

Теория линейных электрических цепей

Под электрической цепью понимают некоторую совокупность электротехнических устройств (элементов), соединенных между собой определенным образом.

В качестве устройств (элементов) могут использоваться источники, преобразователи и потребители электрической энергии

Линейные электрические цепи представляют собой частный случай электрических цепей и характеризуются тем, что вольт-амперные характеристики всех элементов цепи линейны, а состояние самой цепи описывается с помощью линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами.

В линейных электрических цепях между внешним воздействием и реакцией цепи существуют *линейно-пропорциональные соотношения*.

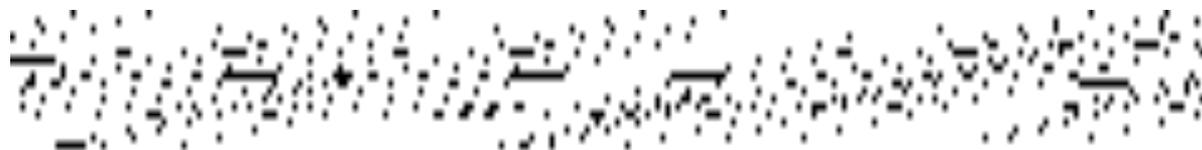
$$\text{[Illegible mathematical expression]} \quad (1.1)$$

$$\text{[Illegible mathematical expression]} \quad (1.2)$$

Принцип суперпозиции



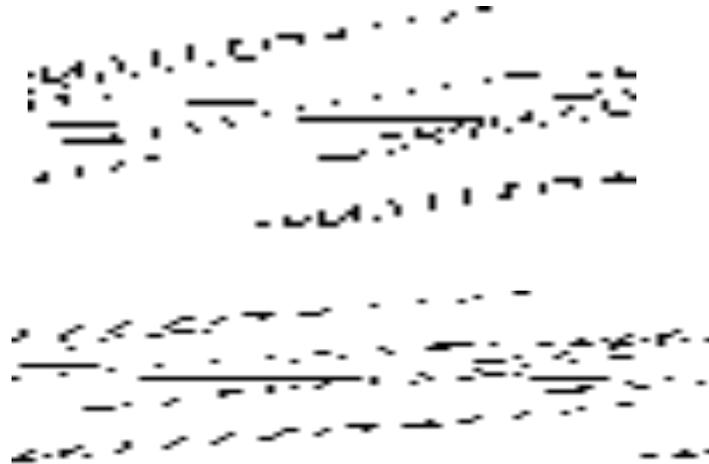
(1.3)



(1.4)

Свойство дуальности

Под дуальностью понимают схожесть по структуре выражений, описывающих зависимость напряжения от тока для одного элемента цепи, и тока от напряжения – для другого. Соответственно сами элементы называются **дуальными**.



Handwritten text in the top left corner, possibly a header or title.

Handwritten text in the top right corner, possibly a header or title.

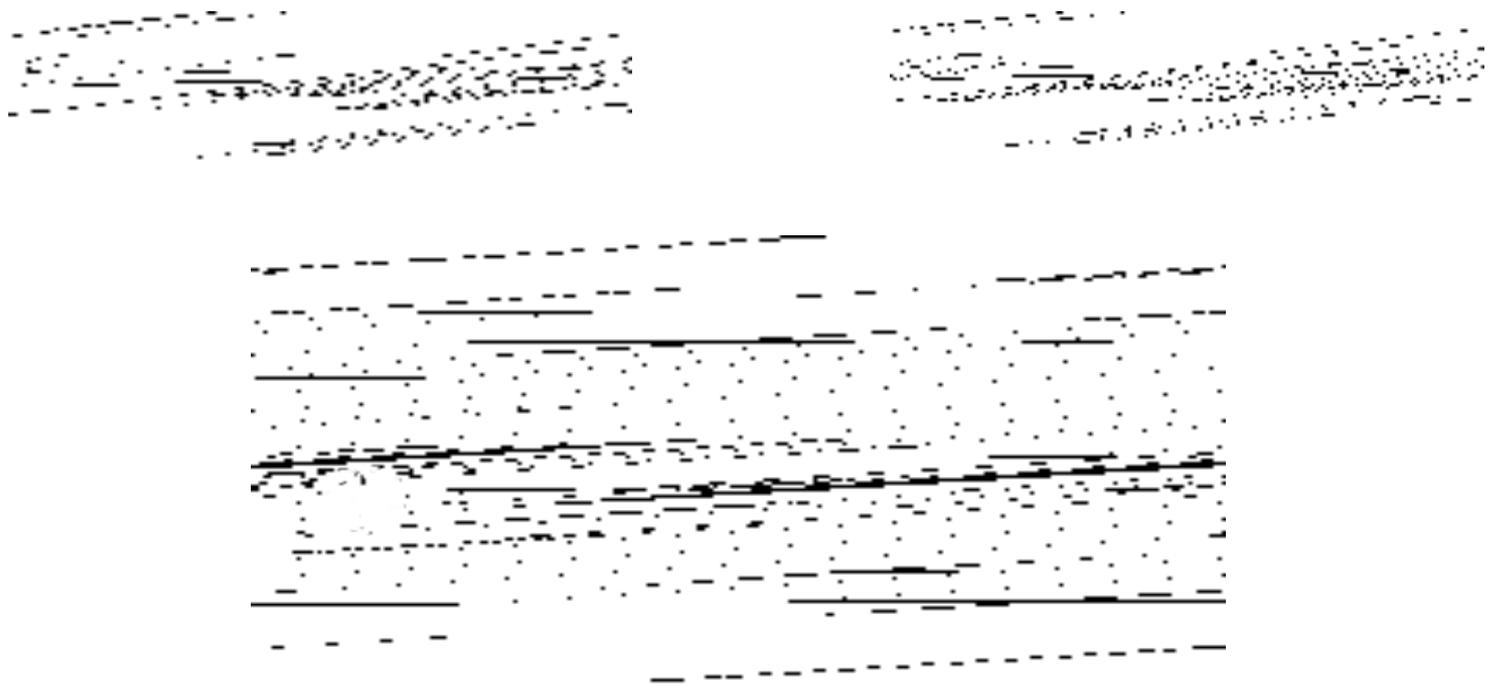
Handwritten text in the middle left section.

Handwritten text in the middle right section.

Handwritten text in the lower left section.

Handwritten text in the lower right section.

Main body of handwritten text, appearing as a dense block of script.

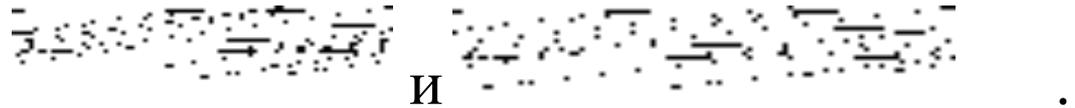


Дуальными являются пары физических величин, понятий и законов электрических цепей, соответствующие друг другу в дуальных соотношениях.

Принцип взаимности (обратимости)

Сформулирован с помощью теоремы взаимности (обратимости): если эдс контура с номером i E_i вызывает в контуре с номером j ток I_j , то *та же самая* эдс, будучи помещена в контур с номером j , вызовет в контуре i ток I_i , равный току I_j .

Можно записать, что


$$E_i I_j = I_i E_j$$

Но поскольку $E_i I_j = I_i E_j$ и $E_i I_j = I_i E_j$, то выполняется соотношение $E_i I_j = I_i E_j$, что означает равенство сопротивлений передачи. Этот принцип лежит в основе понятия пассивного обратимого четырехполюсника

Формально любую электрическую цепь можно представить в виде многополюсника с числом пар внешних зажимов n .

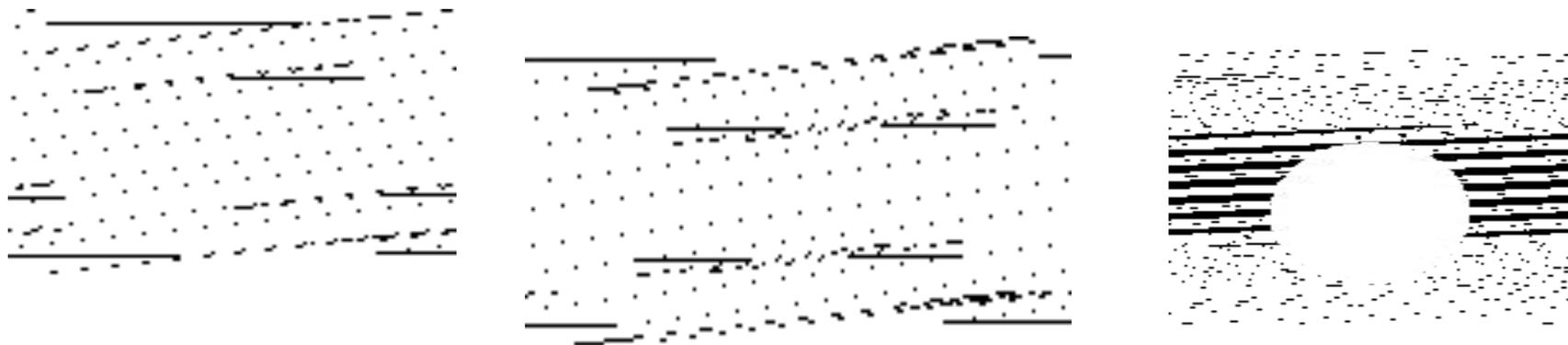
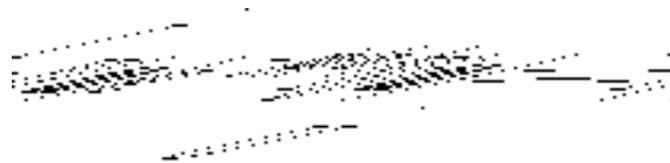
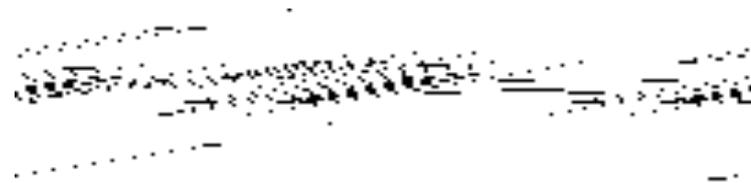
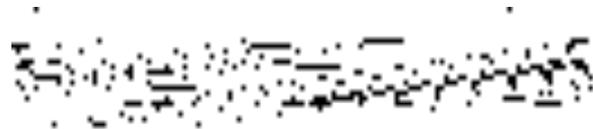


Рис. 1.2. Многополюсные цепи: a – двухполюсник; b – четырехполюсник;
 c – n -полюсник

Входные и передаточные характеристики



Формально под **передаточной** функцией подразумевается комплексный переменный коэффициент, устанавливающий линейную алгебраическую зависимость между выходной величиной (ток или напряжение в цепи) и входной величиной (ток или напряжение, подаваемые к входным зажимам).



Handwritten text at the top of the page, possibly a header or title, with a horizontal line below it.

Handwritten text below the first horizontal line, possibly a subtitle or introductory text.

Handwritten text in the middle of the page, possibly a main body of text or a list.

На практике наиболее информативными с точки зрения анализа передающих свойств исследуемой цепи являются графики частотной зависимости модуля и аргумента передаточной функции, называемые **амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками** (АЧХ и ФЧХ) соответственно.

Если анализ работы цепи производится в большом частотном диапазоне, то описанные частотные характеристики целесообразно изображать не в линейном, а в логарифмическом масштабе, в котором по горизонтальной оси откладывают десятичный логарифм частоты, а по вертикальной – значение . Эта величина оценивается в децибелах.

ДВУХПОЛЮСНИКИ

Двухполюсником можно назвать любую электрическую цепь, взаимодействующую с внешней по отношению к ней схемой посредством двух зажимов. При этом свойства двухполюсников определяют характеристики всей цепи.

Двухполюсник, как и любая линейная электрическая цепь, может быть как активным, так и пассивным. Пассивным он является в том случае, если энергия, отданная им во внешнюю цепь, ни при каких условиях не превышает той, что была подведена к нему за все предшествующее время.

По количеству элементов, составляющих схему двухполюсника, они подразделяются на одноэлементные, двухэлементные (RL -, RC - и LC -двухполюсники), трехэлементные (RLC -двухполюсники) и т. д.

Двухполюсники, схемы которых включают резистивные сопротивления, называются диссипативными. В них происходит потеря подводимой энергии за счет превращения ее в тепловую с дальнейшим рассеянием этой энергии в пространстве.

Двухполюсники, схемы которых состоят только лишь из реактивных элементов (индуктивностей и емкостей), носят название реактивных двухполюсников.

Любой двухполюсник может быть охарактеризован своей входной функцией, которая представляет собой либо входное сопротивление, либо входную проводимость.

Реактивные LC-двухполюсники

К простейшим реактивным двухполюсникам можно отнести катушку индуктивности и конденсатор.

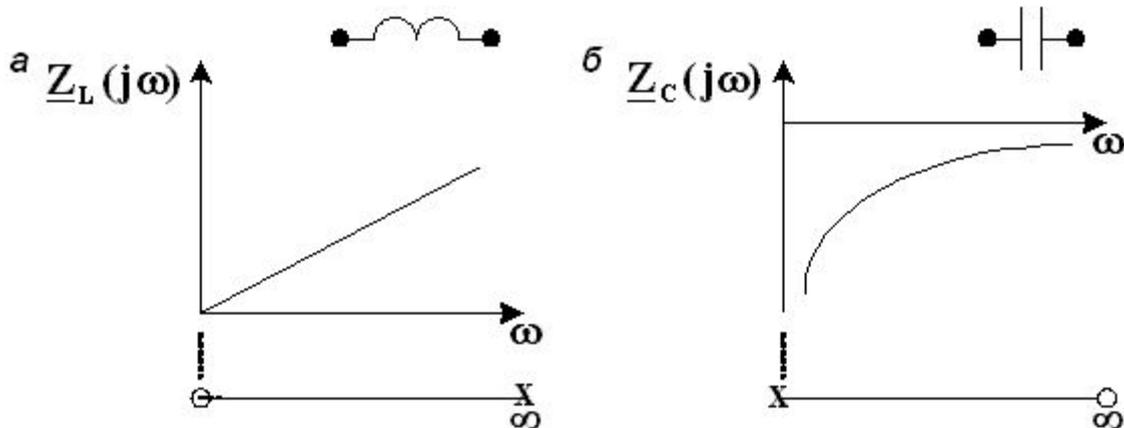
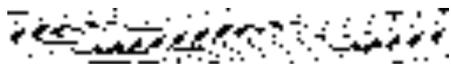
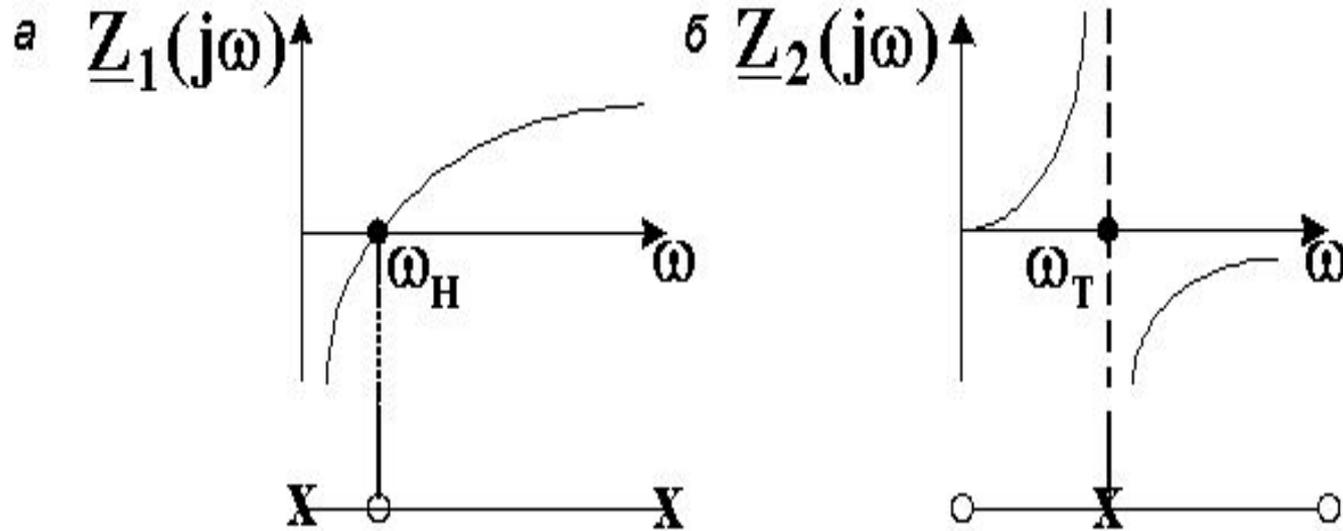


Рис. 2.1. Частотная зависимость входного сопротивления: а – для индуктивного элемента; б – для емкостного элемента

К простейшим LC -двухполюсникам можно отнести также последовательный и параллельный колебательный контур. Зависимости их сопротивлений от частоты представлены на рис. 2.2.

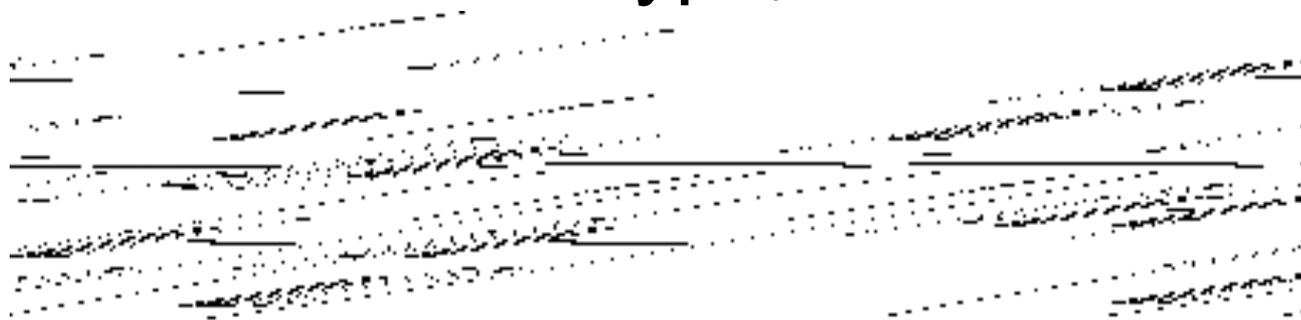


2.2. Частотная зависимость входного сопротивления: а – для последовательного контура; б – для параллельного контура

Здесь



где ω_0 - частота резонанса
напряжений последовательного
колебательного контура;



где ω_0 - частота резонанса
напряжений параллельного контура.

Независимо от степени сложности схемы двухполюсников можно указать ряд закономерностей, характеризующих их общие свойства:

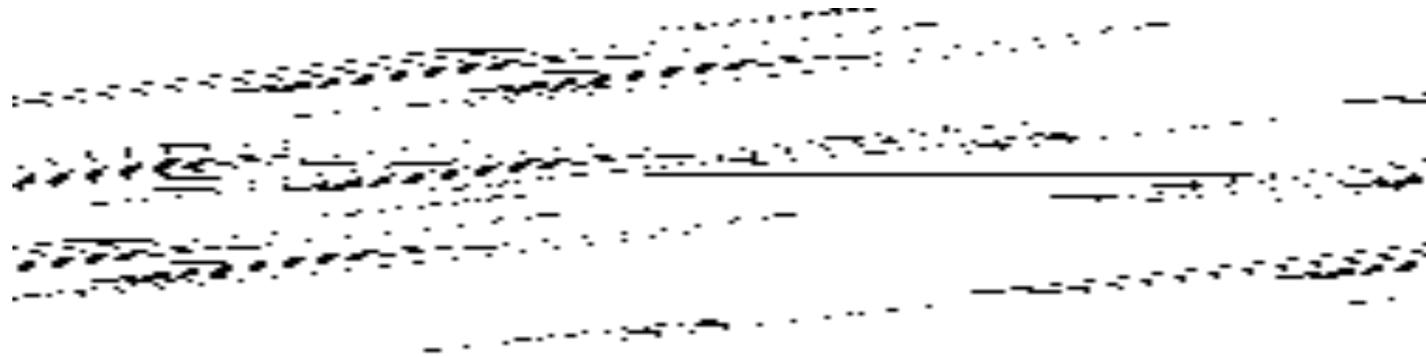
1) число резонансных частот любого реактивного двухполюсника на единицу меньше общего числа реактивных элементов в его схеме;

2) частоты резонансов напряжений и токов реактивного двухполюсника чередуются: между любыми двумя резонансами напряжений имеется один резонанс токов, и между любыми двумя резонансами токов находится резонанс напряжений;

3) при резонансе напряжений характер реактивности двухполюсника меняется с емкостного на индуктивный, а при резонансе токов — с индуктивного на емкостной. У многоэлементных реактивных двухполюсников характер реактивности контура изменяется с ростом частоты не один раз;

4) при возрастании частоты реактивное сопротивление двухполюсника в точках непрерывности возрастает (с учетом знака реактивного сопротивления);

- 5) если в схеме двухполюсника есть путь для прохождения постоянного тока, то первым наступает резонанс токов, а если такого пути нет, первым наступает резонанс напряжений;
- 6) зависимость сопротивления любого реактивного двухполюсника от частоты можно представить формулой Фостера:



где m – число резонансов напряжений; n – число резонансов токов.

Значения резонансных частот определяются следующим образом.

Для конкретной схемы двухполюсника составляется формула зависимости входного сопротивления от частоты в виде одной дроби. Тогда, приравняв числитель полученной дроби к нулю, можно найти частоты резонансов напряжений в схеме двухполюсника. Если же приравнять нулю знаменатель полученной дроби, можно определить частоты резонансов токов.

7) в зависимости от характера реактивности входного сопротивления при частотах вблизи нуля и на бесконечности ($\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$) все двухполюсники подразделяют на 4 класса. Каждому классу соответствует конкретный вид зависимости сопротивления от частоты.

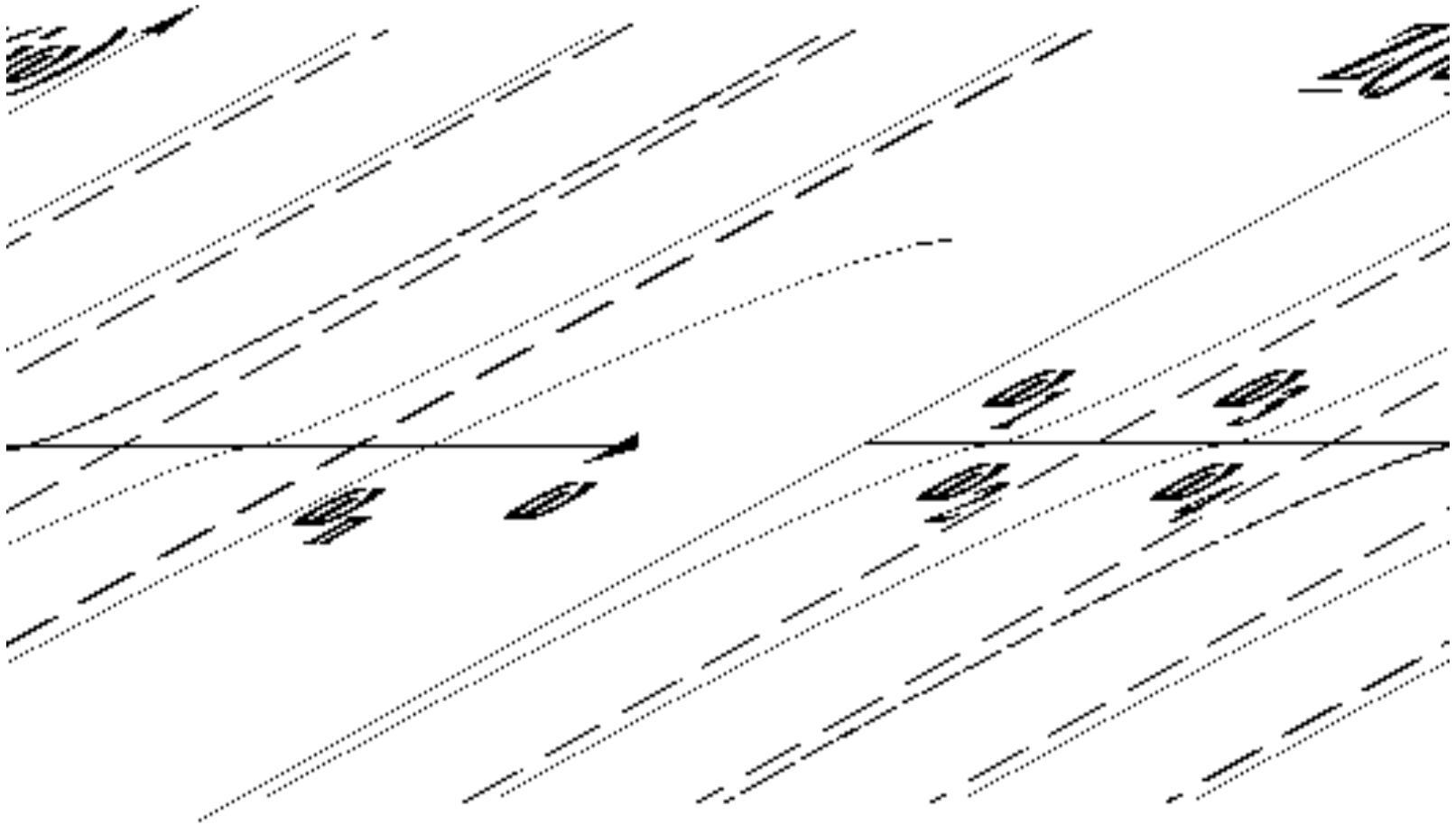


Рис. 2.4. Зависимость входного сопротивления двухполюсника 1-го класса от частоты

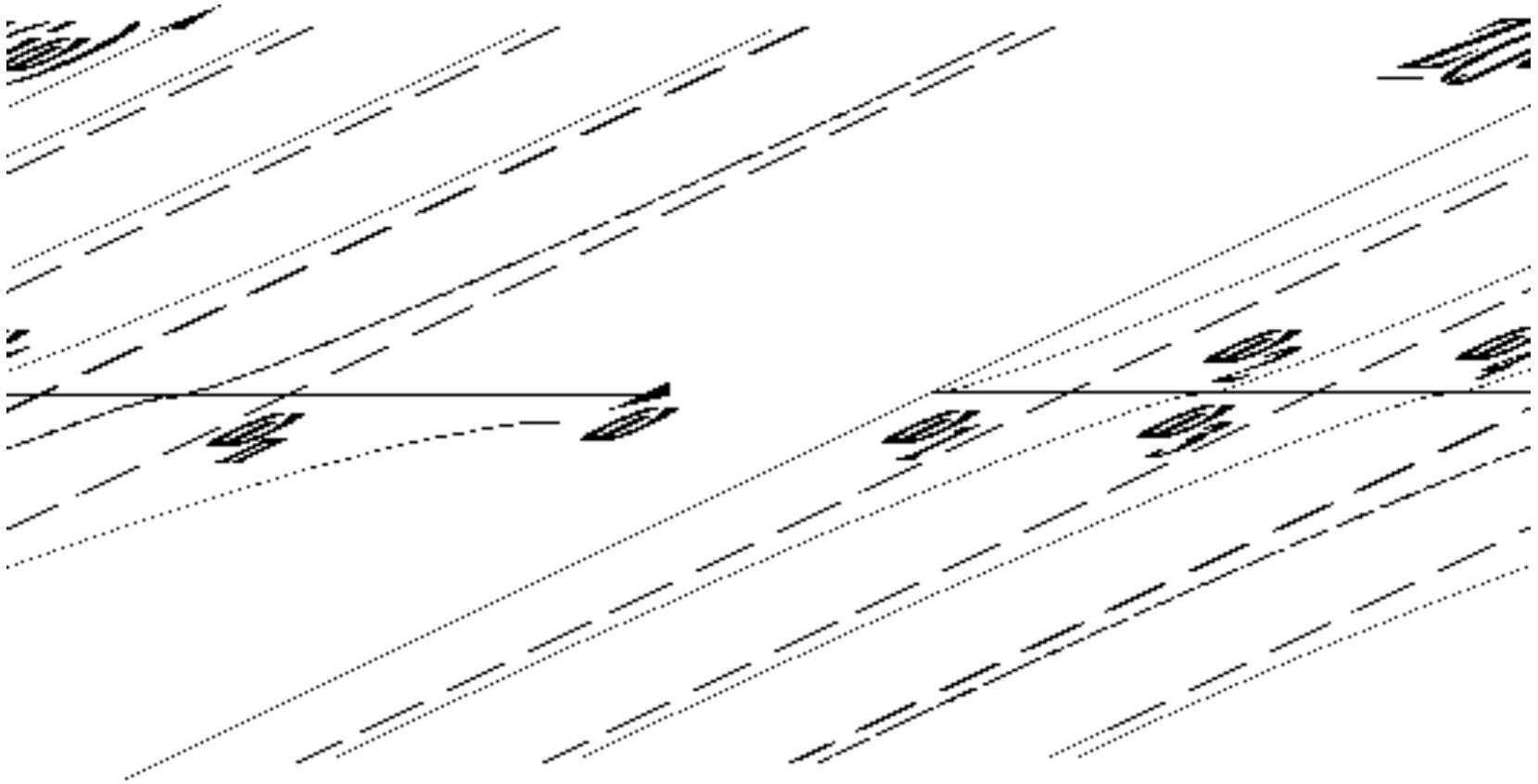


Рис. 2.5. Зависимость входного сопротивления двухполюсника 2-го класса от частоты

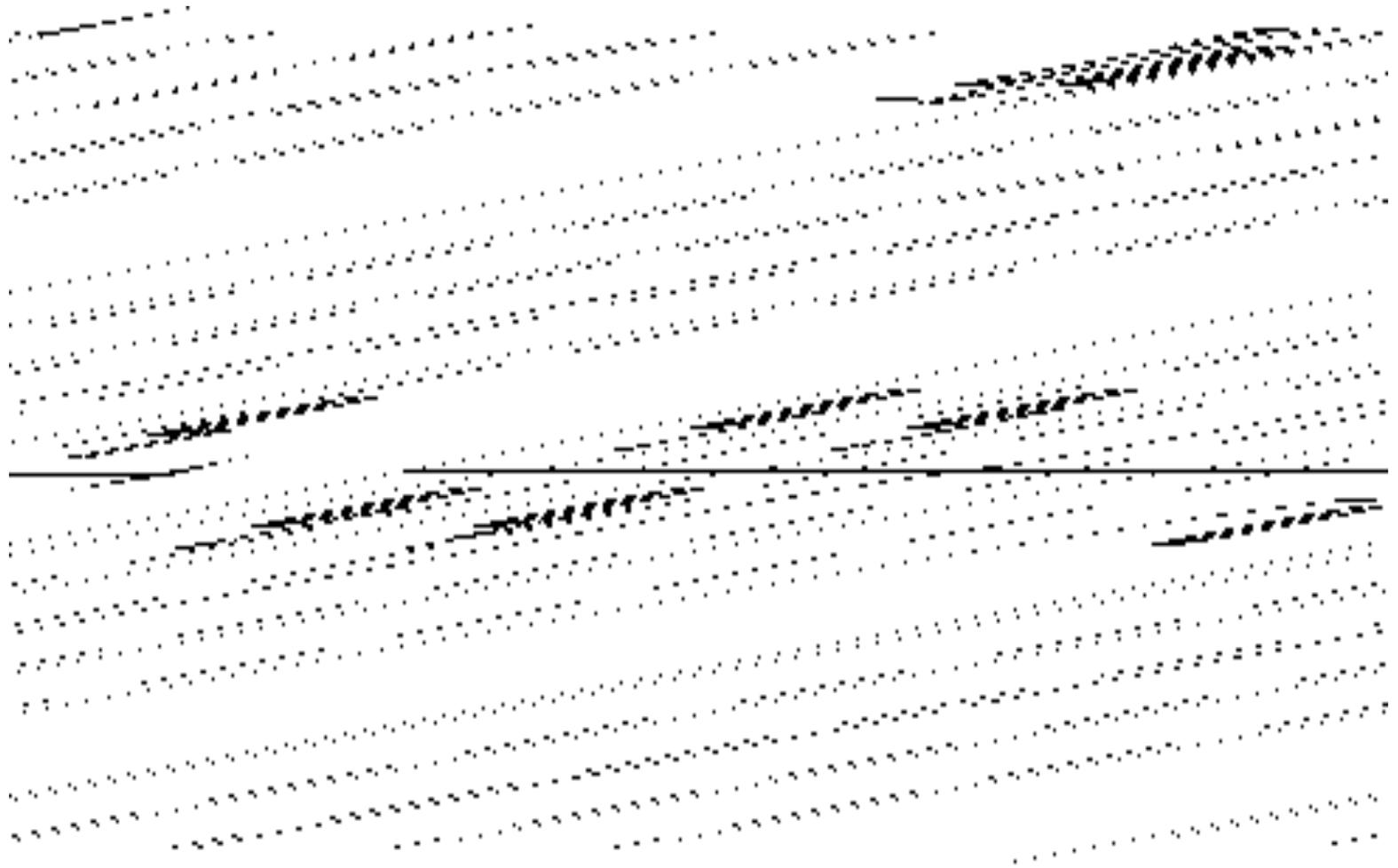


Рис. 2.6. Зависимость входного сопротивления двухполюсника 3-го класса от частоты

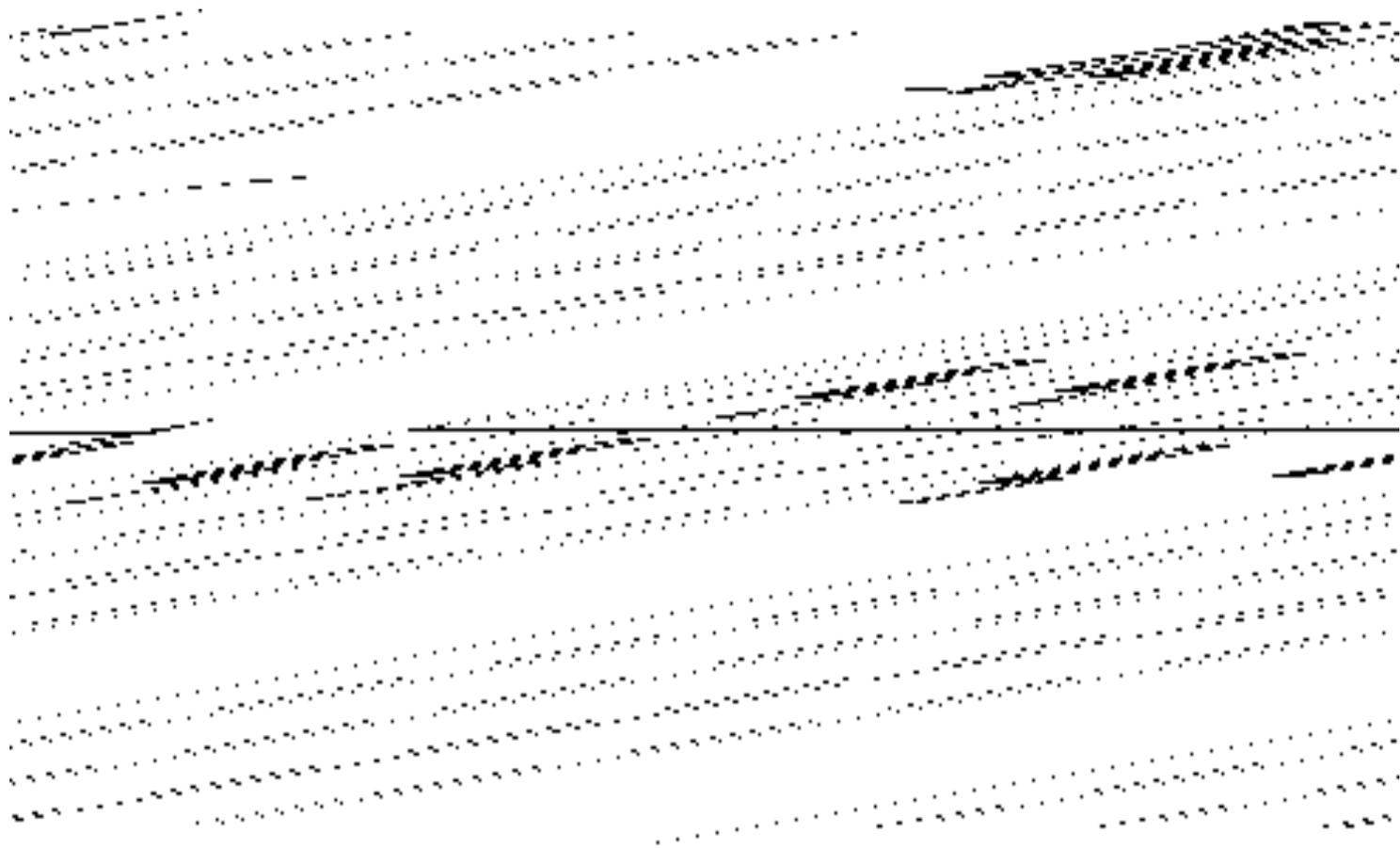


Рис. 2.7. Зависимость входного сопротивления двухполюсника 4-го класса от частоты

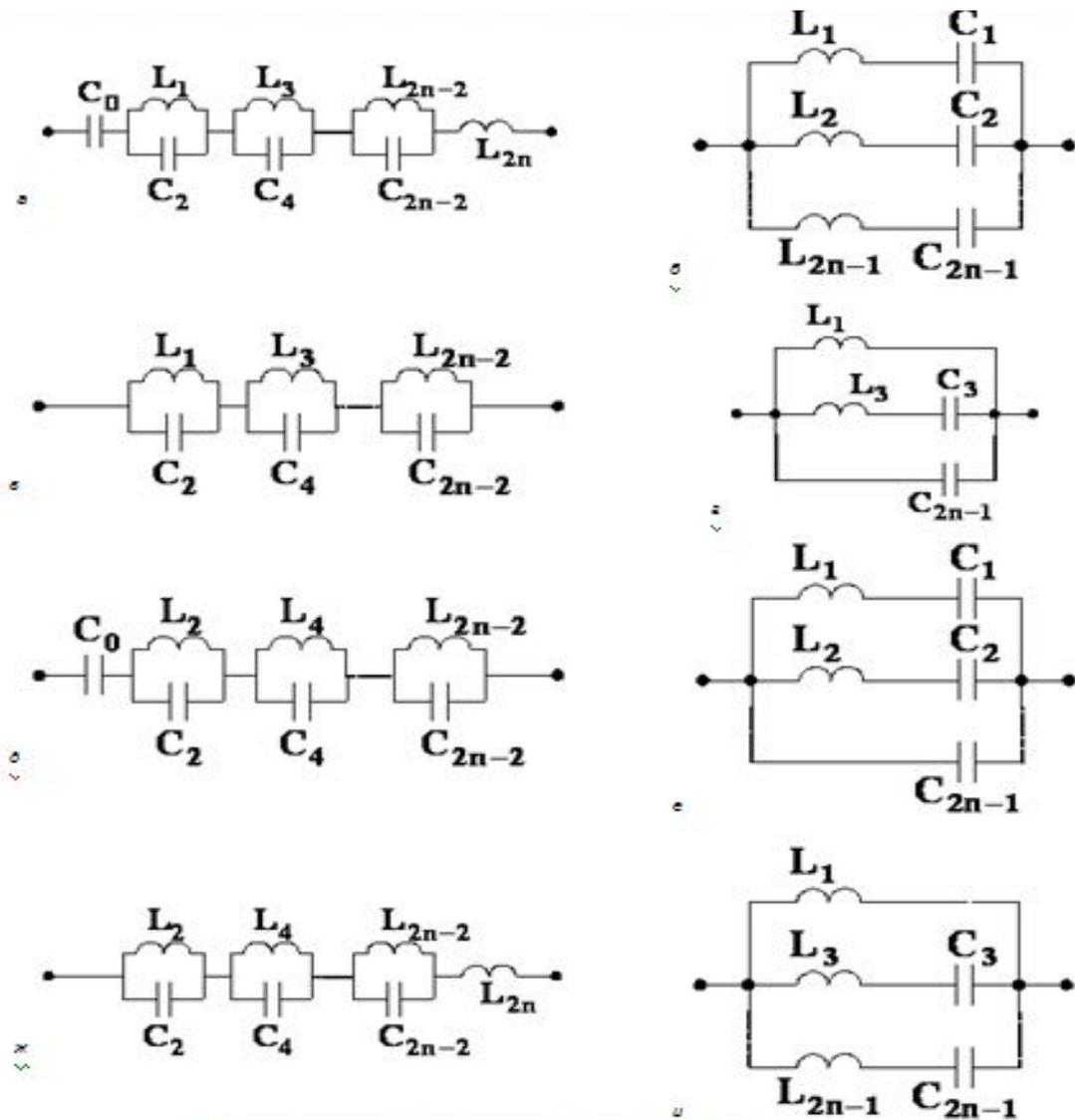


Рис. 2.8. Канонические схемы двухполюсников

Сопротивления новой схемы при преобразовании параллельно-последовательного соединения ветвей в параллельное (рис. 2.9) вычисляются с помощью коэффициентов перехода:

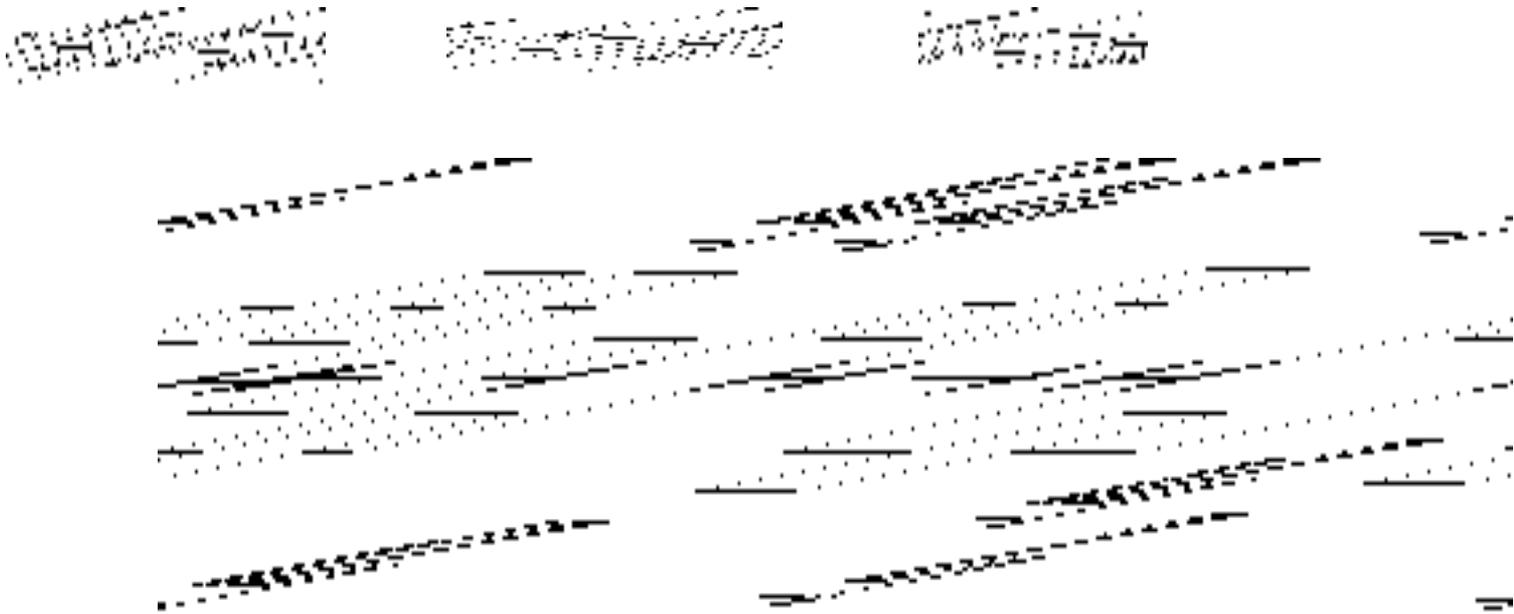


Рис. 2.9. Эквивалентное преобразование двухполюсника

В случае обратного перехода от параллельного соединения ветвей схемы к последовательно-параллельному (рис. 2.10), коэффициенты перехода вычисляются по формулам:

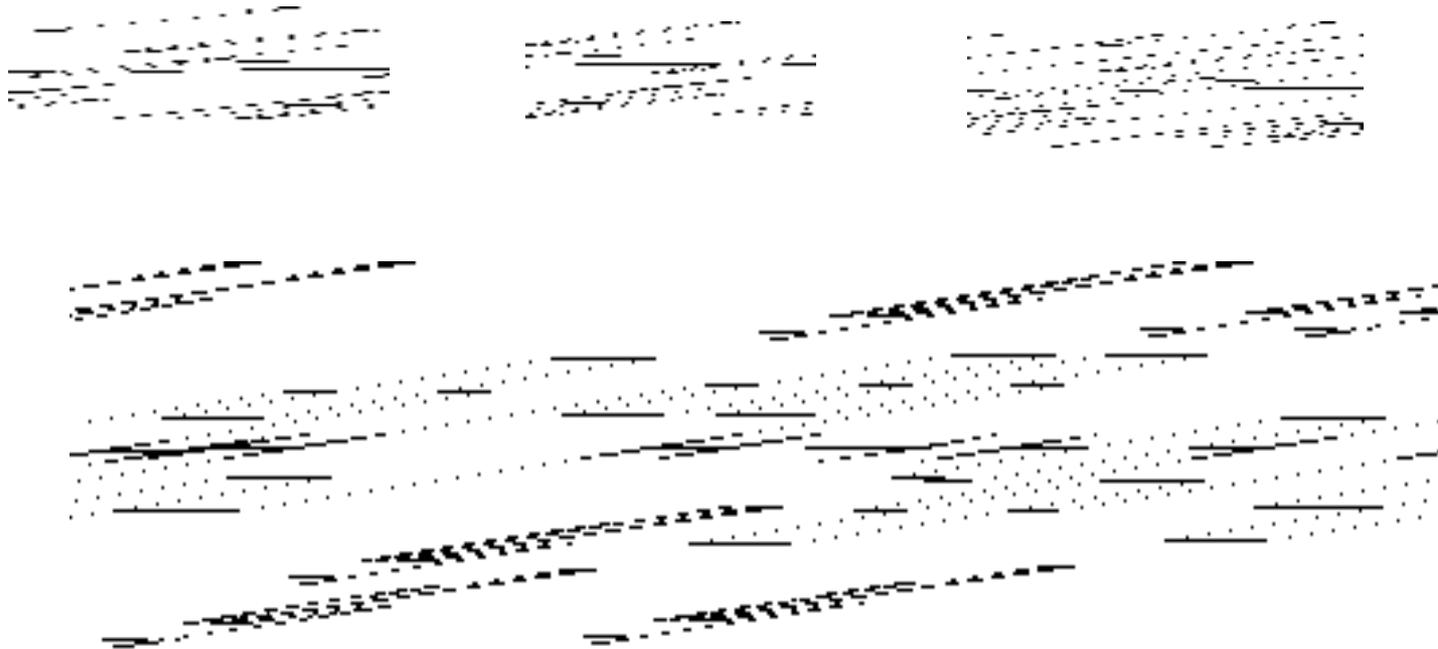


Рис. 2.10. Эквивалентное преобразование двухполюсника

Эквивалентными называются двухполюсники, имеющие различную структуру (схему), но одинаковую характеристику на всем диапазоне частот. Логично, что у эквивалентных двухполюсников резонансные частоты совпадают.

Обратные двухполюсники – к ним относятся двухполюсники с входными сопротивлениями Z_{in1} и Z_{in2} , произведение которых является действительным положительным числом, не зависящим от частоты, т. е.

$$Z_{in1} \cdot Z_{in2} = R^2$$

При этом сопротивление

$$Z_{in1} = R^2 / Z_{in2}$$

(2.3)

В основе построения схемы обратного двухполюсника и определения ее параметров лежит свойство дуальности линейных электрических цепей. Практически это построение сводится к замене последовательного соединения ее элементов (сопротивлений) параллельным соединением обратных (дуальных) элементов (сопротивлений), номинальные величины которых определяются с помощью той же формулы (2.3).

ЗАДАЧА: для реактивного двухполюсника построить схему обратного двухполюсника и рассчитать его элементы.

Схема реактивного двухполюсника приведена на рис. 1.

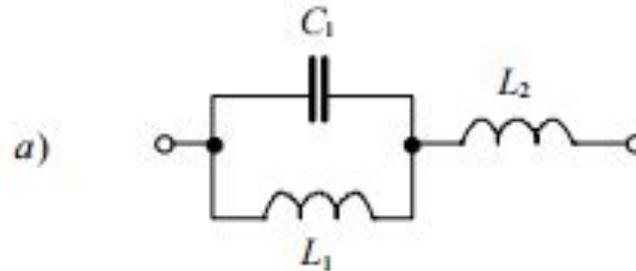


Рис. 1. Исходный реактивный двухполюсник.

Значения элементов двухполюсников:

$$L_1 = 10 \text{ мГн}; \quad C_1 = 0.3 \text{ мкФ};$$

$$L_2 = 18 \text{ мГн}.$$

Коэффициент перехода $R^2 = k = 0.7 \text{ Ом}^2$.

Для решения задачи нужно выполнить следующее:

используя правила, построить схему обратного двухполюсника относительно заданного;

рассчитать значения элементов обратного двухполюсника по данным исходного двухполюсника при указанном коэффициенте перехода (отношении между значениями элементов двухполюсников);

определить все резонансные частоты и характеры резонансов исходного и обратного двухполюсников;

построить частотные характеристики реактивных сопротивлений обоих двухполюсников ($Z = jx(\omega)$) и показать характеристические строки двухполюсников с расположенными на них полюсами и нулями;

указать, к каким классам канонических схем двухполюсников относятся оба двухполюсника и в чем особенность их свойств;

рассчитать реактивные сопротивления двухполюсников на одной частоте, лежащей в каждой из частотных полос: $0 - \omega_1$, $\omega_1 - \omega_2$, ..., $\omega_n - \infty$, где ω_1 , ω_2 , ω_n , - соответственно первая, вторая и последняя резонансные частоты.

Рассмотрим двухэлементные LC двухполюсники.

Последовательное соединение (рис. 2).

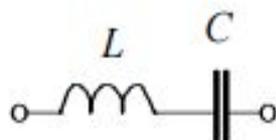


Рис. 2. Последовательное соединение LC .

Сопротивление двухполюсника:

$$Z(\omega) = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = jL \frac{\omega^2 - \frac{1}{LC}}{\omega} = jL \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega}, \quad (1)$$

где

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC} \quad - \text{резонансная частота (резонанс напряжений)}.$$

Проводимость двухполюсника:

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = -j \frac{1}{L} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

Параллельное соединение (рис. 3).

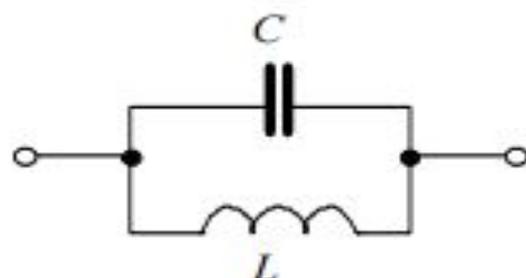


Рис. 3. Параллельное соединение LC .

Проводимость двухполюсника:

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = jC \frac{\omega^2 - \frac{1}{LC}}{\omega} = jC \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega},$$

где

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC} \quad - \text{резонансная частота (резонанс токов).}$$

Сопротивление двухполюсника:

$$Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)} = -j \frac{1}{C} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

Найдем сопротивление *исходного двухполюсника* (рис. 1).

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= Z_2(\omega) + Z_1(\omega) = j\omega L_2 + \left(-j \frac{1}{C_1} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_1^2} \right) = \\ &= jL_2 \cdot \frac{\omega \left(\omega^2 - \left(\omega_1^2 + \frac{1}{L_2 C_1} \right) \right)}{(\omega^2 - \omega_1^2)} = jL_2 \cdot \frac{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)}, \end{aligned}$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{1 \times 10^{-2} \cdot 3 \times 10^{-7}} = 3.333 \times 10^8 \text{ 1/c}^2;$$

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + \frac{1}{L_2 C_1} = 3.333 \times 10^8 + \frac{1}{1.8 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \times 10^{-7}} = 5.185 \times 10^8 \text{ 1/c}^2;$$

Сопротивление исходного двухполюсника:

$$Z(\omega) = jL_2 \cdot \frac{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)}, \quad (3)$$

где

$$L_2 = 0.018 \text{ Гн}; \quad \omega_1^2 = 3.333 \times 10^8 \text{ 1/c}^2; \quad \omega_2^2 = 5.185 \times 10^8 \text{ 1/c}^2.$$

Рассчитаем значения элементов *обратного* двухполюсника.

Для исходного двухполюсника с сопротивлением заданным формулой (3), сопротивление обратного двухполюсника будет:

$$Z'(\omega) = -j \frac{k}{L_2} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (4)$$

где

$Z \cdot Z' = k = 0.7 \text{ Ом}^2$ – постоянный множитель, зависящий от значений элементов схемы.

Существует четыре схемы реализации двухполюсника, заданного формулой (4), см. табл. 1. Выберем схему реализации (рис. 4) разложением сопротивления $Z(\omega)$ на простые дроби:

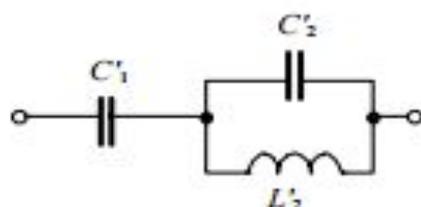


Рис. 4. Схема реализации обратного двухполюсника.

Найдем значения элементов обратного двухполюсника.

$$\begin{aligned} Z'(\omega) &= Z_1(\omega) + Z_2(\omega) = \frac{1}{j\omega C_1'} + \left(-j \frac{1}{C_2'} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_2^2} \right) = \\ &= -j \frac{C_1' + C_2'}{C_1' \cdot C_2'} \cdot \left(\frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)} \cdot \frac{C_2'}{C_1' + C_2'} \right) = -j \frac{k}{L_2} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)} = \end{aligned}$$

Находим:

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 \cdot \frac{C_2'}{C_1' + C_2'} \Rightarrow \frac{C_1' + C_2'}{C_2'} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}; \quad \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = 1 + \frac{C_1'}{C_2'}$$

$$\frac{k}{L_2} = \frac{C_1' + C_2'}{C_1' \cdot C_2'} = \frac{1}{C_1'} \frac{C_1' + C_2'}{C_2'} = \frac{1}{C_1'} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \Rightarrow C_1' = \frac{L_2}{k} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$$

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = 1 + \frac{C_1'}{C_2'} \Rightarrow C_2' = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} C_1' = \frac{L_2}{k} \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

Получим:

$$C_1' = \frac{L_2}{k} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \quad C_2' = \frac{L_2}{k} \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

По формуле для резонансной частоты находим:

$$L'_2 = \frac{1}{\omega_2^2 \cdot C'_2};$$

Вычисляем значения элементов обратного двухполюсника:

$$C'_1 = \frac{L_2 \omega_2^2}{k \omega_1^2} = \frac{0.018 \cdot 5.185 \times 10^8}{0.7 \cdot 3.333 \times 10^8} = 0.04 \text{ Ф};$$

$$C'_2 = \frac{L_2 \omega_2^2}{k \omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{0.018 \cdot 5.185 \times 10^8}{0.7 \cdot 5.185 \times 10^8 - 3.333 \times 10^8} = 0.072 \text{ Ф};$$

$$L'_2 = \frac{1}{\omega_2^2 \cdot C'_2} = \frac{1}{5.185 \times 10^8 \cdot 0.072} = 2.679 \times 10^{-8} \text{ Гн};$$

Сопротивление обратного двухполюсника:

$$Z'(\omega) = -j \frac{k}{L_2} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)},$$

где

$$\frac{k}{L_2} = 38.89 \text{ Ом/с}; \quad \omega_1^2 = 3.333 \times 10^8 \text{ 1/с}^2; \quad \omega_2^2 = 5.185 \times 10^8 \text{ 1/с}^2.$$

Параметры схемы (рис. 4) обратного двухполюсника:

$$C'_1 = 0.04 \text{ Ф}; \quad C'_2 = 0.072 \text{ Ф}; \quad L'_2 = 2.679 \times 10^{-8} \text{ Гн}.$$

Характеры резонансов исходного и обратного реактивных двухполюсников.

Исходный двухполюсник (рис. 5).

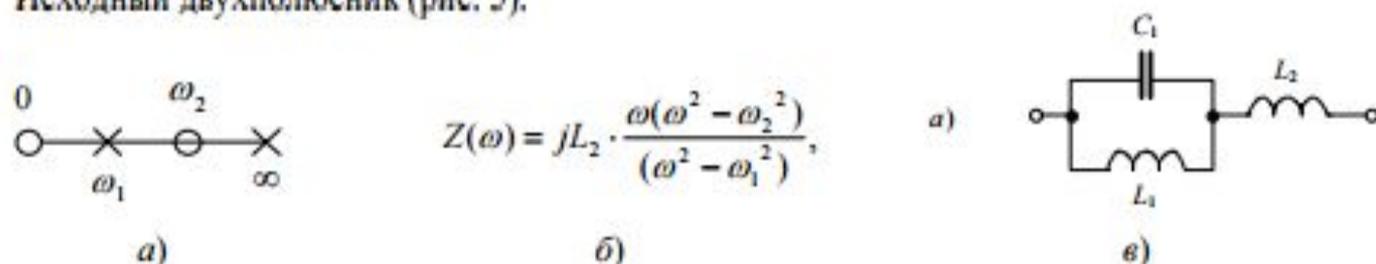


Рис. 5.

Частота резонанса ω_2 образована последовательным включением катушки L_2 и контура L_1C_1 (резонанс напряжений). Такие колебания возможны при *замкнутых* внешних зажимах двухполюсника.

Частота резонанса ω_1 представляет собой частоту собственных колебаний колебательного контура L_1C_1 (резонанс токов). Такие колебания возможны при *разомкнутых* внешних зажимах двухполюсника.

Обратный двухполюсник (рис. 6).

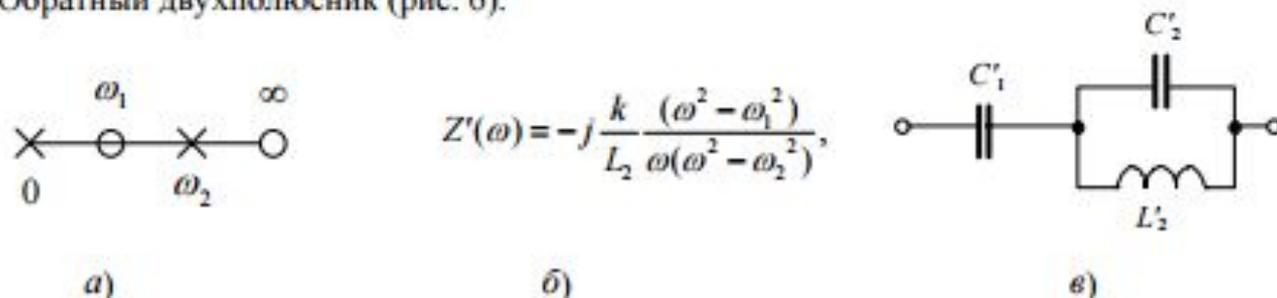


Рис. 6.

Частота резонанса ω_2 образована параллельным включением $L'_2 C'_2$ (резонанс токов). Такие колебания возможны при *разомкнутых* внешних зажимах двухполюсника.

Частота резонанса ω_1 представляет собой частоту собственных колебаний цепи, образованной последовательным соединением $C'_1 L'_2 C'_2$ (резонанс напряжений). Такие колебания возможны при *замкнутых* внешних зажимах двухполюсника.

Характеристические строки двухполюсников изображены на рис. 5. а) и рис. 6. а).

Частотные характеристики реактивных двухполюсников изображены на рис. 7, 8.

В табл. 1 дана классификация реактивных двухполюсников по характеристическим строкам. Исходный двухполюсник относится к первому типу, схема 1. Обратный двухполюсник относится ко второму типу, схема 3.

Особенность свойств двухполюсников (рис. 5, 6):

- для всех реактивных двухполюсников в выражении для сопротивления числитель является четным, а знаменатель нечетным по частоте (либо наоборот);
- двухполюсник (рис. 6) не пропускает постоянный ток, обратный ему (рис. 5) - пропускает;
- процессы в цепях, составленных из катушек индуктивности и конденсаторов с высокой добротностью не сопровождаются сколь-нибудь значительным выделением энергии.

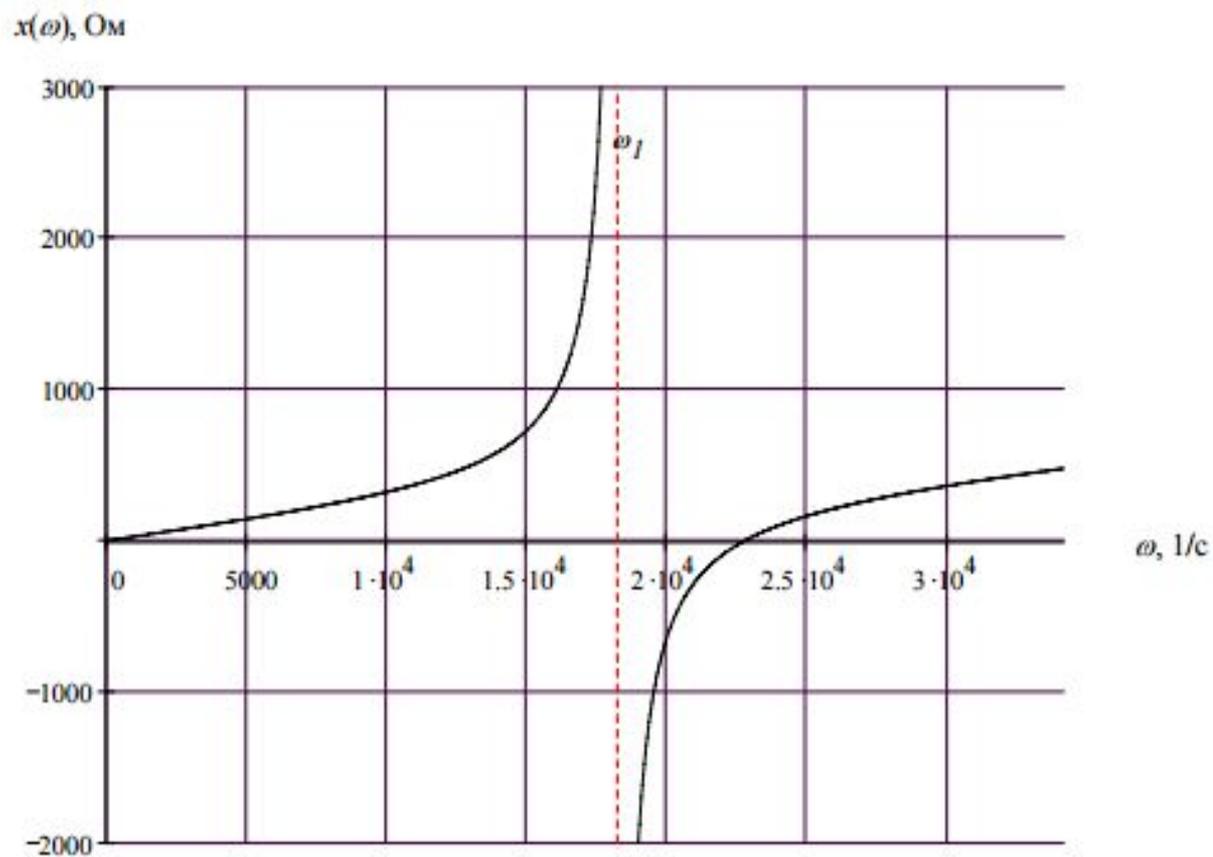


Рис. 7. Частотная характеристика исходного двухполюсника.

$x'(\omega)$, Ω

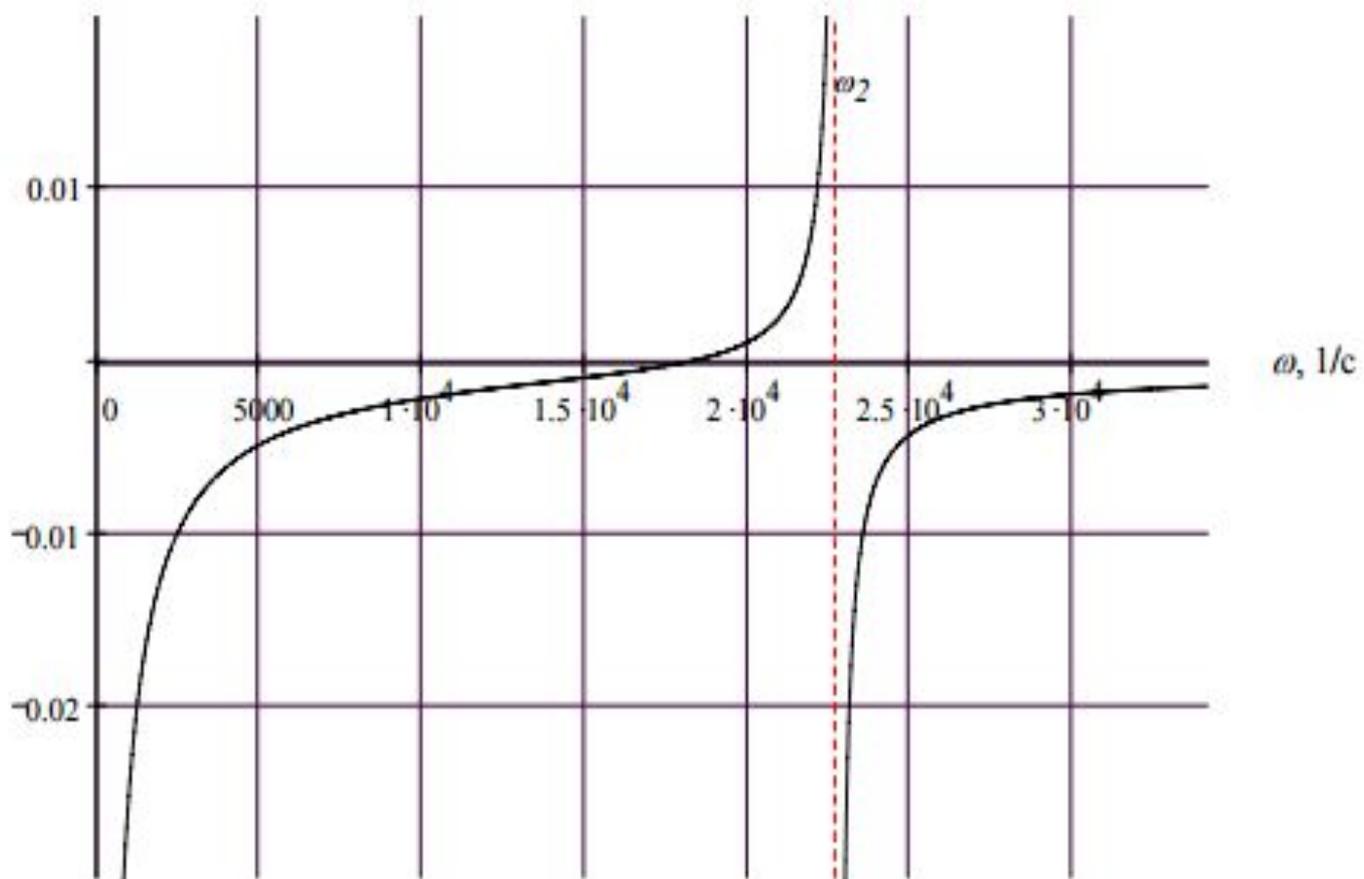


Рис. 8. Частотная характеристика обратного двухполюсника.

Рассчитаем реактивные сопротивления двухполосников на одной частоте, лежащей в каждой из частотных полос: $0 - \omega_1$, $\omega_1 - \omega_2$, ..., $\omega_n - \infty$,

Выберем следующие частоты:

$$\omega_{01} = 9.13 \times 10^3 \text{ 1/с}; \quad \omega_{12} = 2.05 \times 10^4 \text{ 1/с}; \quad \omega_{2\infty} = 3.42 \times 10^4 \text{ 1/с}.$$

Для исходного двухполосника:

$$Z(\omega) = j \cdot 1.8 \cdot 10^{-2} \cdot \omega \cdot \frac{\omega^2 - 5.185 \cdot 10^8}{\omega^2 - 3.333 \cdot 10^8}$$

$$Z(9.13 \times 10^3) = 286j \text{ Ом};$$

$$Z(2.05 \times 10^4) = -417j \text{ Ом};$$

$$Z(3.42 \times 10^4) = 479j \text{ Ом};$$

Для обратного двухполосника:

$$Z'(\omega) = -38.89 j \cdot \frac{\omega^2 - 3.333 \cdot 10^8}{\omega \cdot (\omega^2 - 5.185 \cdot 10^8)}$$

$$Z'(9.13 \times 10^3) = -2.45j \times 10^{-3} \text{ Ом};$$

$$Z'(2.05 \times 10^4) = 1.68j \times 10^{-3} \text{ Ом};$$

$$Z'(3.42 \times 10^4) = -1.46j \times 10^{-3} \text{ Ом};$$