

**Расстояние между
скрещивающимися
прямыми**

Определение

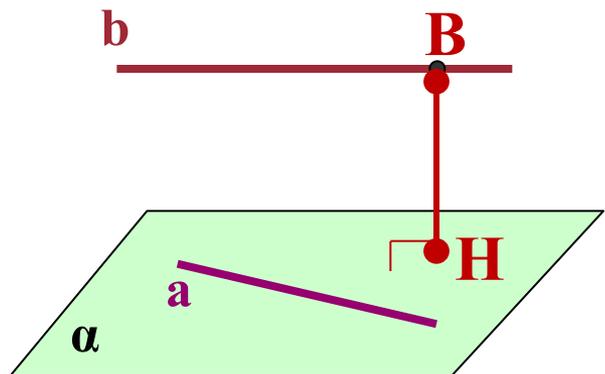
Отрезок, концы которого лежат на скрещивающихся прямых, и перпендикулярный обеим прямым, называется общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым.

Теорема

*К любым двум скрещивающимся
прямым можно провести общий
перпендикуляр и притом только
один.*

Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

1 способ

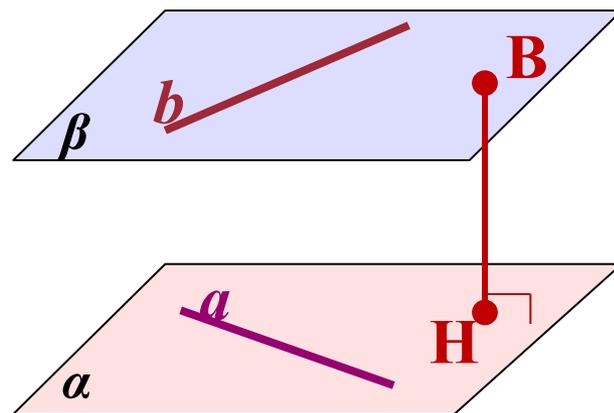


$$a \subset \alpha, \alpha \parallel b$$

$$B \in b, BH \perp \alpha,$$

$$\rho(a, b) = \rho(b, \alpha) = BH$$

2 способ

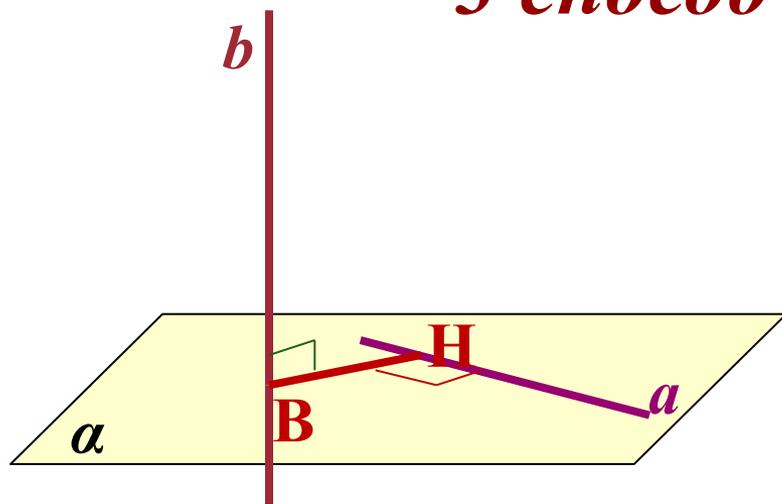


$$a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \parallel \beta$$

$$B \in \beta, BH \perp \alpha,$$

$$\rho(a, b) = \rho(\alpha, \beta) = BH$$

3 способ



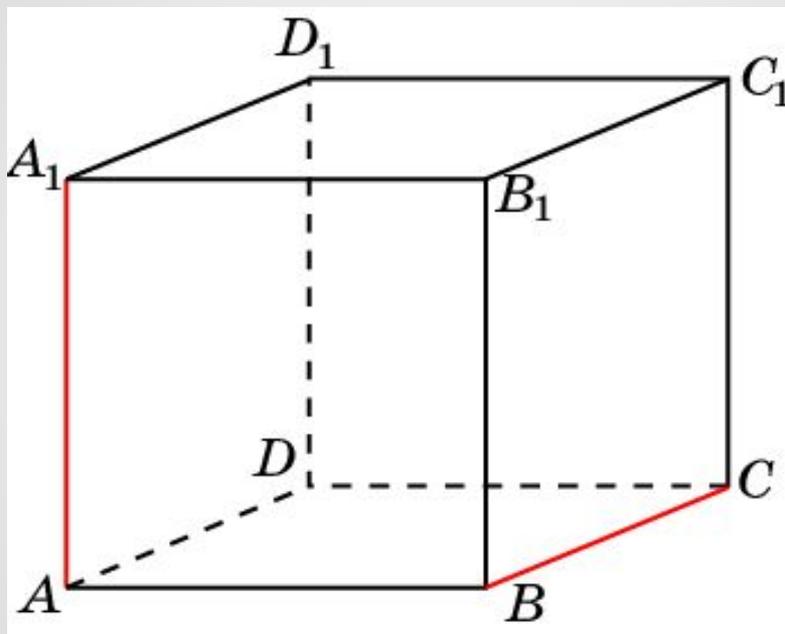
$$a \subset \alpha, b \perp \alpha,$$

$$b \cap \alpha = B, BH \perp a,$$

тогда $\rho(a, b) = BH$

Куб 1

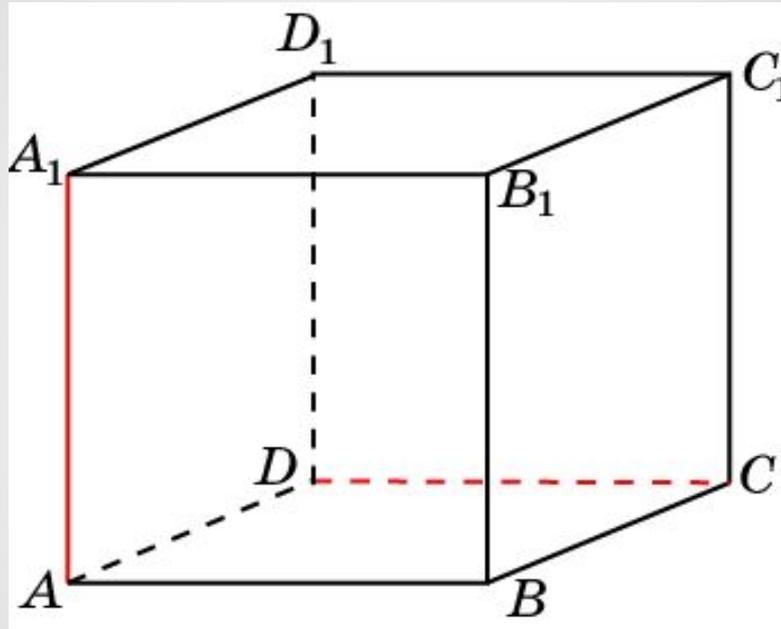
В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC .



Ответ: 1.

Куб 2

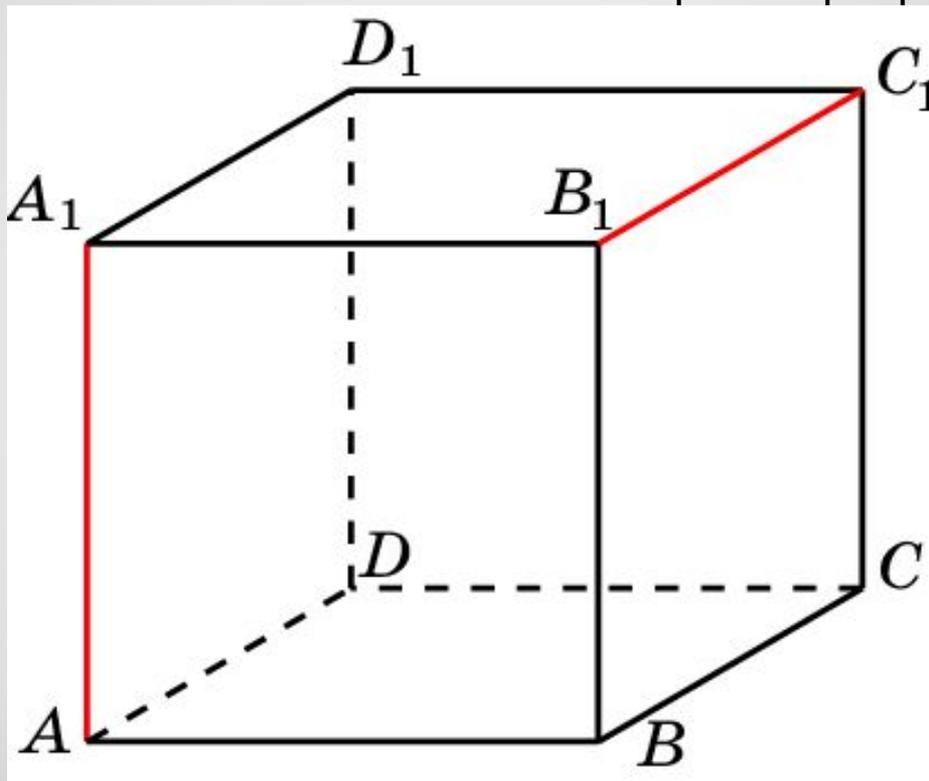
В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и CD .



Ответ: 1.

Куб 3

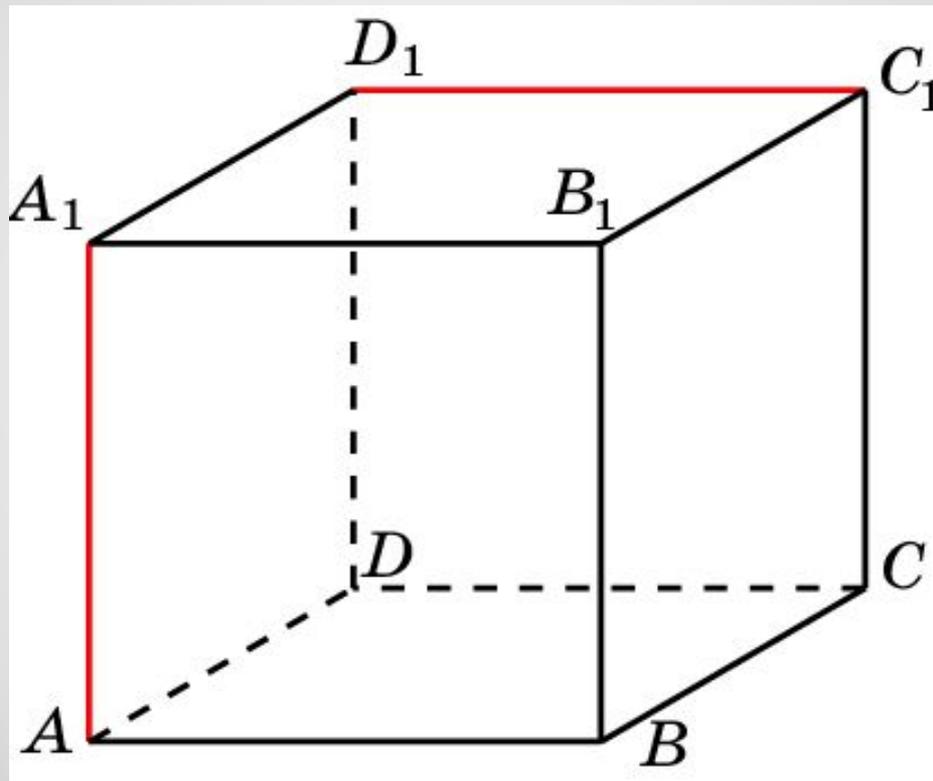
В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и B_1C_1 .



Ответ: 1.

Куб 4

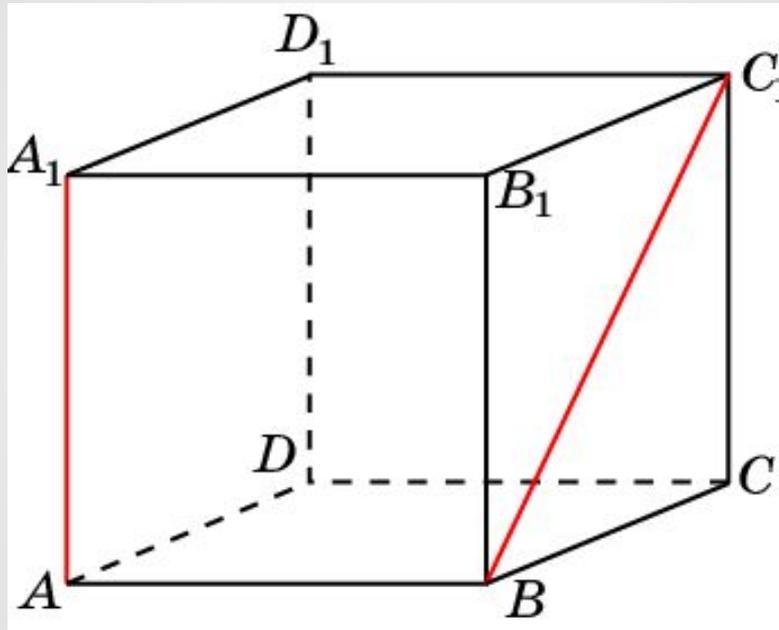
В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и C_1D_1 .



Ответ: 1.

Куб 5

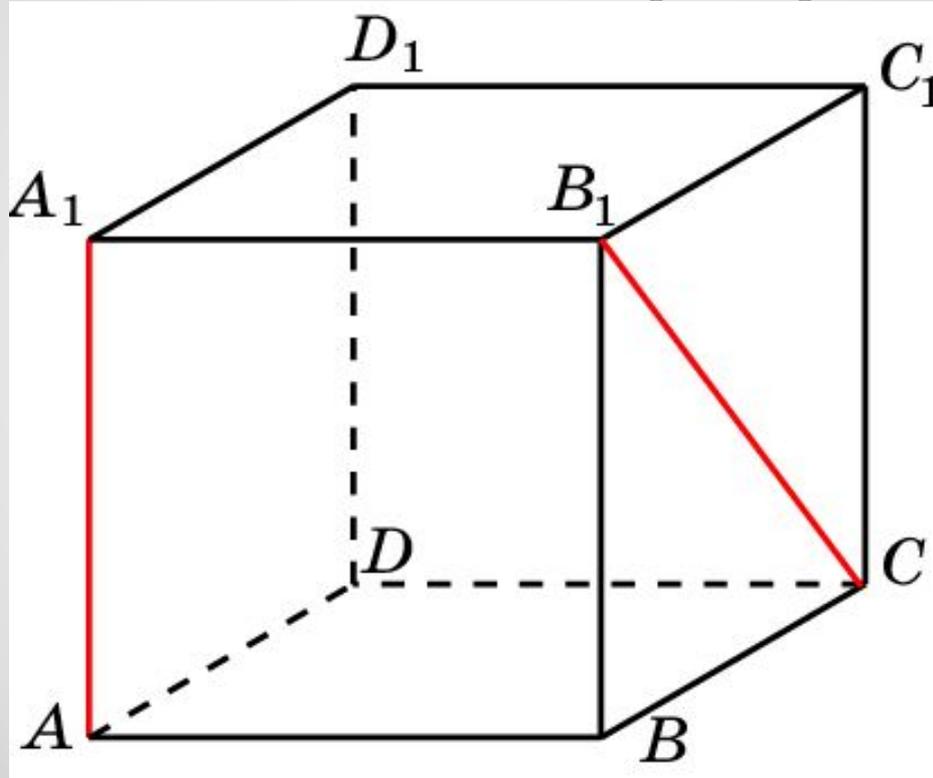
В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .



Ответ: 1.

Куб 6

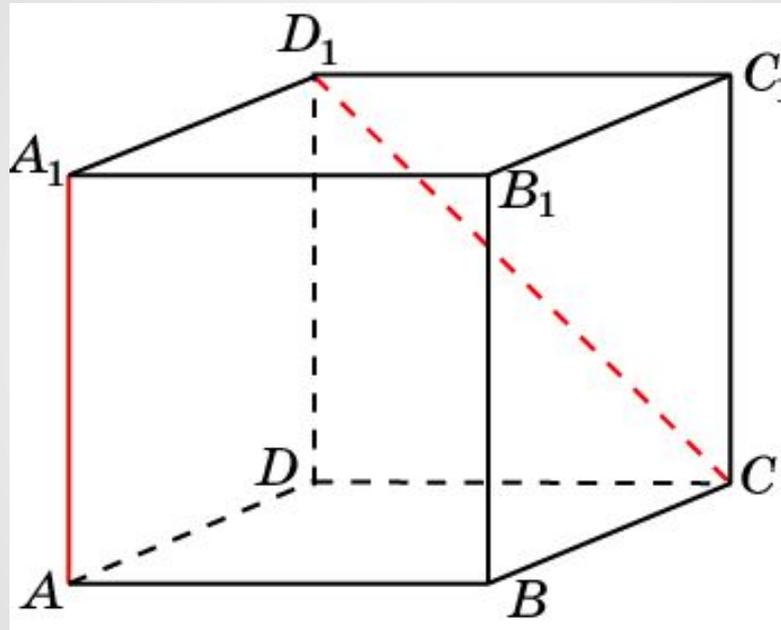
В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и B_1C .



Ответ: 1.

Куб 7

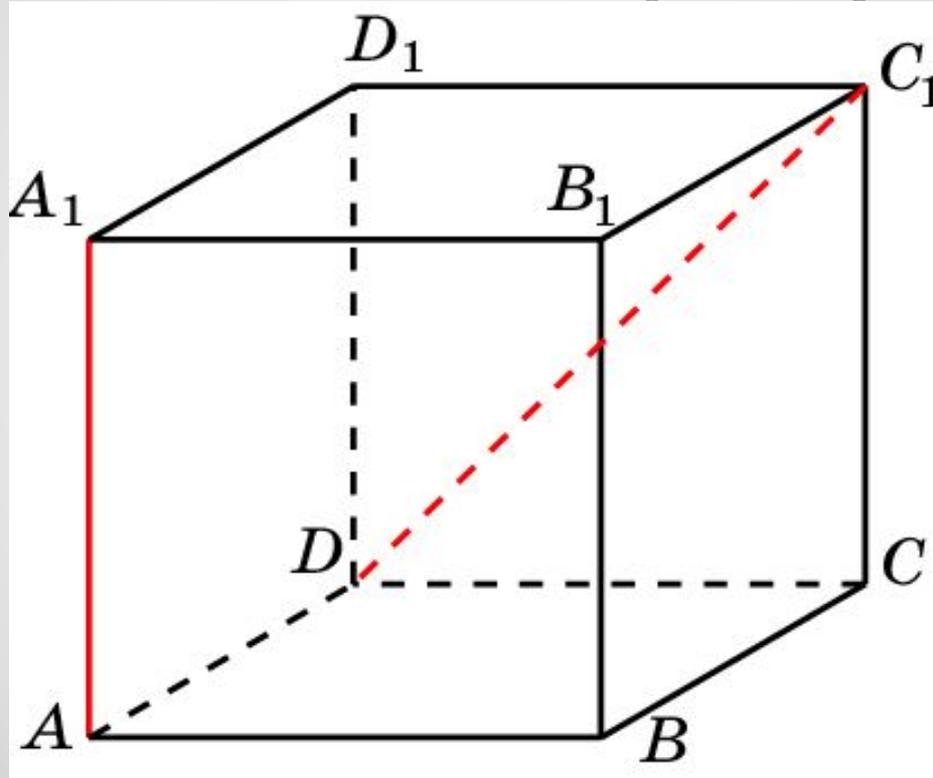
В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и CD_1 .



Ответ: 1.

Куб 8

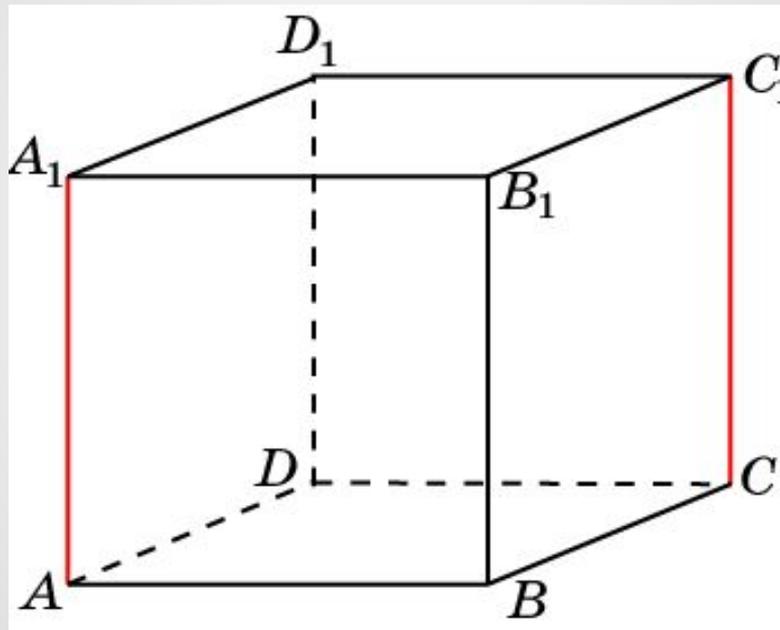
В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и DC_1 .



Ответ: 1.

Куб 9

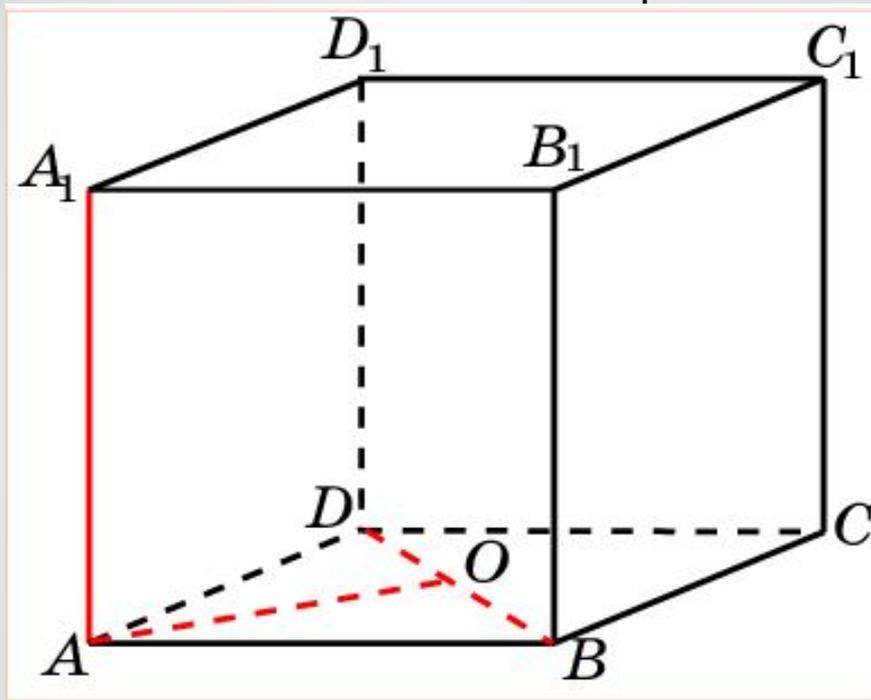
В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и CC_1 .



Ответ: $\sqrt{2}$.

Куб 10

В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD .

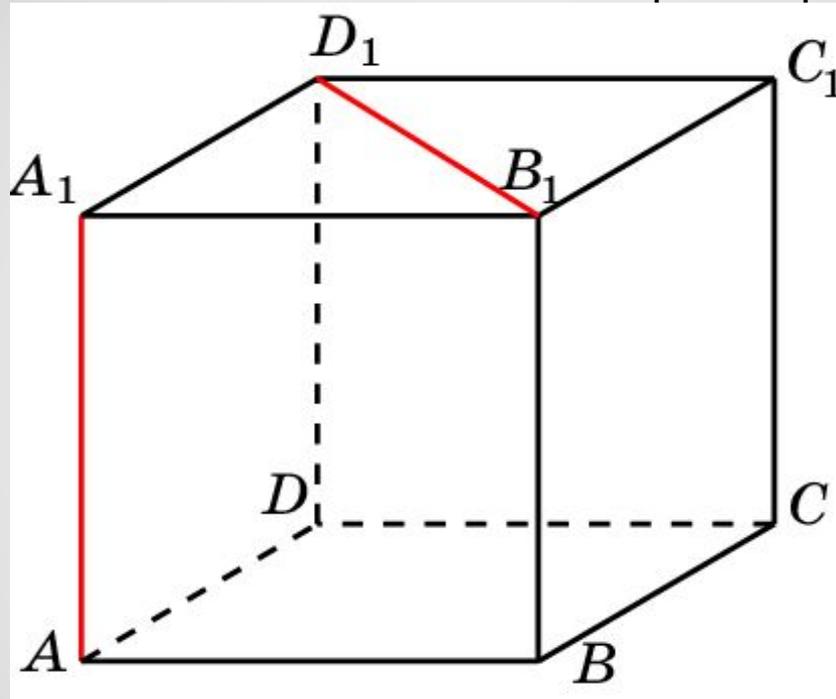


Решение. Пусть O – середина BD . Искомым расстоянием является длина отрезка AO . Она равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Куб 11

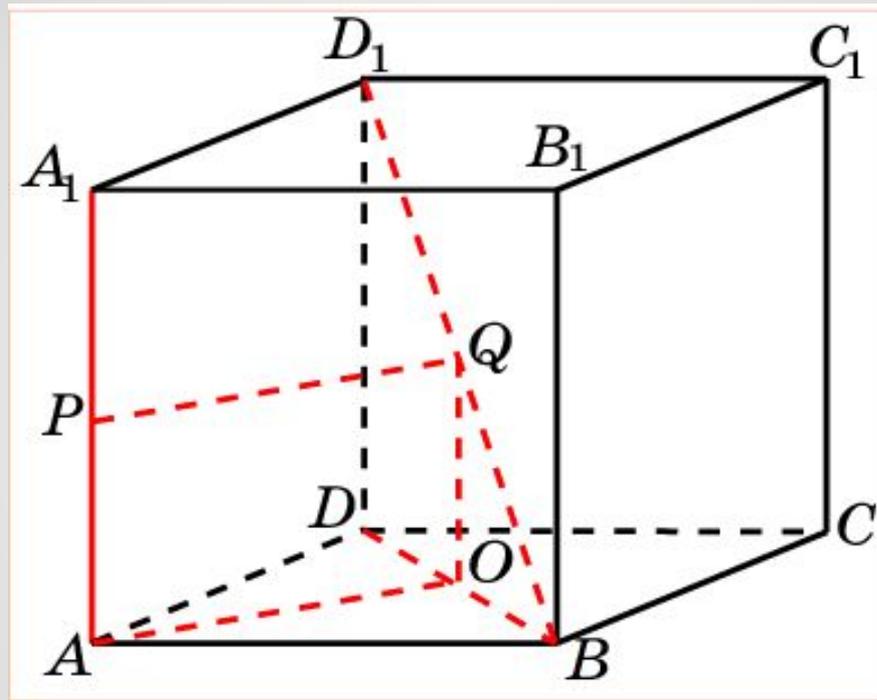
В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и B_1D_1 .



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Куб 12

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1 .

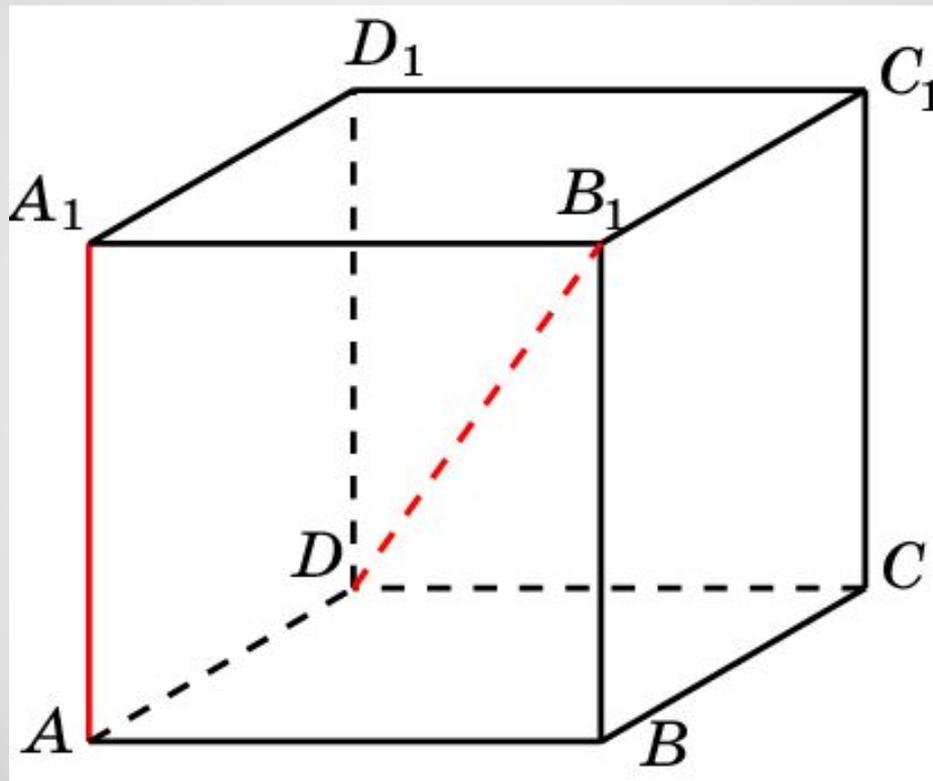


Решение. Пусть P, Q – середины AA_1, BD_1 . Искомым расстоянием является длина отрезка PQ . Она равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Куб 13

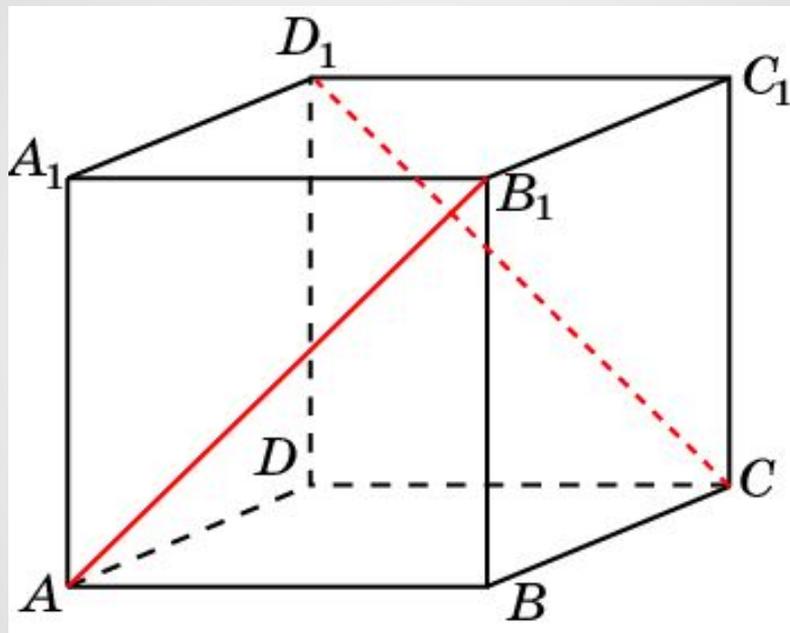
В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1 .



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Куб 14

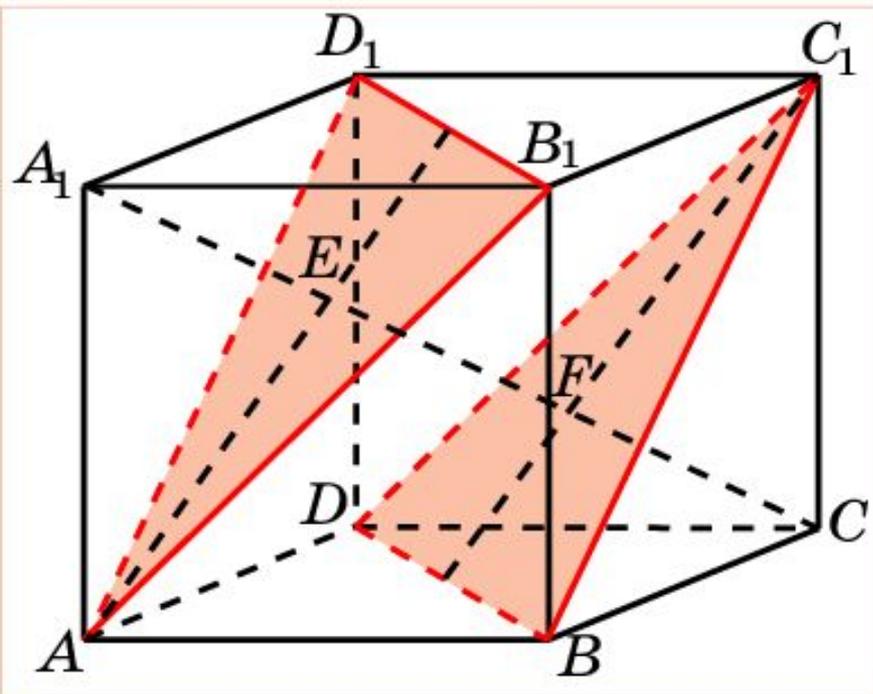
В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние прямыми AB_1 и CD_1 .



Ответ: 1.

Куб 15

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 .

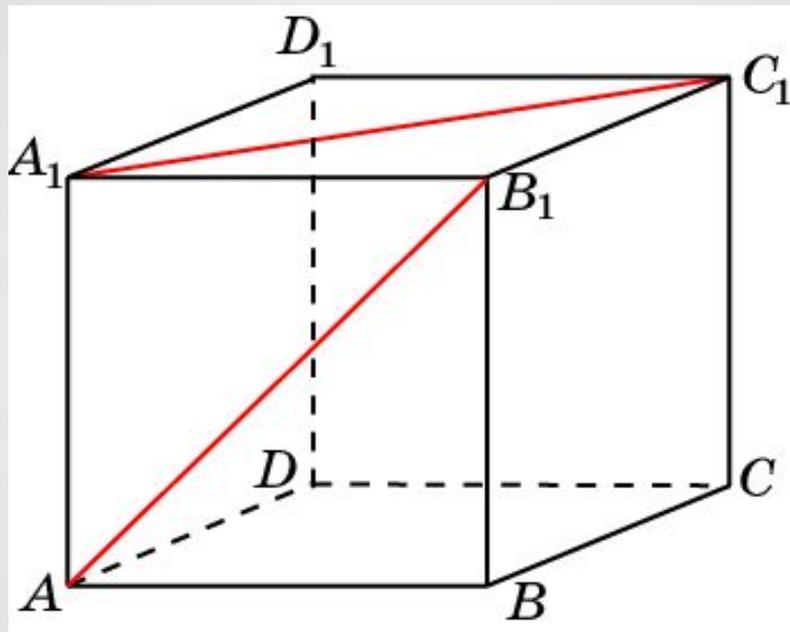


Решение. Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 . Диагональ A_1C_1 перпендикулярна этим плоскостям и делится в точках пересечения на три равные части. Следовательно, искомое расстояние равно длине отрезка EF и равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Куб 16

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и A_1C_1 .

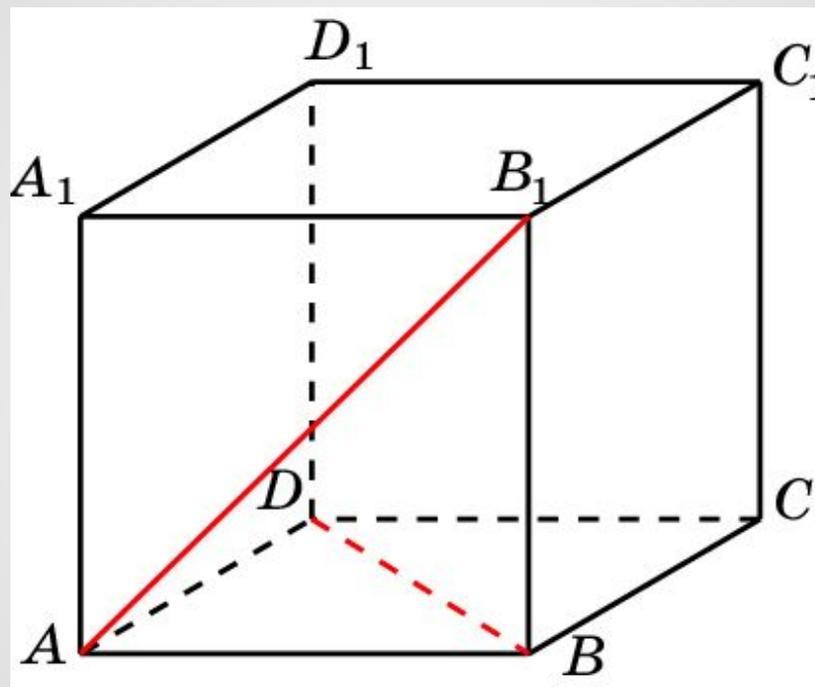


Решение аналогично предыдущему.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Куб 17

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD .

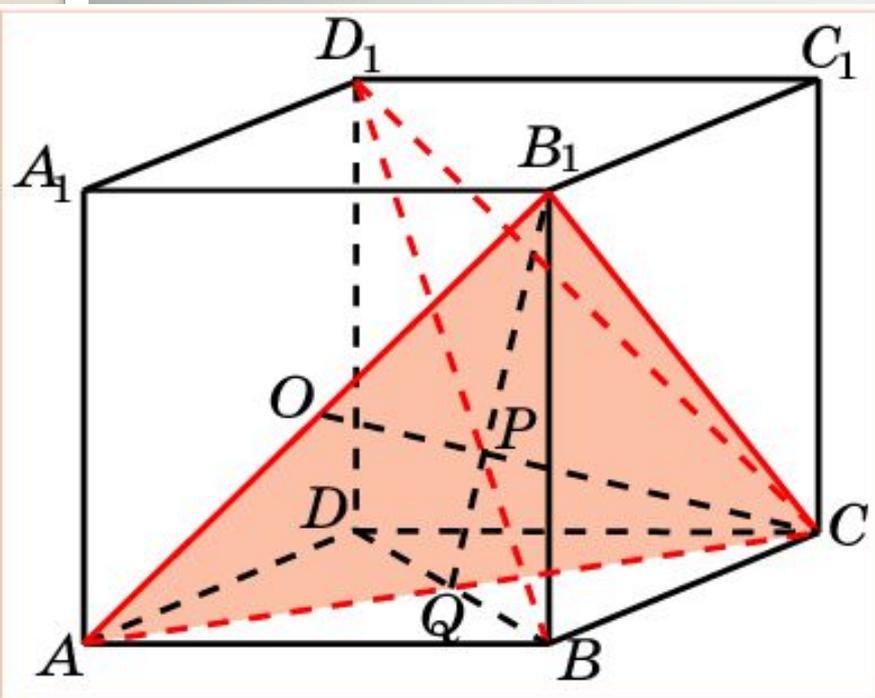


Решение аналогично предыдущему.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Куб 18

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние прямыми AB_1 и BD_1 .



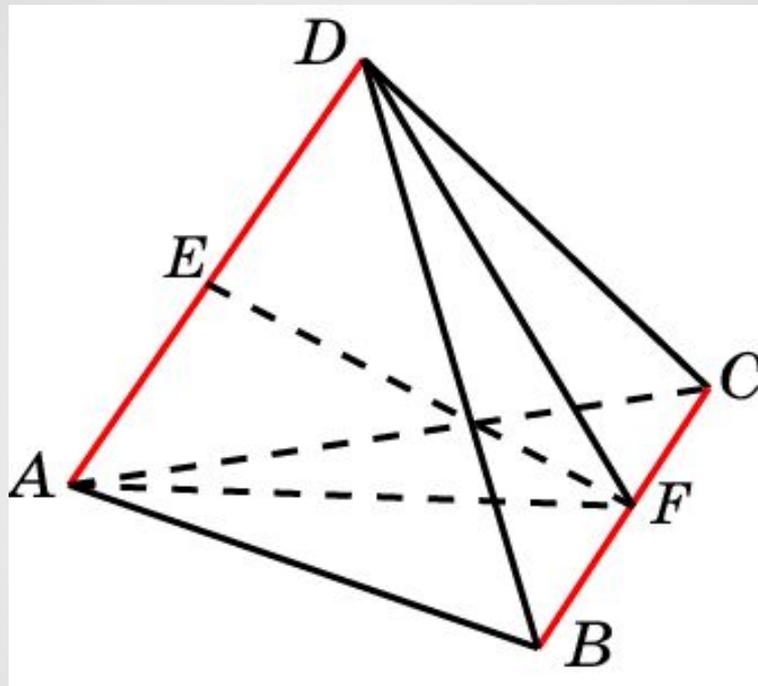
Решение. Диагональ BD_1 перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ACB_1 и пересекает его в центре P вписанной в него окружности. Искомое расстояние равно радиусу OP этой окружности.

$$OP = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Пирамида 1

В единичном тетраэдре $ABCD$ найдите расстояние между прямыми AD и BC .

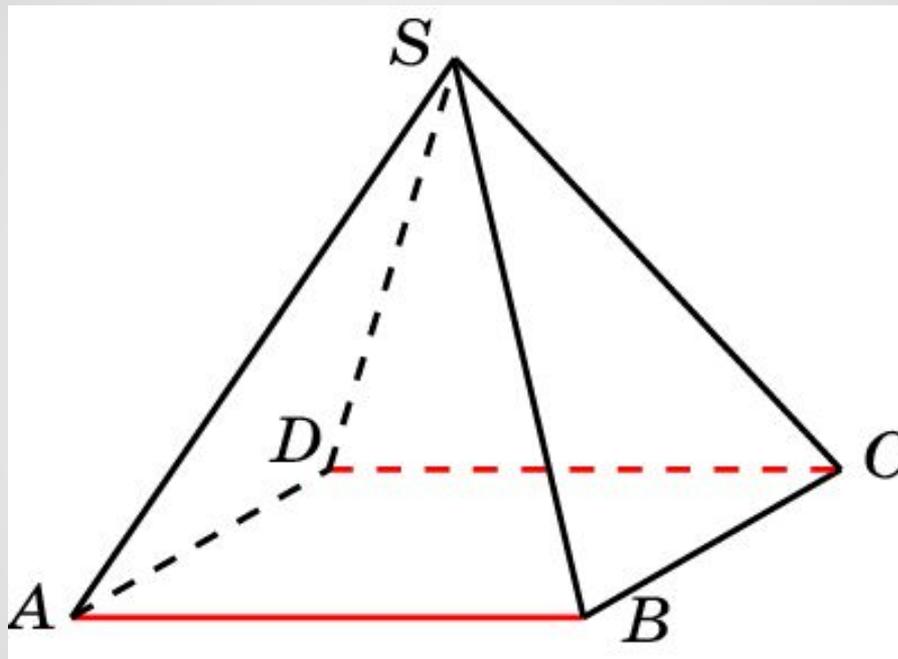


Решение. Искомое расстояние равно длине отрезка EF , где E, F – середины ребер AD, BC . В треугольнике ADF $AD = 1$,
 $AF = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пирамида 2

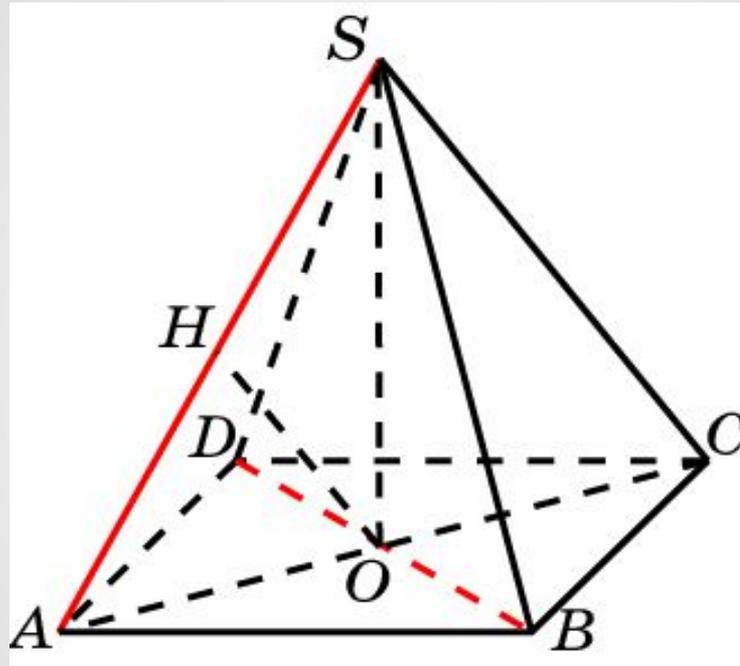
В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CD .



Ответ: 1.

Пирамида 3

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BD .

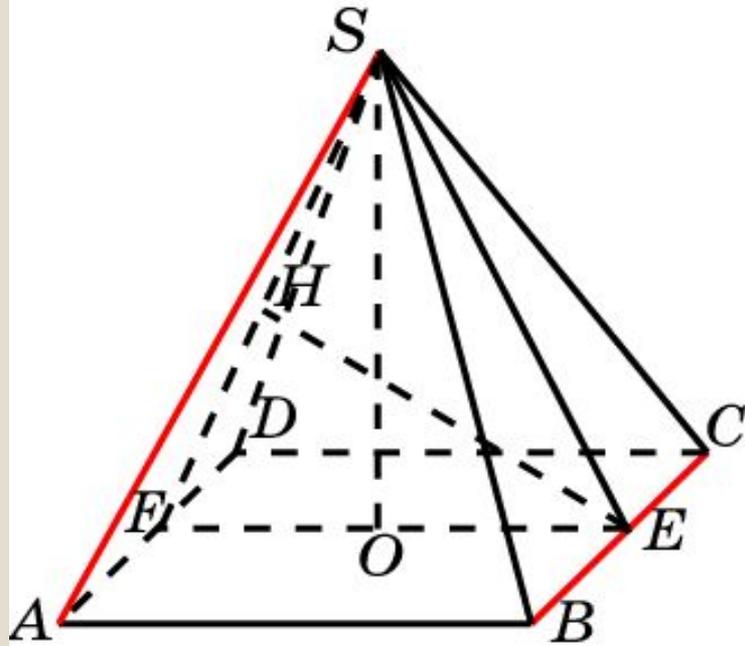


Решение. Искомое расстояние равно высоте OH треугольника SAO , где O – середина BD . В прямоугольном треугольнике SAO имеем: $SA = 1$, $AO = SO = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $OH = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пирамида 4

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC .



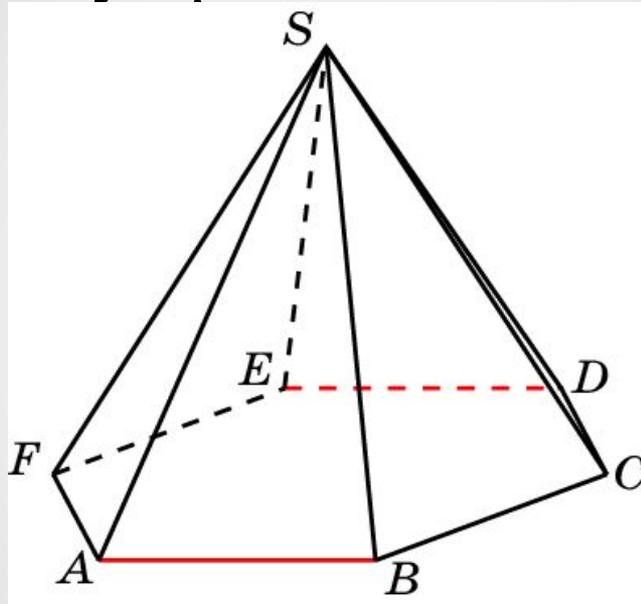
Решение. Плоскость SAD параллельна прямой BC . Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию между прямой BC и плоскостью SAD . Оно равно высоте EH треугольника SEF , где E, F – середины ребер BC, AD . В треугольнике SEF имеем:

$$EF = 1, SE = SF = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Высота } SO \text{ равна } \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Следовательно, } EH = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Пирамида 5

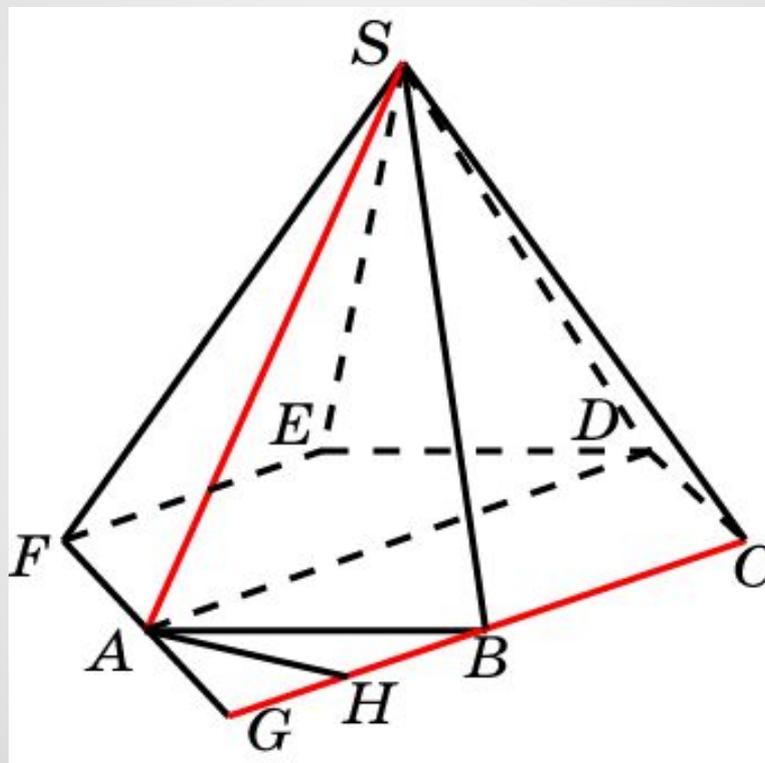
В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, ребра основания которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и DE .



Ответ: $\sqrt{3}$.

Пирамида 6

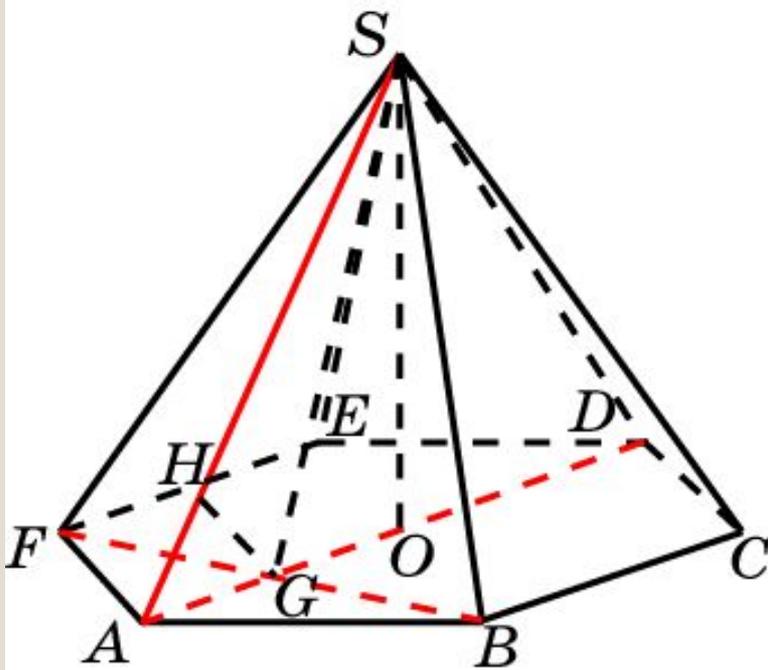
В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC .



Решение: Продолжим ребра BC и AF до пересечения в точке G . Общим перпендикуляром к SA и BC будет высота AH треугольника ABG . Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Ответ:** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пирамида 7

В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние между прямыми SA и BF .



Решение: Искомым расстоянием является высота GH треугольника SAG , где G – точка пересечения BF и AD . В треугольнике SAG имеем:

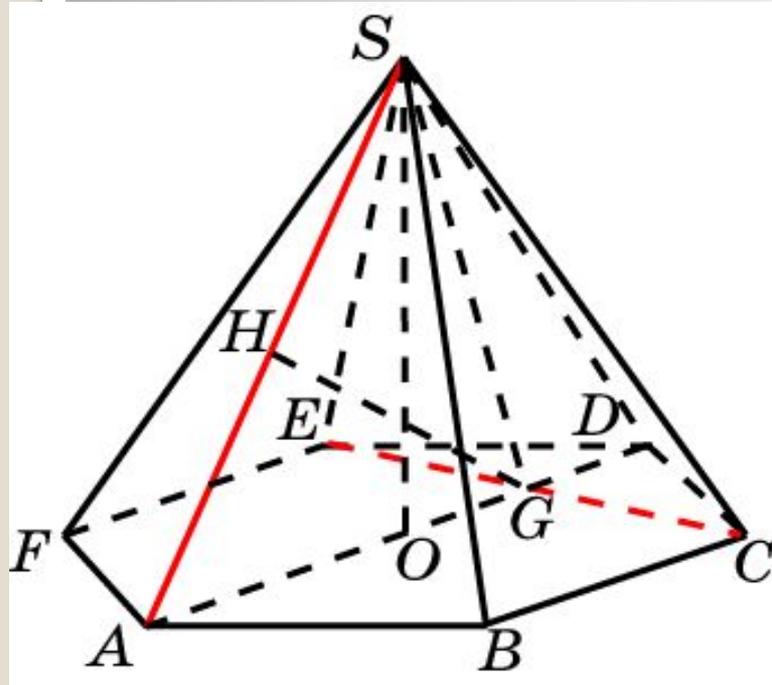
$SA = 2$, $AG = 0,5$, высота SO равна $\sqrt{3}$.

Отсюда находим $GH = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Пирамида 8

В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние между прямыми SA и CE .



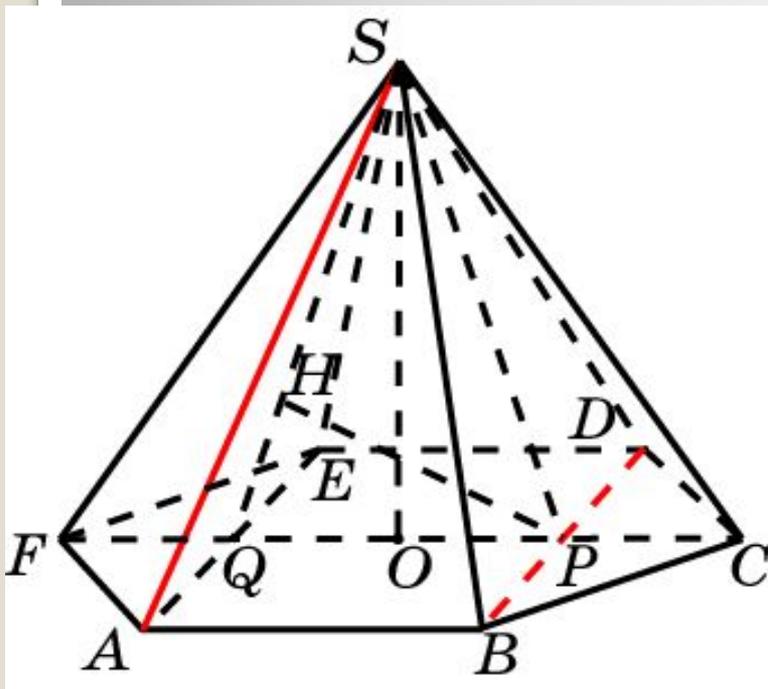
Решение: Искомым расстоянием является высота GH треугольника SAG , где G – точка пересечения CE и AD . В треугольнике SAG имеем:

$SA = 2$, $AG = \frac{3}{2}$, высота SO равна $\sqrt{3}$. Отсюда находим $GH = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Пирамида 9

В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние между прямыми SA и BD .

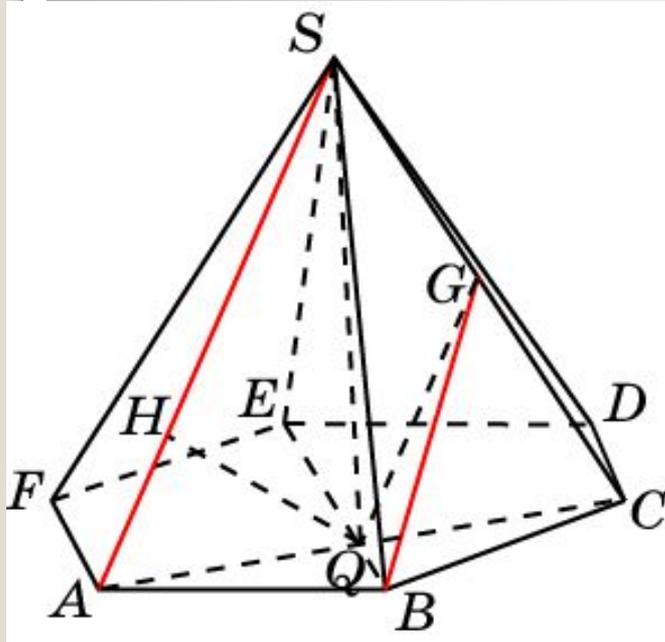


Решение: Прямая BD параллельна плоскости SAE . Искомое расстояние равно расстоянию между прямой BD и этой плоскостью и равно высоте PH треугольника SPQ . В этом треугольнике высота SO равна $\sqrt{3}$, $PQ = 1$, $SP = SQ = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Отсюда находим $PH^2 = \frac{2\sqrt{39}}{13}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

Пирамида 10

В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние между прямыми SA и BG , где G – середина ребра SC .



Решение: Через точку G проведем прямую, параллельную SA . Обозначим Q точку ее пересечения с прямой AC . Искомое расстояние равно высоте QH прямоугольного треугольника ASQ , в котором

$$AS = 2, AQ = \frac{\sqrt{3}}{2}, SQ = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

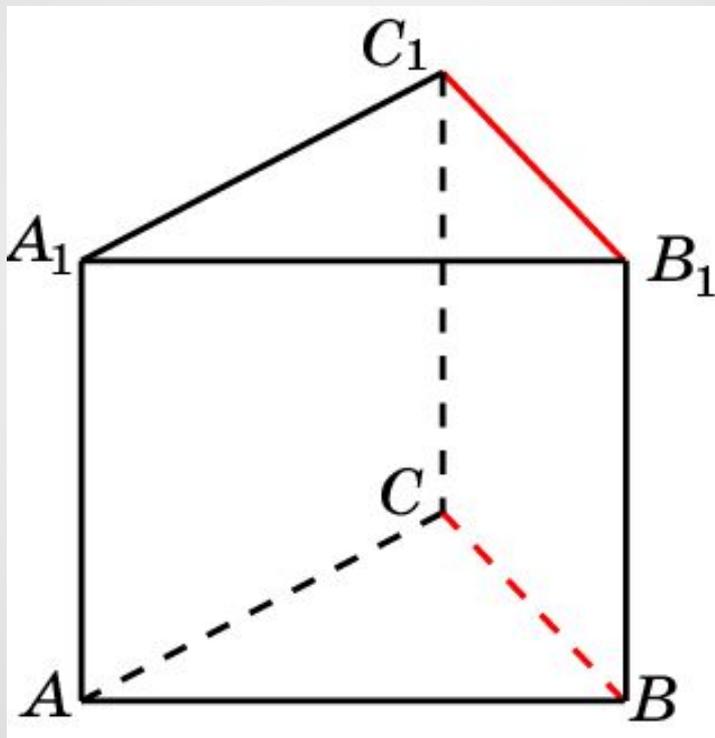
Отсюда находим

$$QH = \frac{\sqrt{39}}{8}. \quad \text{Ответ: } \frac{\sqrt{39}}{8}.$$

Призма 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

BC и B_1C_1 .

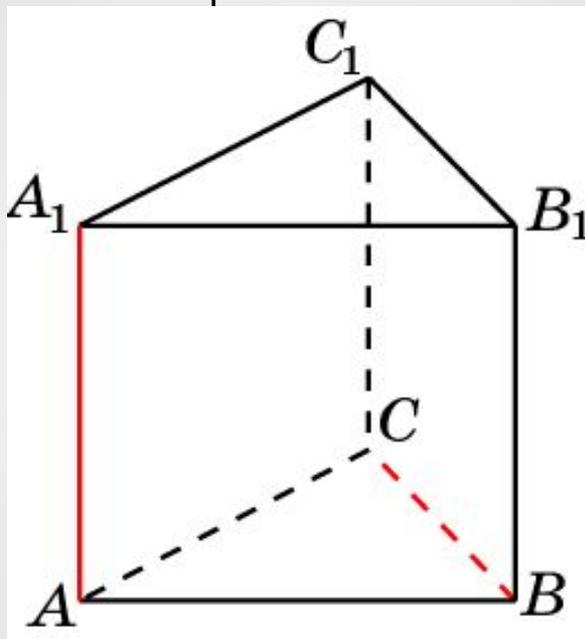


Ответ: 1.

Призма 2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AA_1 и BC .

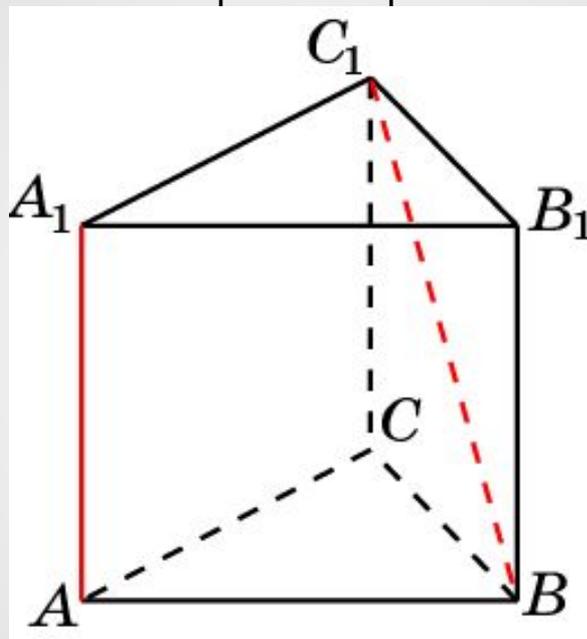


Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AA_1 и BC_1 .

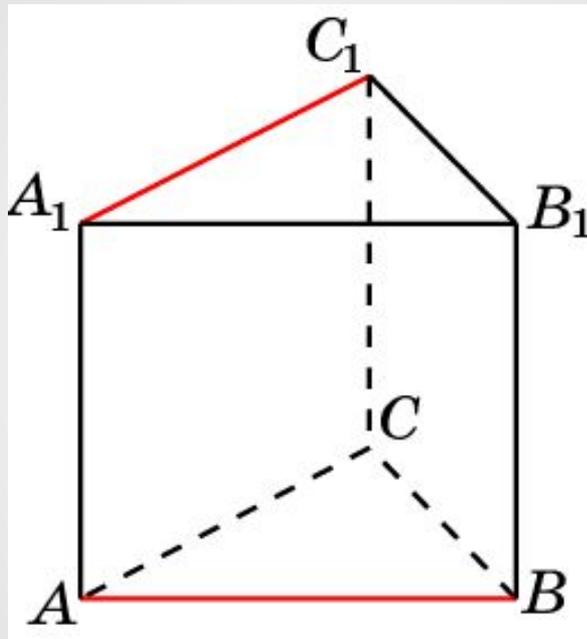


Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AB и A_1C_1 .

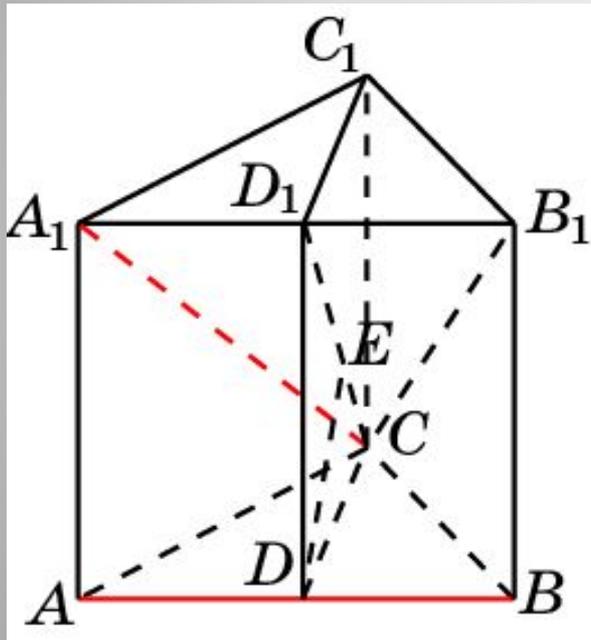


Ответ: 1.

Призма 5

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AB и A_1C .



Решение: Искомое расстояние равно расстоянию между прямой AB и плоскостью A_1B_1C . Обозначим D и D_1 середины ребер AB и A_1B_1 . В прямоугольном треугольнике CDD_1 из вершины D проведем высоту DE . Она и будет искомым расстоянием.

Имеем, $DD_1 = 1$, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $CD_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

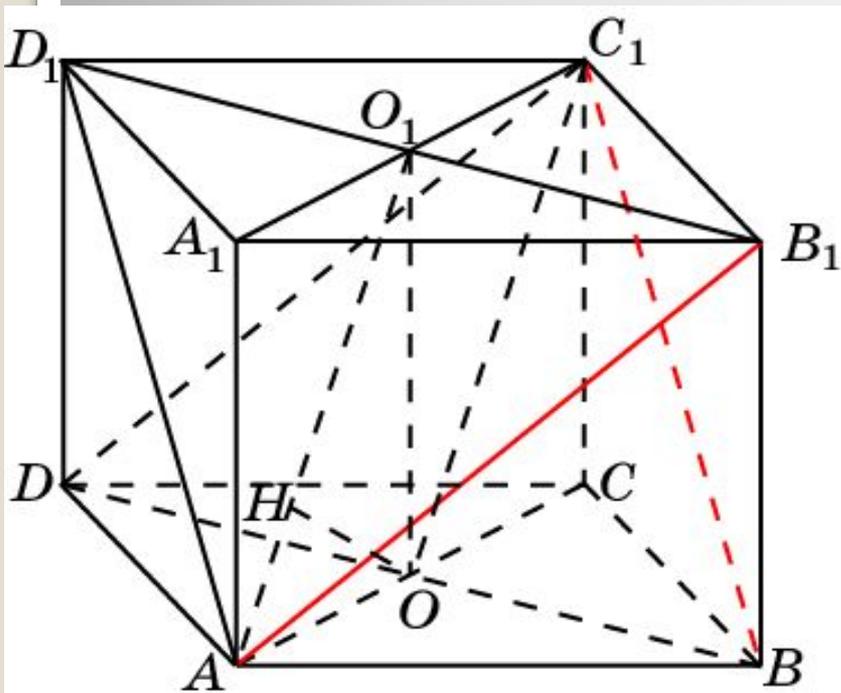
Следовательно, $DE = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Призма 6

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AB_1 и BC_1 .



Решение: Достроим призму до 4-х угольной призмы. Искомое расстояние будет равно расстоянию между параллельными плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 . Оно равно высоте OH прямоугольного треугольника AOO_1 , в котором

$$AO = \frac{1}{2}, OO_1 = 1, AO_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

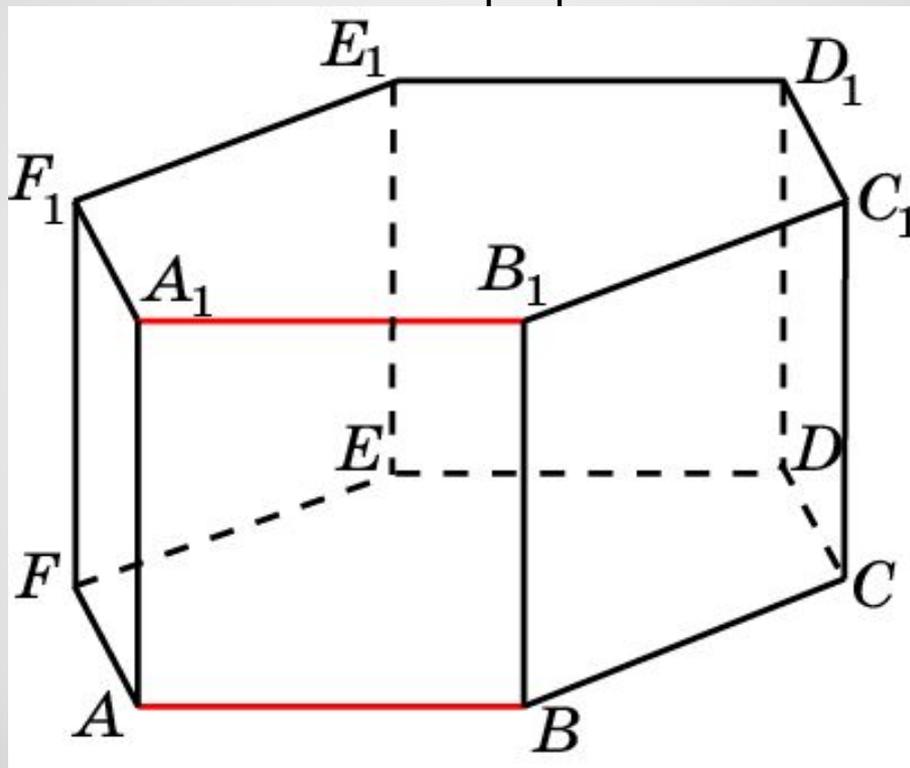
Эта высота равна $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Призма 7

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AB и A_1B_1 .

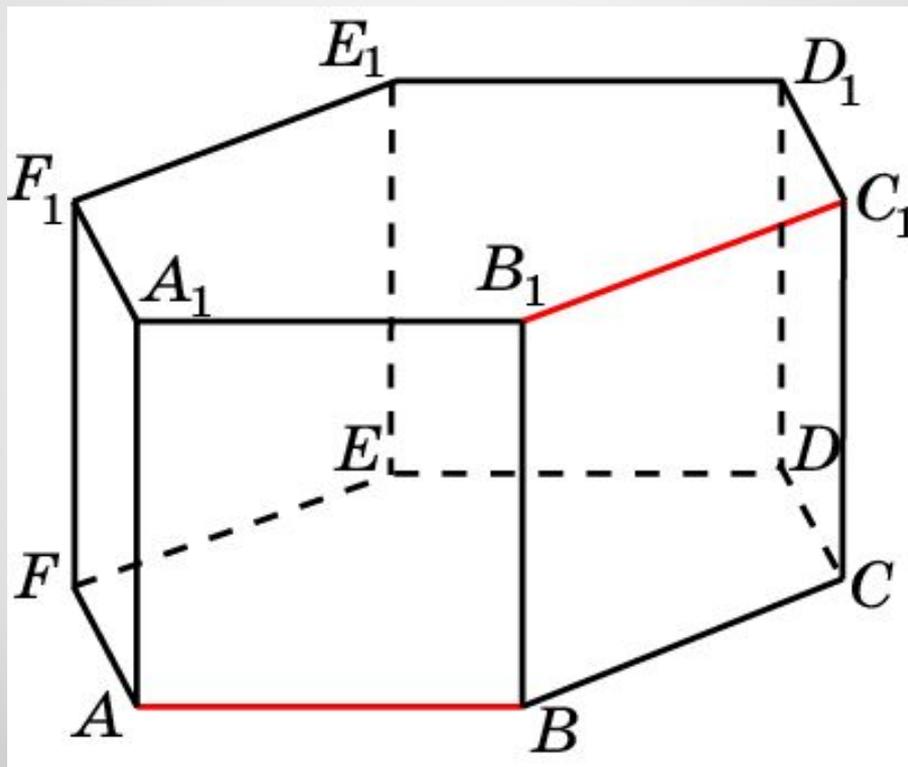


Ответ: 1.

Призма 8

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AB и B_1C_1 .

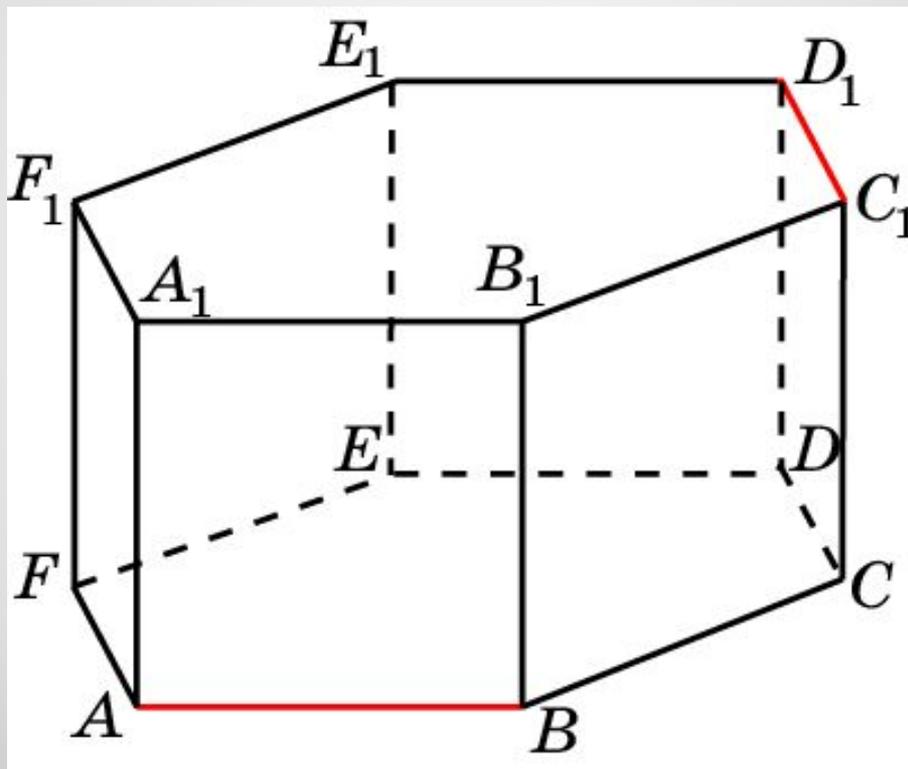


Ответ: 1.

Призма 9

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

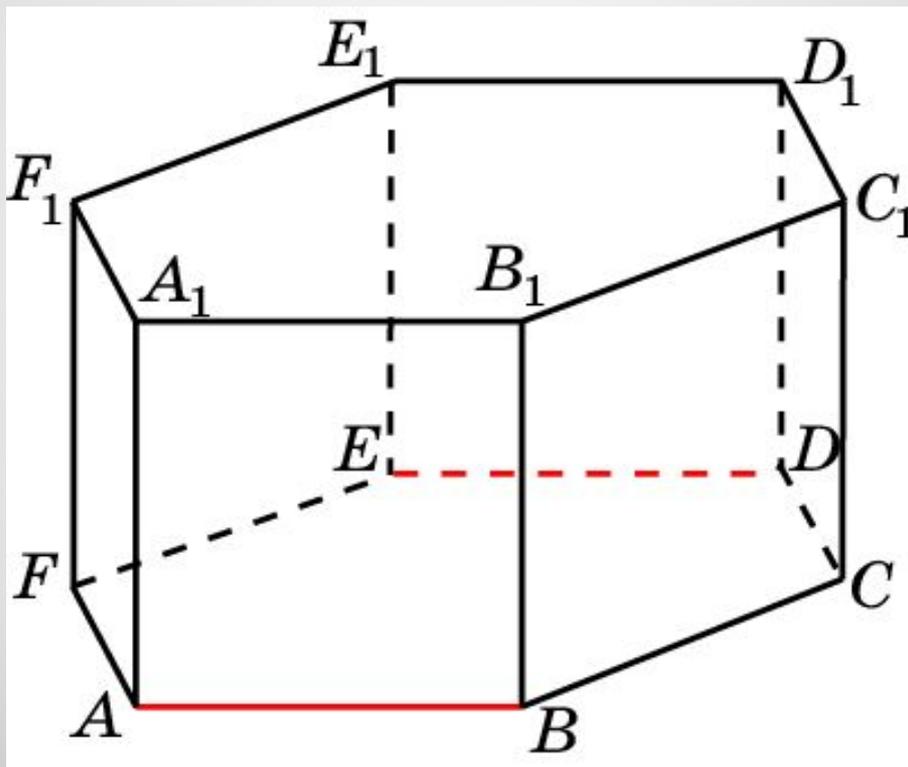
AB и C_1D_1 .



Ответ: 1.

Призма 10

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми: AB и DE .

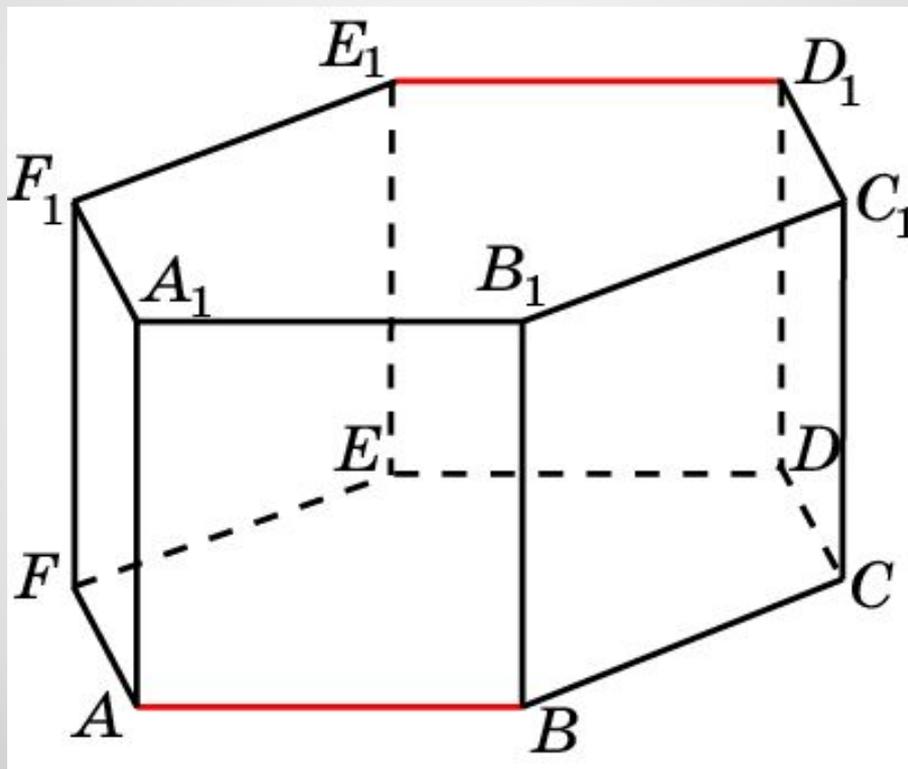


Ответ: $\sqrt{3}$.

Призма 11

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AB и D_1E_1 .

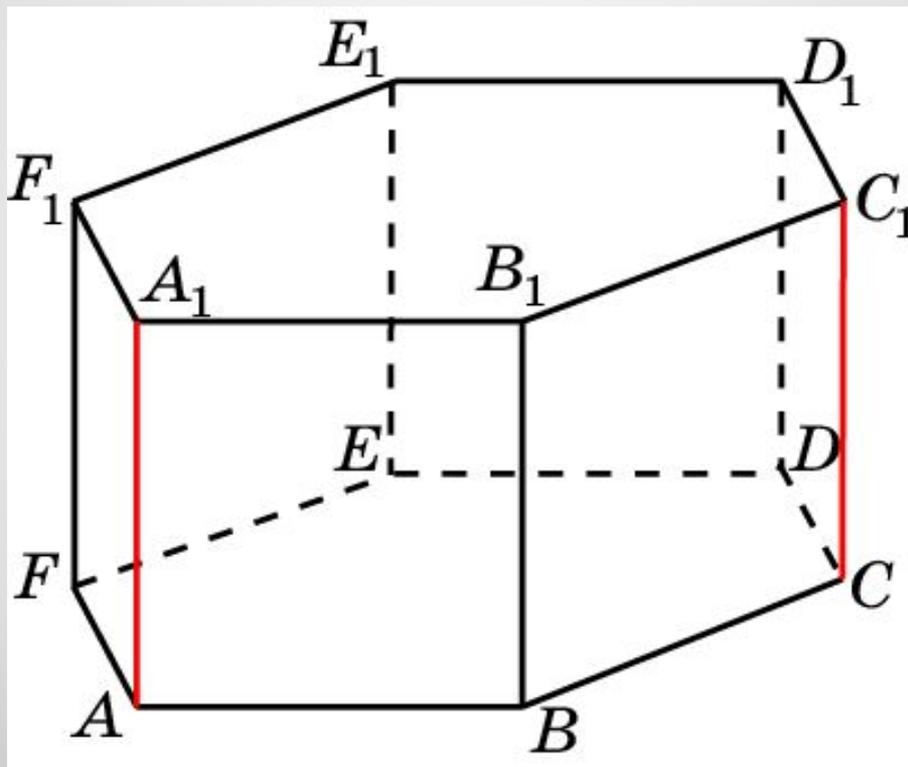


Ответ: 2.

Призма 12

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AA_1 и CC_1 .

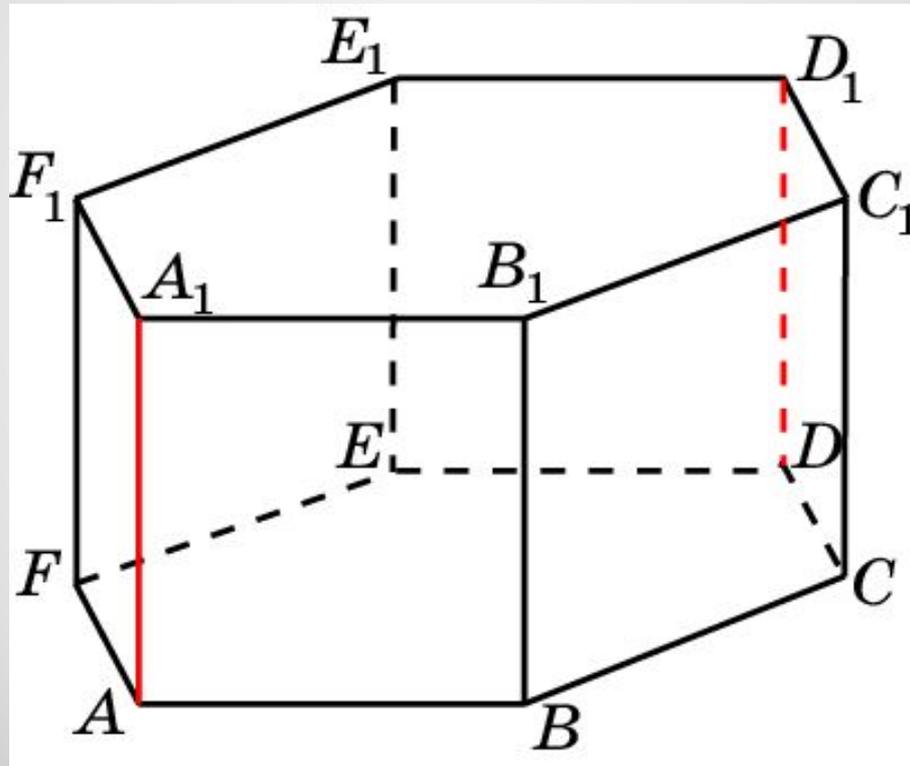


Ответ: $\sqrt{3}$.

Призма 13

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AA_1 и DD_1 .

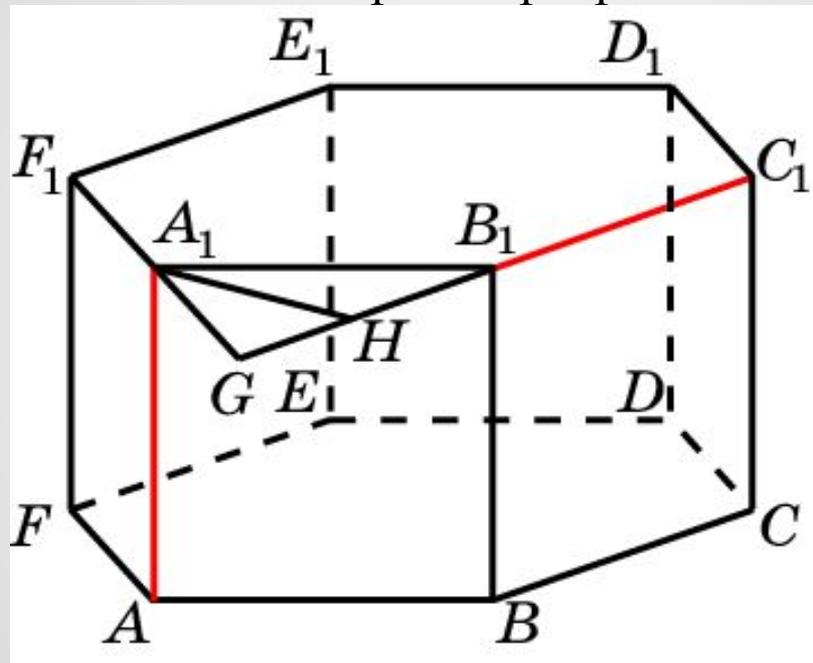


Ответ: 2.

Призма 14

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AA_1 и B_1C_1 .



Решение: Продолжим стороны B_1C_1 и A_1F_1 до пересечения в точке G . Треугольник A_1B_1G равносторонний. Его высота A_1H является искомым общим перпендикуляром. Его длина равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

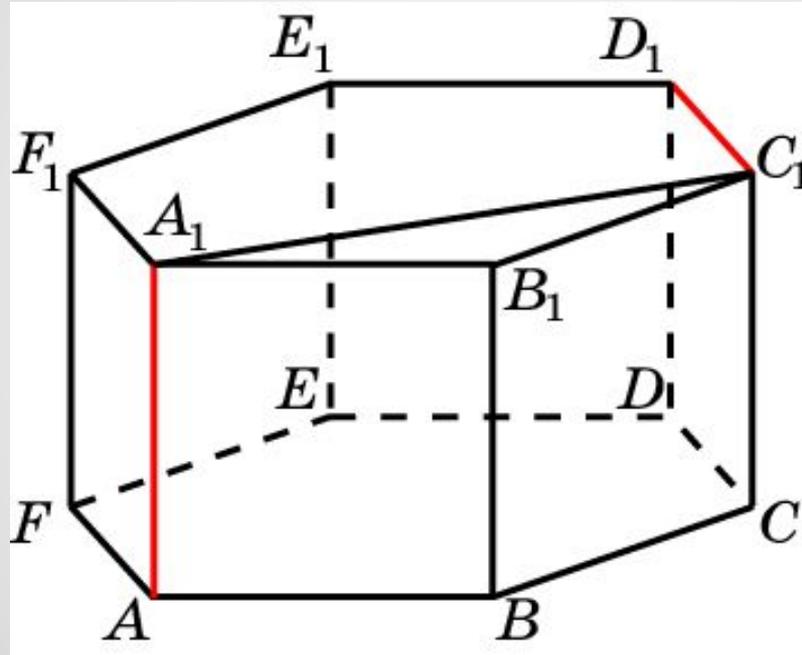
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Призма 15

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

$$AA_1 \text{ и } C_1D_1.$$



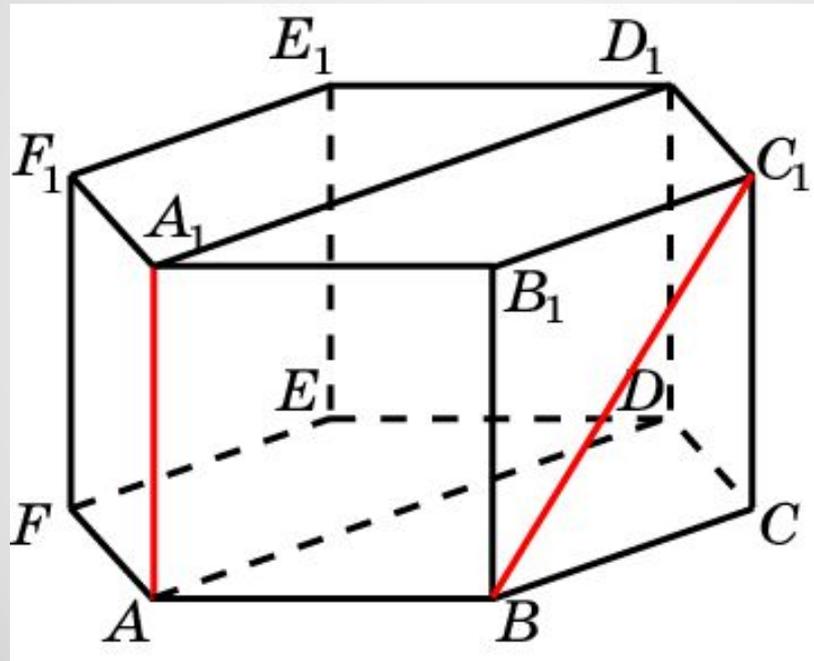
Решение: Искомым общим перпендикуляром является отрезок A_1C_1 . Его длина равна $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Призма 16

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

$$AA_1 \text{ и } BC_1.$$



Решение: Искомым расстоянием является расстояние между параллельными плоскостями ADD_1 и BCC_1 . Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

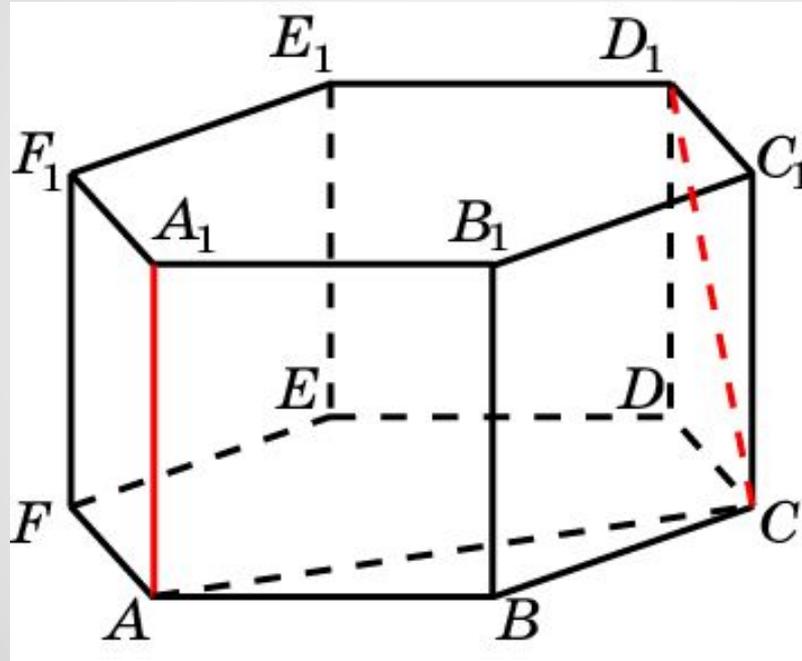
2

2

Призма 17

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

$$AA_1 \text{ и } CD_1.$$



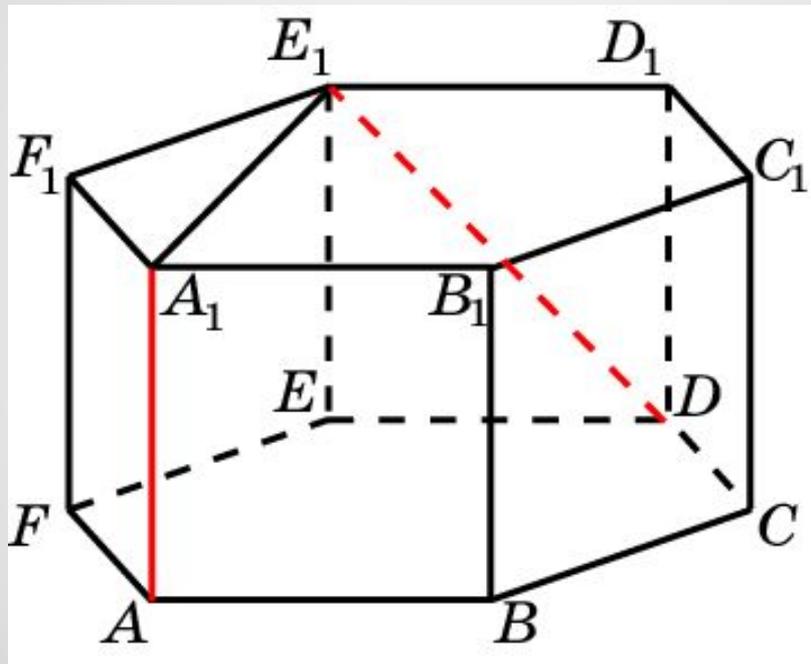
Решение: Искомым общим перпендикуляром является отрезок AC . Его длина равна $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Призма 18

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

$$AA_1 \text{ и } DE_1.$$



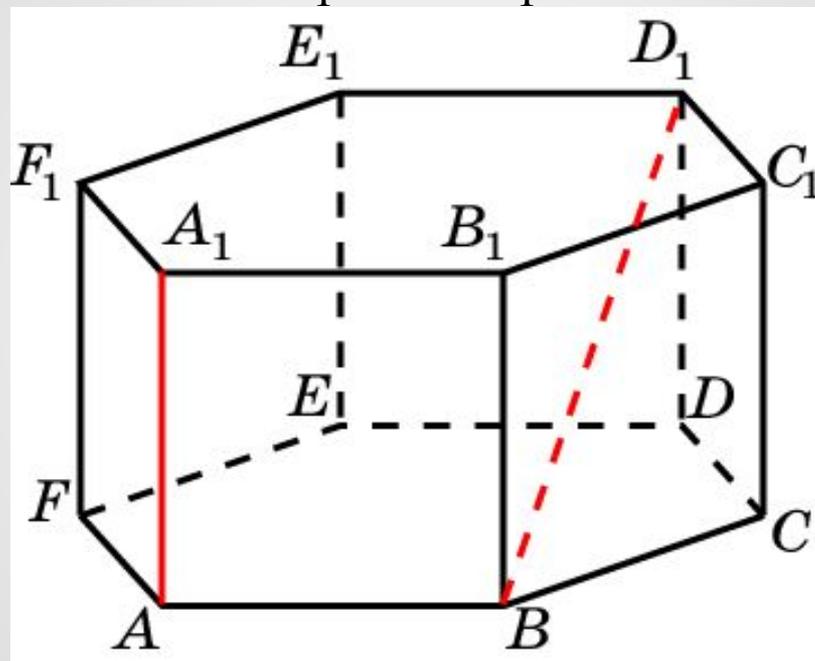
Решение: Искомым общим перпендикуляром является отрезок A_1E_1 . Его длина равна $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Призма 19

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

$$AA_1 \text{ и } BD_1.$$



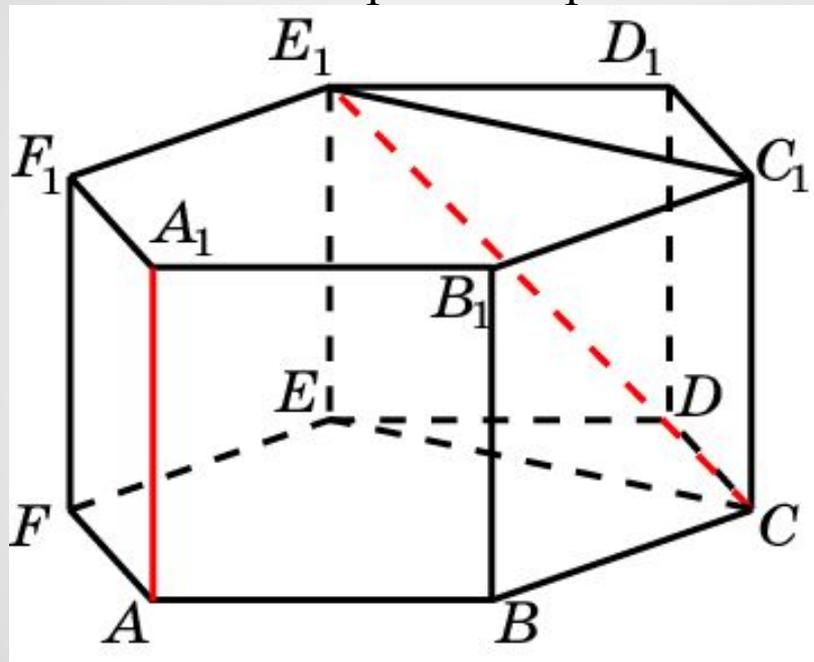
Решение: Искомым общим перпендикуляром является отрезок AB . Его длина равна 1.

Ответ: 1.

Призма 20

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AA_1 и CE_1 .



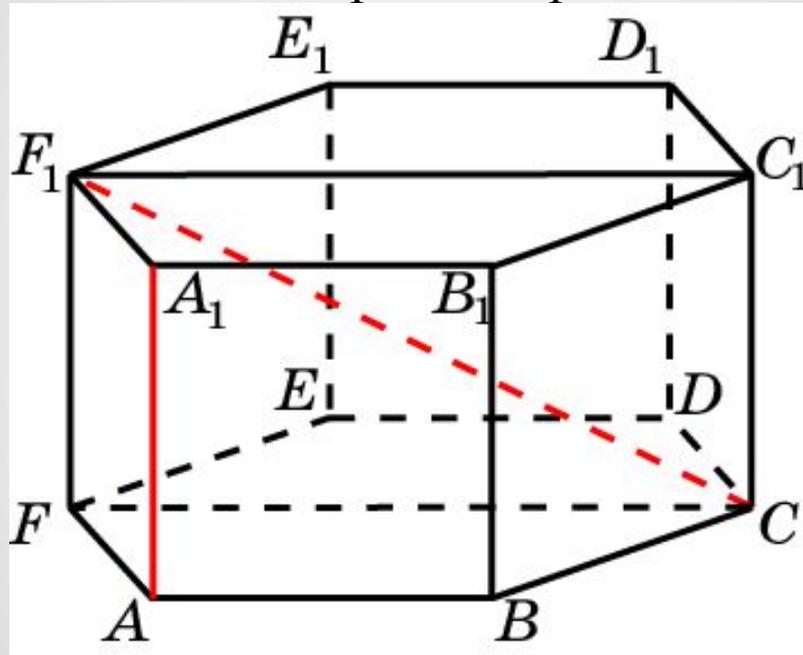
Решение: Искомым расстоянием является расстояние между прямой AA_1 и плоскостью CEE_1 . Оно равно $\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Призма 21

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

AA_1 и CF_1 .



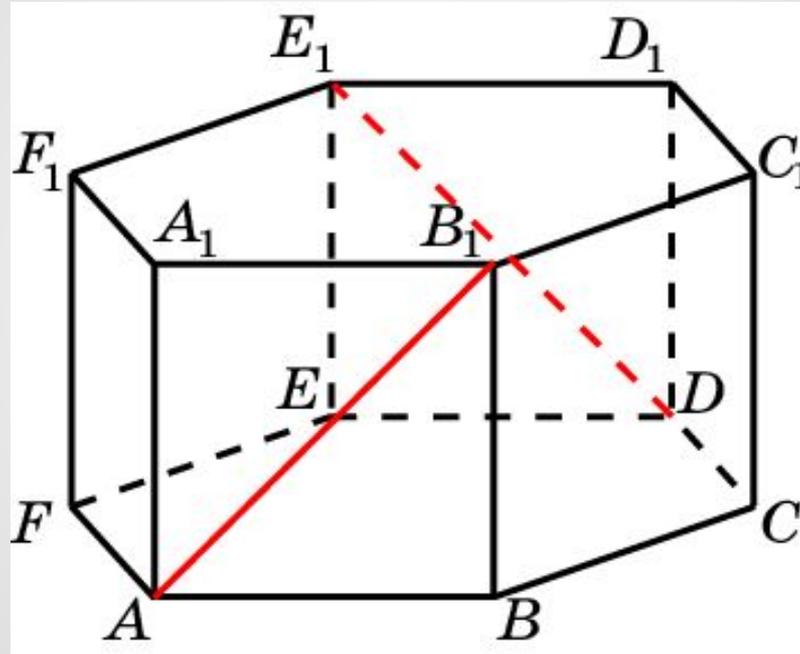
Решение: Искомым расстоянием является расстояние между прямой AA_1 и плоскостью CFF_1 . Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 22

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми:

$$AB_1 \text{ и } DE_1.$$



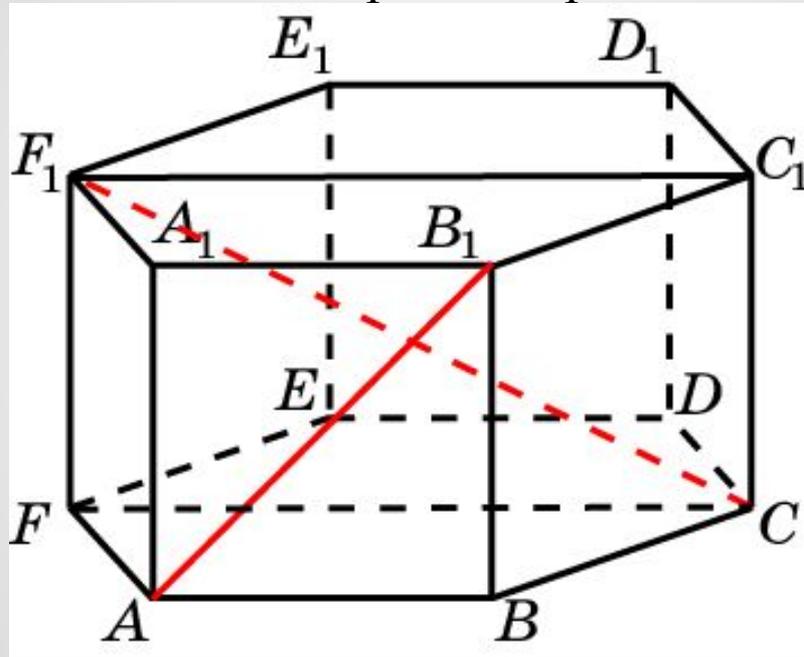
Решение: Искомым расстоянием является расстояние между параллельными плоскостями ABB_1 и DEE_1 . Расстояние между ними равно $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Призма 23

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми:

AB_1 и CF_1 .



Решение: Искомым расстоянием является расстояние между прямой AB_1 и плоскостью CFF_1 . Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

