M_F}{EI} ds = -\frac{50}{3EI}$$

$$R_{2F} = 87; \quad R_{3F} = -30$$

Грузовое состояние ОССМ



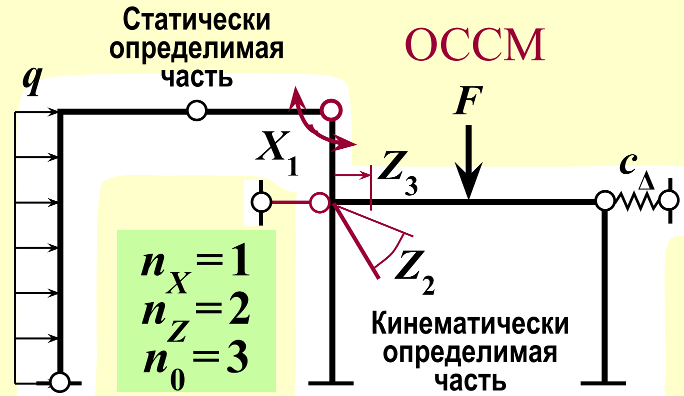
РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

П р и м е р

$$\begin{cases} \dfrac{109/27}{EI}X_1 - \dfrac{4}{3}Z_2 + \dfrac{1}{6}Z_3 - \dfrac{50/3}{EI} = 0, \\ \dfrac{4}{3}X_1 + \dfrac{5}{2}EI\,Z_2 + \dfrac{3}{8}EI\,Z_3 + 87 = 0, \\ -\dfrac{1}{6}X_1 + \dfrac{3}{8}EI\,Z_2 + \dfrac{47}{64}EI\,Z_3 - 30 = 0. \end{cases}$$

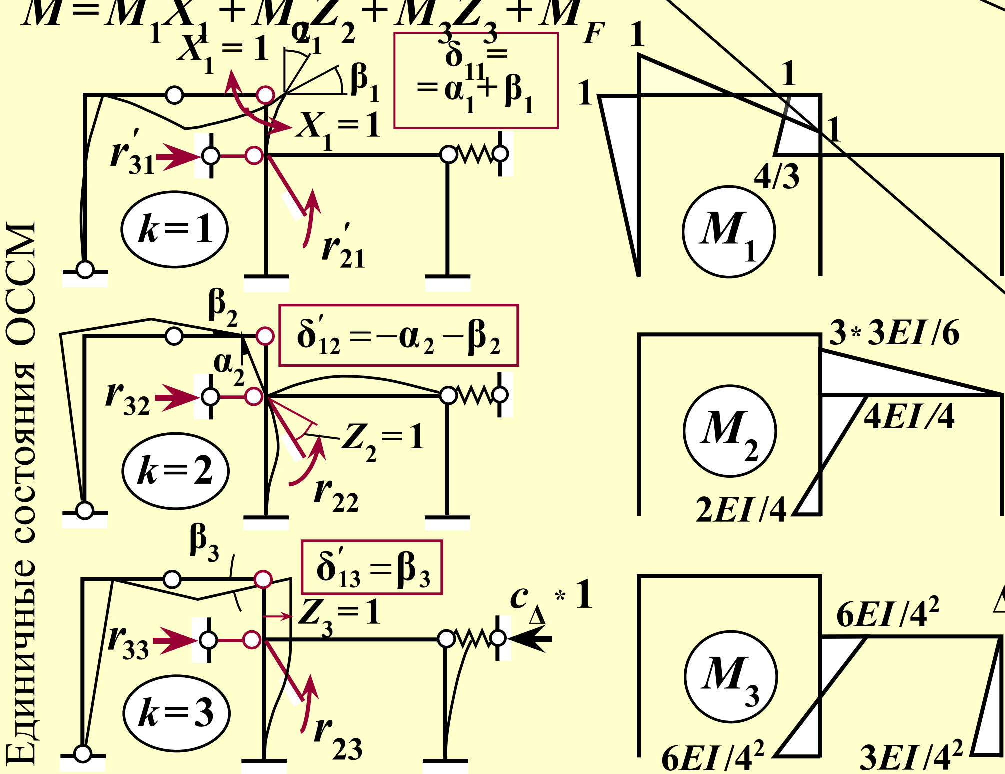
$X_1 = -13{,}723$ кН*м; $Z_2 = -36{,}902/EI$; $Z_3 = 62{,}809/EI$

$$M = M_1X_1 + M_2Z_2 + M_3Z_3 + M_F$$



Канонические уравнения смешанного метода:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta'_{12}Z_2 + \delta'_{13}Z_3 + \Delta_{1F} = 0, \\ r'_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r'_{31}X_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$



$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^{3}\int_{l_j}\frac{M_1^2}{EI}ds = \frac{109}{27EI}$$

$$\delta'_{12} = -r'_{21} = -4/3$$

$$\delta'_{13} = -r'_{31} = 1/6$$

$$r_{22} = 5EI/2$$

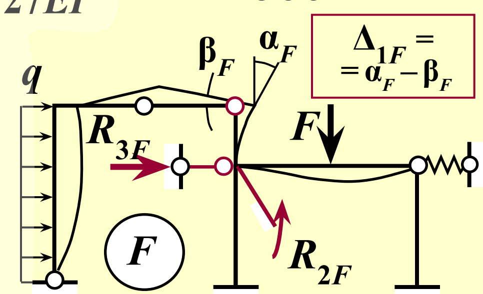
$$r_{23} = r_{32} = 3EI/8$$

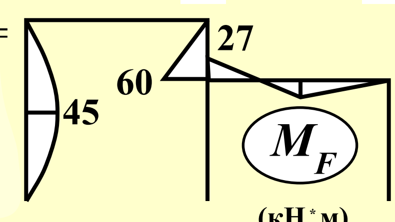
$$r_{33} = 47EI/64$$

$$\Delta_{1F} = \sum_{j=1}^{3}\int_{l_j}\frac{M_1M_F}{EI}ds = -\frac{50}{3EI}$$

$R_{2F} = 87$; $R_{3F} = -30$

Грузовое состояние ОССМ





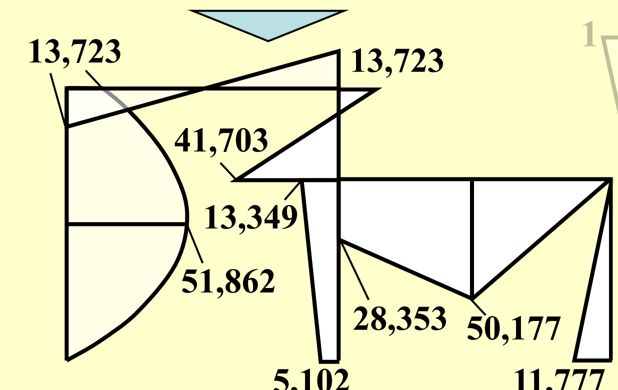
РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

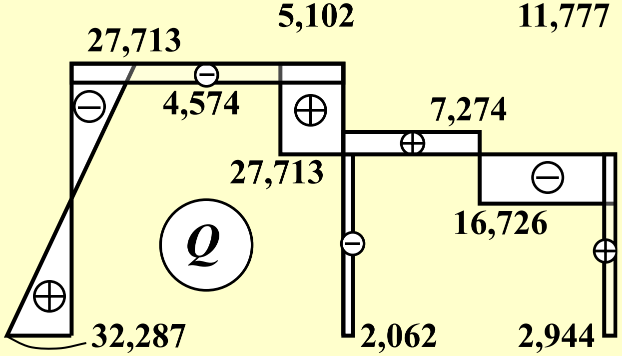
Пример

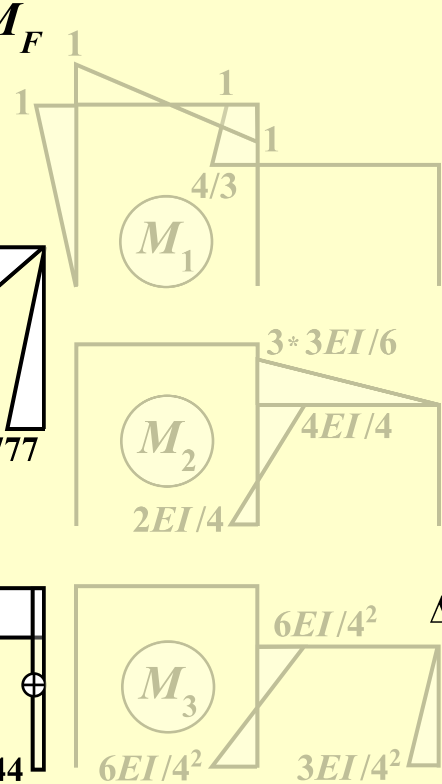
$$\begin{cases} \dfrac{109/27}{EI}X_1 - \dfrac{4}{3}Z_2 + \dfrac{1}{6}Z_3 - \dfrac{50/3}{EI} = 0, \\ \dfrac{4}{3}X_1 + \dfrac{5}{2}EI\,Z_2 + \dfrac{3}{8}EI\,Z_3 + 87 = 0, \\ -\dfrac{1}{6}X_1 + \dfrac{3}{8}EI\,Z_2 + \dfrac{47}{64}EI\,Z_3 - 30 = 0. \end{cases}$$

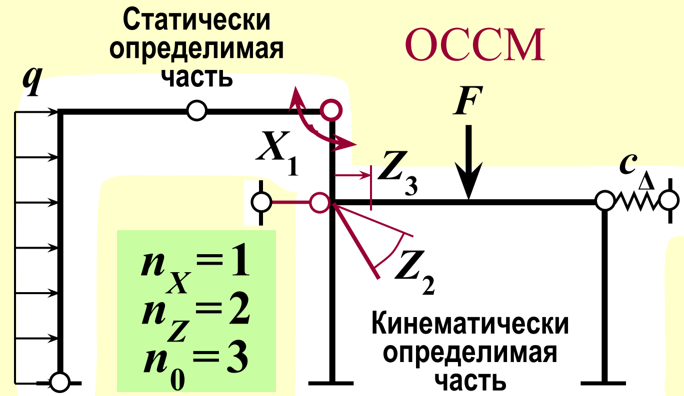
$X_1 = -13{,}723$ кН*м; $Z_2 = -36{,}902/EI$; $Z_3 = 62{,}809/EI$

$$M = M_1X_1 + M_2Z_2 + M_3Z_3 + M_F$$









Канонические уравнения смешанного метода:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta'_{12}Z_2 + \delta'_{13}Z_3 + \Delta_{1F} = 0, \\ r'_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r'_{31}X_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^{3}\int_{l_j}\frac{M_1^2}{EI}ds = \frac{109}{27EI}$$

$$\delta'_{12} = -r'_{21} = -4/3$$

$$\delta'_{13} = -r'_{31} = 1/6$$

$$r_{22} = 5EI/2$$

$$r_{23} = r_{32} = 3EI/8$$

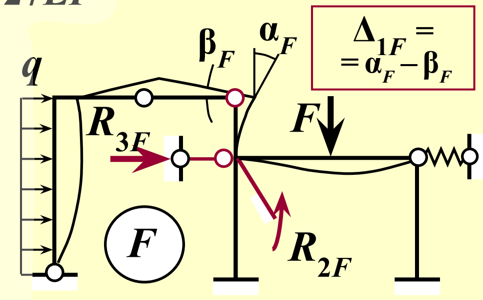
$$r_{33} = 47EI/64$$

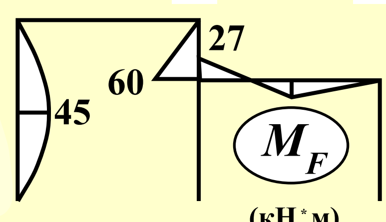
$$\Delta_{1F} = \sum_{j=1}^{3}\int_{l_j}\frac{M_1M_F}{EI}ds = -\frac{50}{3EI}$$

$R_{2F} = 87$; $R_{3F} = -30$

Грузовое состояние ОССМ

$\Delta_{1F} = \alpha_F - \beta_F$





СМЕШАННЫЙ МЕТОД, МЕТОД СИЛ И МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} n_X \\ \\ n_Z \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n_X} & \delta'_{1,n_X+1} & \delta'_{1,n_X+2} & \cdots & \delta'_{1n_0} \\
\delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n_X} & \delta'_{2,n_X+1} & \delta'_{2,n_X+2} & \cdots & \delta'_{2n_0} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\delta_{n_X1} & \delta_{n_X2} & \cdots & \delta_{n_Xn_X} & \delta'_{n_X,n_X+1} & \delta'_{n_X,n_X+1} & \cdots & \delta'_{n_Xn_0} \\
\hline
r'_{n_X+1,1} & r'_{n_X+1,2} & \cdots & r'_{n_X+1,n_X} & r_{n_X+1,n_X+1} & r_{n_X+1,n_X+2} & \cdots & r_{n_X+1,n_0} \\
r'_{n_X+2,1} & r'_{n_X+2,2} & \cdots & r'_{n_X+2,n_X} & r_{n_X+2,n_X+1} & r_{n_X+2,n_X+2} & \cdots & r_{n_X+2,n_0} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
r'_{n_01} & r'_{n_02} & \cdots & r'_{n_0n_X} & r_{n_0,n_X+1} & r_{n_0,n_X+2} & \cdots & r_{n_0n_0}
\end{array}\right]
\cdot
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n_X} \\ Z_{n_X+1} \\ Z_{n_X+2} \\ \vdots \\ Z_{n_0} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \Delta_{1\Sigma} \\ \Delta_{2\Sigma} \\ \vdots \\ \Delta_{n_X\Sigma} \\ R_{n_X+1,\Sigma} \\ R_{n_X+2,\Sigma} \\ \vdots \\ R_{n_0\Sigma} \end{bmatrix}
= 0 \\
\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n_X} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n_Z}
\end{array}
$$

КУСМ

$$\begin{bmatrix} \delta_{XX} & \delta'_{XZ} \\ r'_{ZX} & r_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_\Sigma \\ R_\Sigma \end{bmatrix} = 0$$

$$A_{XZ} * Y + B_\Sigma = 0$$

$$n_Z = 0 \;\rightarrow\; n_0 = n_X = n$$

МЕТОД СИЛ

$$n_X = 0 \;\rightarrow\; n_0 = n_Z = n$$

МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

КУМС

$$\begin{bmatrix} \delta_{12} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1\Sigma} \\ \Delta_{2\Sigma} \\ \vdots \\ \Delta_{n\Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

КУМП

$$\begin{bmatrix} r_{12} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1\Sigma} \\ R_{2\Sigma} \\ \vdots \\ R_{n\Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

СМЕШАННЫЙ МЕТОД, МЕТОД СИЛ И МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

$$\begin{array}{c} n_X \\ \\ \\ n_Z \end{array}
\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n_X} & \delta'_{1,n_X+1} & \delta'_{1,n_X+2} & \cdots & \delta'_{1n_0} \\
\delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n_X} & \delta'_{2,n_X+1} & \delta'_{2,n_X+2} & \cdots & \delta'_{2n_0} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\delta_{n_X1} & \delta_{n_X2} & \cdots & \delta_{n_Xn_X} & \delta'_{n_X,n_X+1} & \delta'_{n_X,n_X+1} & \cdots & \delta'_{n_Xn_0} \\
\hline
r'_{n_X+1,1} & r'_{n_X+1,2} & \cdots & r'_{n_X+1,n_X} & r_{n_X+1,n_X+1} & r_{n_X+1,n_X+2} & \cdots & r_{n_X+1,n_0} \\
r'_{n_X+2,1} & r'_{n_X+2,2} & \cdots & r'_{n_X+2,n_X} & r_{n_X+2,n_X+1} & r_{n_X+2,n_X+2} & \cdots & r_{n_X+2,n_0} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
r'_{n_01} & r'_{n_02} & \cdots & r'_{n_0n_X} & r_{n_0,n_X+1} & r_{n_0,n_X+2} & \cdots & r_{n_0n_0}
\end{array}\right]}_{n_X \;\; | \;\; n_Z}
\cdot
\left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n_X} \\ \hline Z_{n_X+1} \\ Z_{n_X+2} \\ \vdots \\ Z_{n_0} \end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c} \Delta_{1\Sigma} \\ \Delta_{2\Sigma} \\ \vdots \\ \Delta_{n_X\Sigma} \\ \hline R_{n_X+1,\Sigma} \\ R_{n_X+2,\Sigma} \\ \vdots \\ R_{n_0\Sigma} \end{array}\right] = 0$$

КУСМ

$$\begin{bmatrix} \delta_{XX} & \delta'_{XZ} \\ r'_{ZX} & r_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_\Sigma \\ R_\Sigma \end{bmatrix} = 0$$

$$A_{XZ} * Y + B_\Sigma = 0$$

$$n_Z = 0 \;\rightarrow\; n_0 = n_X = n$$

МЕТОД СИЛ

$$n_X = 0 \;\rightarrow\; n_0 = n_Z = n$$

МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

КУМС

$$\delta * X + \Delta_\Sigma = 0$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{12} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1\Sigma} \\ \Delta_{2\Sigma} \\ \vdots \\ \Delta_{n\Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

КУМП

$$r * Z + R_\Sigma = 0$$

$$\begin{bmatrix} r_{12} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1\Sigma} \\ R_{2\Sigma} \\ \vdots \\ R_{n\Sigma} \end{bmatrix} = 0$$

СМЕШАННЫЙ МЕТОД, МЕТОД СИЛ И МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Р е з ю м е:

1. Канонические уравнения любого метода (сил, перемещений или смешанного) являются *разрешающими уравнениями* задачи расчёта заданной деформимой системы, т. е. *синтезом статической, геометрической и физической сторон задачи.*

Метод	Место в канонических уравнениях, где реализованы стороны задачи (непосредственно или опосредованно)		
	статическая	геометрическая	физическая
сил	В использовании условий равновесия для определения силовых факторов в ОСМС от единичных основных неизвестных и от заданных нагрузок	В изначальном геометрическом (кинематическом) смысле условий эквивалентности ОСМС и РСНС	В применении закона Гука для определения методом Максвелла–Мора перемещений δ_{ik} и Δ_{iF} и закона линейного температурного расширения для Δ_{it}
перемещений	В изначальном статическом смысле условий эквивалентности ОСМП и РДС	В обеспечении совместности перемещений (деформаций) ОСМП в единичных состояниях и от заданных воздействий, а также в выполнении кинематических граничных условий	В стандартных задачах для типовых элементов ОСМП (решения на основе закона Гука и закона линейного температурного расширения)
смешанный	а) в изначальном статическом смысле условий эквивалентности ОССМ и РСНС (1-я группа КУСМ); б) в использовании условий равновесия для определения силовых факторов в статически определимых частях ОССМ от единичных основных неизвестных и от заданных нагрузок	а) в изначальном геометрическом (кинематическом) смысле условий эквивалентности ОССМ и РСНС (2-я группа КУСМ); б) в обеспечении совместности перемещений (деформаций) кинематически определимых частей ОССМ в единичных состояниях и от заданных воздействий, а также в выполнении кинематических граничных условий	а) в статически определимых частях ОССМ – как в методе сил; б) в кинематически определимых частях ОССМ – как в методе перемещений

СМЕШАННЫЙ МЕТОД, МЕТОД СИЛ И МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Р е з ю м е:

2. При выборе метода расчёта деформируемой системы в случае равных (или близких) количеств основных неизвестных МС, МП и СМ предпочтение следует отдавать *методу перемещений* из-за
   а) большей в сравнении с другими методами формализованностью его расчётных процедур вследствие использования стандартных (табличных) данных;
   б) более высокой информативности результатов расчёта: наряду с усилиями в рассчитываемой системе определяются также и перемещения её узлов.

3. При равных количествах основных неизвестных МС и СМ рациональным является *смешанный метод*, в котором часть процедур основана на использовании тех же табличных данных, что и в методе перемещений.

4. Самый универсальный – *метод перемещений*: с его помощью могут рассчитываться *любые* деформируемые системы – как статически неопределимые, так и статически определимые.

Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, в которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках[*]; для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 14»)

1. **Какие величины являются основными неизвестными смешанного метода (СМ)? (2)**
2. **Как формируется основная система смешанного метода (ОССМ) и какими соображениями следует при этом руководствоваться? (2)**
3. **Какими свойствами должна обладать рационально выбранная ОССМ? (2)**
4. **Из каких условий получаются канонические уравнения СМ? (3)**
5. **Какие группы уравнений входят в систему КУСМ? (3)**
6. **Какие различные по смыслу величины являются коэффициентами КУСМ (перечислить) (3)(3) , (4). Какие из них не имеют аналогов в коэффициентах КУМС и КУМП?**
7. **Раскрыть смысл**
   а) системы КУСМ в целом (3);
   б) произвольного (*i*-го) уравнения 1-й и 2-й групп КУМС (3);
   в) свободных членов уравнений $\Delta_{i\Sigma}$, $R_{i\Sigma}$ (3);
   г) слагаемых $\delta_{ik}X_k$, $\delta_{ik}Z_k$, $r_{ik}X_k$, $r_{ik}Z_k$; (5);
   д) коэффициентов δ_{ik}, δ'_{ik}, r'_{ik}, r_{ik} (5).
8. **Свойства и способы определения коэффициентов канонических уравнений СМ (5).**
9. **Какие особенности имеет определение коэффициентов δ_{ik}? (5) Теорема Гвоздева о взаимности единичных перемещений и реакций.**

---

[*] **Только в режиме «Показ слайдов».**

К о н т р о л ь н ы е   в о п р о с ы

(в скобках даны номера слайдов, в которых можно найти ответы на вопросы;
для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках);*
для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши
и выбрать «Перейти к слайду 15»)

10. Почему канонические уравнения смешанного метода являются разрешающими уравнениями задачи расчёта СНС (синтезом статической, геометрической и физической сторон задачи)? (12)

11. Как по найденным основным неизвестным смешанного метода вычисляются искомые усилия в заданной системе? (5)

12. Взаимосвязь смешанного метода, метода сил и метода перемещений (10)**.**

13. Можно ли получить

а) канонические уравнения СМ формальным объединением КУМС и КУМП?

б) КУМС и КУМП из уравнений смешанного метода? (10)

14. Сравнительная оценка возможностей и рациональности применения методов сил, перемещений и смешанного (13)**.**

***) Только в режиме «Показ слайдов».**