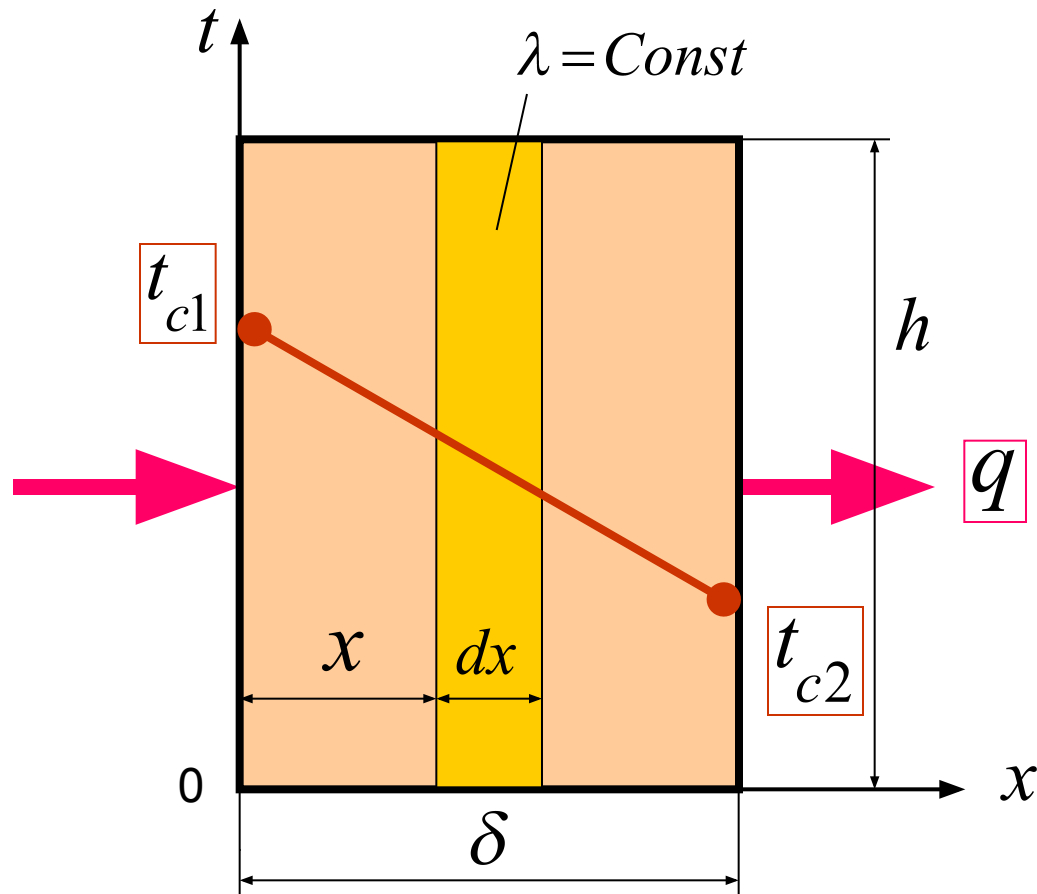


Теплотехника

Теплопроводность через плоскую
стенку

Теплопроводность через однослойную плоскую стенку при граничных условиях первого рода



Дифференциальное уравнение теплопроводности (частный случай)

Ранее мы получили **общий вид** дифференциального уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c \rho}$$

В частном случае, **для стационарного процесса** $\partial t / \partial \tau \neq 0$ при отсутствии внутренних источников теплоты $q_v = 0$:
из (1) при $a \neq 0$ следует: $\nabla^2 t = 0$,

или развернутое выражение оператора Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

Для бесконечной пластины: $h \gg \delta; b \gg \delta$ то есть:

$$\partial^2 t / \partial y^2 = 0; \partial^2 t / \partial z^2 = 0$$

Дифференциальное уравнение

теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (3)$$

Условия однозначности

Для рассматриваемого случая добавляем условия однозначности:

- **Геометрические:** вертикальная пластина $h \gg \delta; b \gg \delta$
- **Физические:** $\lambda = \text{Const}$;
- **Начальные:** для стационарного процесса не требуются,
- **Граничные условия I рода:** при $x=0 \quad t=t_{c1} = \text{Const}$;
при $x=\delta \quad t=t_{c2} = \text{Const}$.

Найти: $t = f(x) - ?; q = ?$

После первого интегрирования дифференциального уравнения (3) имеем: $\frac{dt}{dx} = c_1; \quad (5)$

После разделения переменных в (5): $dt = c_1 dx \quad (6)$

Температурное поле

После 2-го интегрирования: $t = c_1 x + c_2$. (7)

Для определения констант интегрирования
подставляем (4) в (7): при

$$x=0 \quad t = t_{c1} = c_2;$$

при $x=\delta \quad t = t_{c2} = c_1 \delta + c_2 = c_1 \delta + t_{c1}$;

откуда с учетом (5) имеем:
Откуда получаем:

$$c_1 = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta}. \quad (9)$$

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} + t_{c2}}{\delta} \cdot x.$$

Удельный тепловой поток

По закону Фурье:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx}, \quad (10)$$

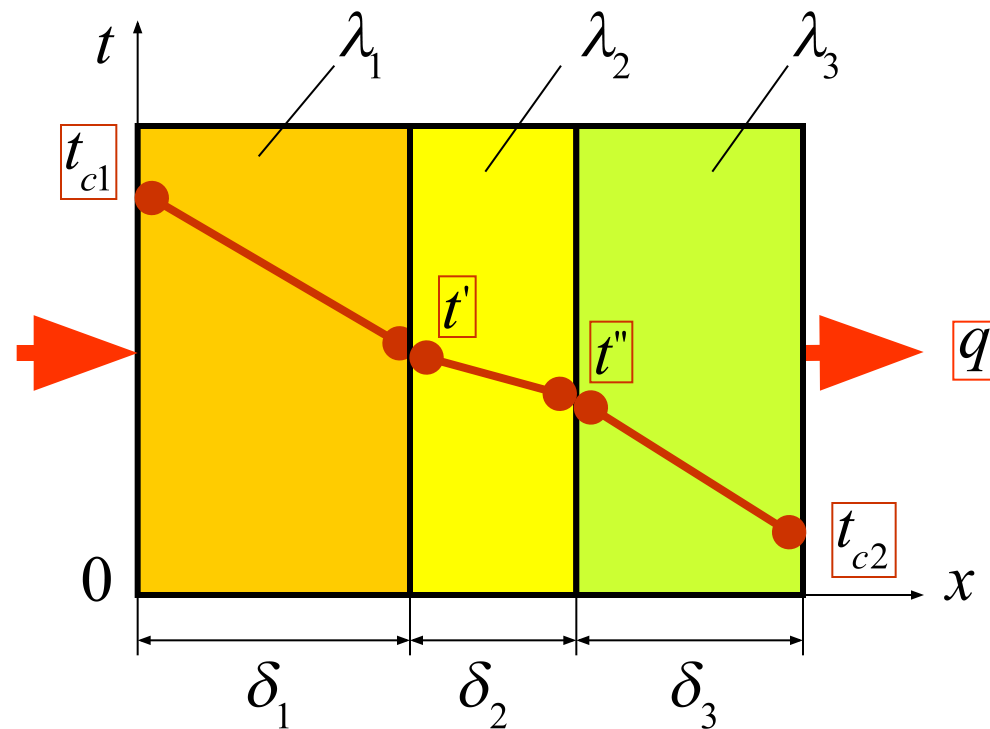
Подставляя (9) в (10), получим:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}),$$

или в форме закона Ома:

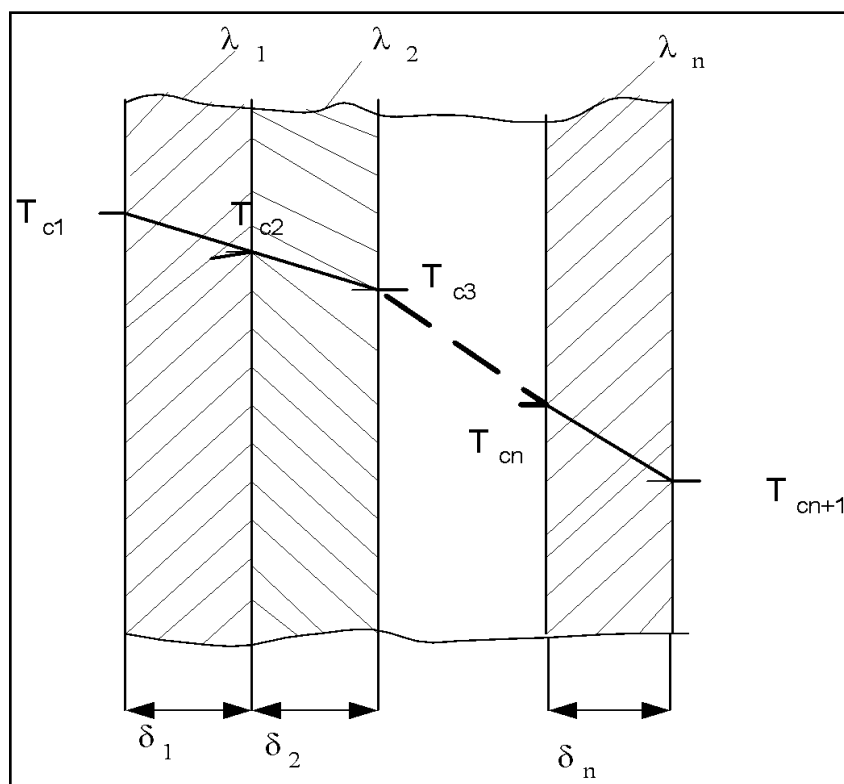
$$q = \frac{\Delta t}{R}.$$

Теплопроводность через трехслойную плоскую стенку



Теплопроводность через многослойную плоскую стенку при граничных условиях первого рода

Расчетная схема



Удельный тепловой поток

Теплообмен в каждом слое опишется формулой:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \lambda_1 \cdot \frac{t_{C1} - t_{C2}}{\delta_1}, \\ q_2 = \lambda_2 \cdot \frac{t_{C2} - t_{C3}}{\delta_2}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ q_n = \lambda_n \cdot \frac{t_{Cn} - t_{Cn-1}}{\delta_n}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Удельный тепловой поток

Так как теплообмен стационарный, то: $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ (2)

Для вывода формулы перепишем уравнение (1) с учетом уравнения (2), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{C1} - t_{C2} = \frac{q\delta_1}{\lambda_1}, \\ t_{C2} - t_{C3} = \frac{q\delta_2}{\lambda_2}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ t_{Cn} - t_{Cn+1} = \frac{q\delta_n}{\lambda_n}. \end{array} \right.$$

Удельный тепловой поток

Складываем части отдельно, получим:

$$\begin{aligned} t_{C1} - t_{C2} + t_{C2} - t_{C3} + \dots + t_{Cm} - t_{Cm+1} &= \\ = \frac{q\delta_1}{\lambda_1} + \frac{q\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{q\delta_n}{\lambda_n}. \end{aligned}$$

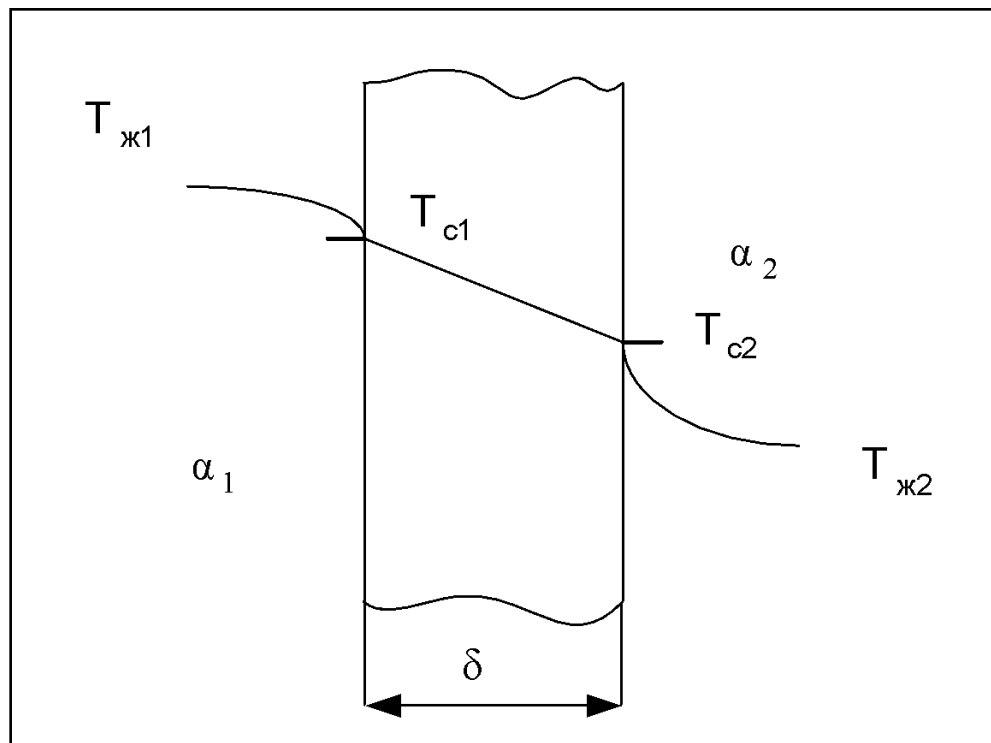
Удельный тепловой поток

Отсюда получим:

$$q = \frac{t_{C1} - t_{Cn+1}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \boxed{} + \frac{\delta_n}{\lambda_n}}$$

Теплообмен в плоской стенке при граничных условиях третьего рода.

Расчетная схема:



Удельный тепловой поток

Теплообмен на правой и левой поверхности стенки описется законом Ньютона – Рихмана:

$$q_1 = \alpha_1 (t_{ж1} - t_{c1});$$

$$q_2 = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2})$$

Теплообмен внутри стенки:

$$q_3 = \lambda \frac{t_{c2} - t_{c3}}{\delta}$$

Удельный тепловой поток

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

Разность температур:

$$\left. \begin{aligned} t_{ж1} - t_{c1} &= \frac{q}{\alpha_1}, \\ t_{ж2} - t_{c2} &= \frac{q}{\alpha_2}, \\ t_{c1} - t_{c2} &= \frac{q\delta}{\lambda}. \end{aligned} \right\}$$

Удельный тепловой поток

Складываем:

$$t_{ж1} - t_{c1} + t_{c2} - t_{ж2} + t_{c1} - t_{c2} =$$

$$= \left(\frac{q}{\alpha_1} + \frac{q}{\alpha_2} + \frac{q\delta}{\lambda} \right)$$

Удельный тепловой поток

Окончательно:

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Теплопроводность через многослойную плоскую стенку при граничных условиях третьего рода

Плотность теплового потока:

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Теплопроводность через однослойную плоскую стенку при граничных условиях второго рода

По закону Фурье:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \text{const}$$

Перепишем уравнение и проинтегрируем:

$$q dx = -\lambda dt,$$

$$q \int_0^x dx = -\lambda \int_{t_{C1}}^t dt$$

Теплопроводность через однослойную плоскую стенку при граничных условиях второго рода

Получим:

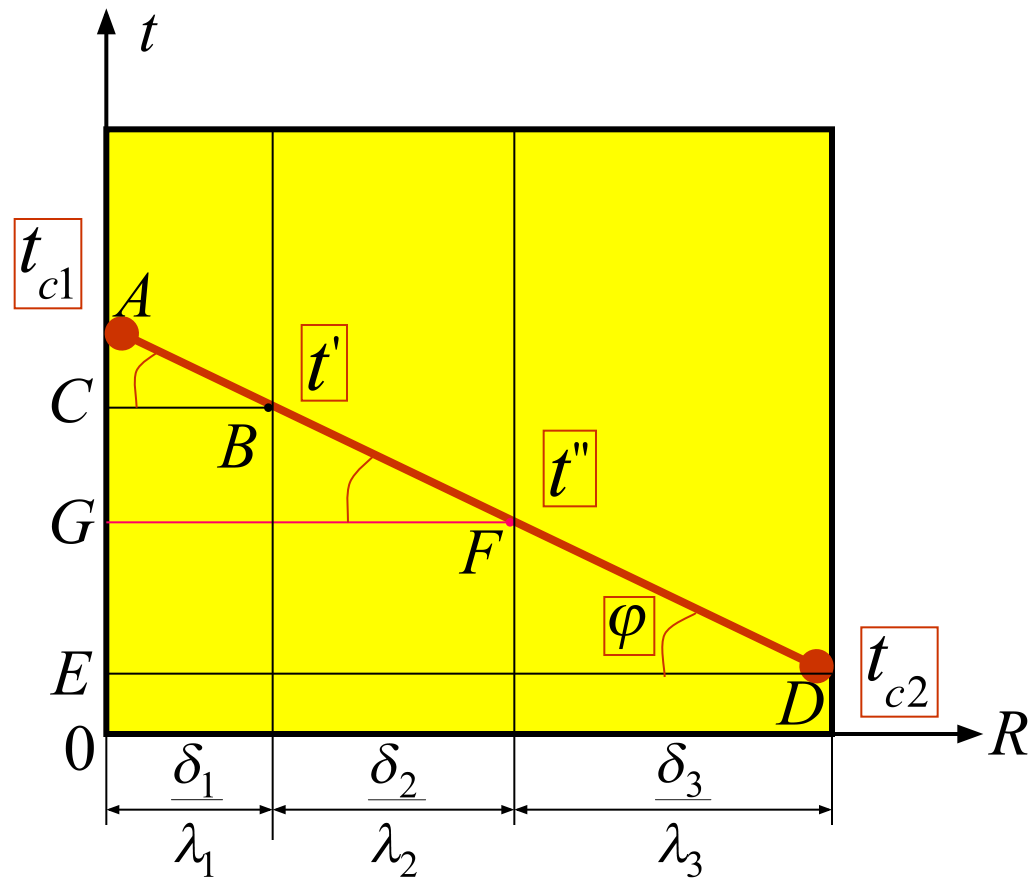
$$qx = -\lambda t + \lambda t_{c1},$$

выразим отсюда t :

$$t = \frac{1}{\lambda}(\lambda t_{c1} - qx) \Rightarrow$$

$$t = t_{c1} - \frac{qx}{\lambda}$$

Графический метод определения температур между слоями



Определение температур между слоями

Треугольники ABC и ADE подобны между собой по равенству трех углов. Из их подобия следует:

$$tg\varphi = \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{DE},$$

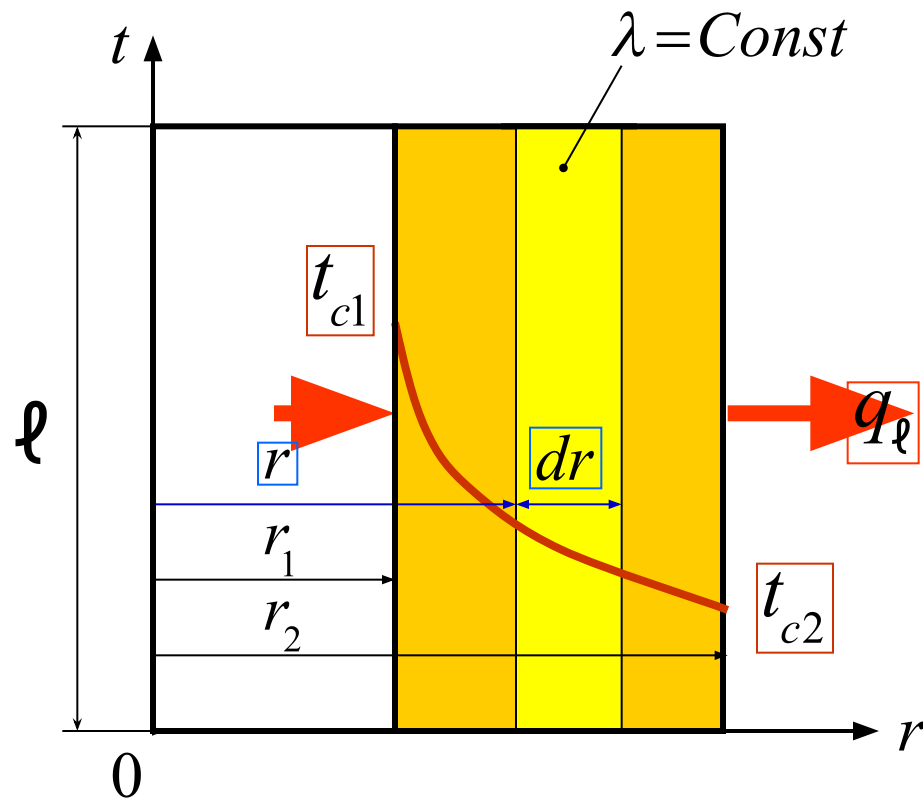
$$tg\varphi = \frac{t_{c1} - t'}{\frac{\delta_1}{\lambda_1}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} = q,$$

то есть $AC = t_{c1} - t'$ откуда находится температура t' .

Аналогично, из подобия треугольников AFG и ADE :

$$AG = t_{c1} - t'' \text{ откуда находится температура } t''.$$

Теплопроводность через однослойную цилиндрическую стенку



Дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндрической стенки

Общее выражение дифференциального уравнения теплопроводности:
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1)$$

Для стационарного процесса $\partial t / \partial \tau = 0$;
при отсутствии внутренних источников теплоты $q_v = 0$,
с учетом этих условий уравнение (1) примет вид $a \nabla^2 t = 0$

Но $a \neq 0$ тогда частный вид дифференциального уравнения теплопроводности: $\nabla^2 t = 0$

Или через развернутое выражение оператора Лапласа:

$$(2) \quad \nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

Условия однозначности

Добавляем условия однозначности:

- Геометрические условия:
 $l > r_2$ (бесконечная цилиндрическая стенка);
- Физические условия: $\lambda = \text{Const}$;
- Начальные условия: для стационарного процесса не требуются;
- Граничные условия I рода:

$$\text{при } r=r_1 \quad t=t_{c1} = \text{Const}; \quad (3)$$

$$\text{при } r=r_2 \quad t=t_{c2} = \text{Const}.$$

Преобразование дифференциального уравнения

В соответствии с геометрическими условиями однозначности, в бесконечной цилиндрической стенке температура не изменяется по координатам z и φ , тогда уравнение (2) примет вид:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0, \quad (4)$$

Найти:

$$t = f(r) - ?; Q = ?.$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} t(r_1) &= t_{C1}, \\ t(r_2) &= t_{C2}. \end{aligned} \right\}$$

Обозначим

$$U = \frac{dt}{dr},$$

Преобразование дифференциального уравнения. Решение

Уравнение (4) примет вид:

$$\frac{dU}{dr} + \frac{1}{r}U = 0$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dU}{U} = -\int \frac{dr}{r},$$

Получим:

$$\ln U = -\ln r + \ln C_1$$

Решение

Найдем из полученного выражения

$$\ln(Ur) = \ln C_1;$$

$$Ur = C_1$$

$$\frac{dt}{dr} r = C_1,$$

$$\int dt = C_1 \int \frac{dr}{r},$$

$$t = C_1 \ln r + C_2$$

Решение

Решение подчиним граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} t_{C1} &= r_1 \ln C_1 + C_2, \\ t_{C2} &= C_1 \ln r_2 + C_2. \end{aligned} \right\},$$

$$t_{C1} - t_{C2} = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2 - C_1 \cdot \ln r_2 - C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{C1} - t_{C2} = C_1 \cdot \ln \frac{r_1}{r_2}$$

Решение

Отсюда следует:

$$C_1 = \frac{t_{C1} - t_{C2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

$$C_2 = t_{C1} - \frac{t_{C1} - t_{C2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \cdot \ln r_1.$$

Решение примет вид:

$$t = t_{C1} - \frac{(t_{C1} - t_{C2}) \cdot \ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

Тепловой поток

По закону Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F,$$

где $F = 2\pi r l$

$$Q = \lambda \frac{(t_{C1} - t_{C2}) 2\pi l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{или} \quad Q = \frac{\pi (t_{C1} - t_{C2}) l}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

$$q_l = \frac{Q}{l}, \quad \frac{Вт}{м}$$

$$q_l = \frac{\pi (t_{C1} - t_{C2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

Теплообмен в цилиндрической стенке при граничных условиях второго рода

По закону Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} 2\pi r l = \text{const}$$

Проинтегрируем данное выражение:

$$Q \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} = -2\pi\lambda l \int_{t_{c1}}^t dt$$

получим:

$$Q \ln \frac{r}{r_1} = -2\pi\lambda l (t - t_{c1})$$

$$t = t_{c1} - \frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln \frac{r}{r_1}$$

Теплообмен при граничных условиях третьего рода

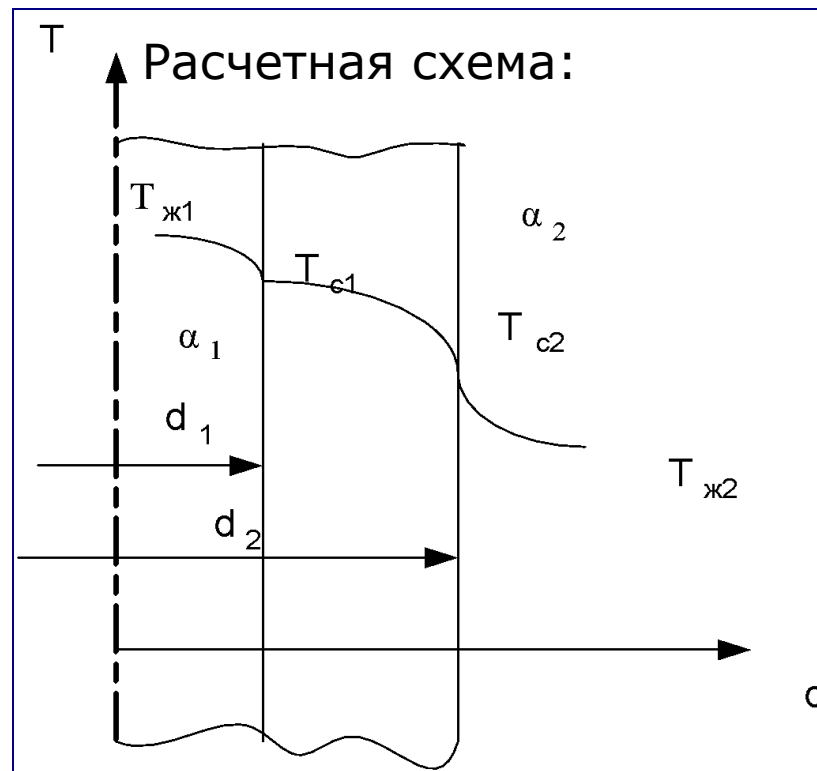
Теплообмен на внутренней и наружной поверхности стенки описывается законом Ньютона – Рихмана:

$$q_{\text{ж1}} = \alpha_{\text{с}} (t_{\text{ж1}} - t_{\text{с1}}) \pi d_1$$

$$q_{\text{с2}} = \alpha_{\text{ж}} (t_{\text{с2}} - t_{\text{ж2}}) \pi d_2$$

Внутри стенки:

$$q_{\text{л3}} = \frac{\pi (t_{\text{с1}} - t_{\text{с2}})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}.$$



Теплообмен при граничных условиях третьего рода

Так как теплообмен стационарный, то

$$q_{l1} = q_{l2} = q_{l3} = q_l$$

$$\left. \begin{aligned} t_{ж1} - t_{c1} &= \frac{q_l}{\pi d_1 \alpha_1}, \\ t_{ж2} - t_{c2} &= \frac{q_l}{\pi d_2 \alpha_2}, \\ t_{c1} - t_{c2} &= q_l \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}. \end{aligned} \right\}$$

Теплообмен при граничных условиях третьего рода

Получим:

$$\begin{aligned} t_{ж1} - t_{C1} + t_{C2} - t_{ж2} + t_{C1} - t_{C2} = \\ = q_l \left(\frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \frac{1}{\pi d_2 \alpha_2} + \frac{1}{2\pi \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} \right) \end{aligned}$$

Уравнение теплопередачи через цилиндрическую стенку:

$$q_l = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)}$$

Теплообмен при граничных условиях третьего рода

Линейное термическое сопротивление теплопередачи через цилиндрическую стенку:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 B_l} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \frac{мК}{Вт}$$

Тогда уравнение теплопередачи:

$$q_l = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{R_l}$$

Теплообмен при граничных условиях третьего рода

Полный тепловой поток:

$$Q_{\text{тр}} = \frac{\pi (t_{\text{ж}1} - t_{\text{ж}2}) l}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}},$$

$$Q = q_l \cdot l$$

Теплообмен при граничных условиях третьего рода

Линейный коэффициент теплопередачи через цилиндрическую стенку:

$$k_l = \frac{1}{R_l}, \frac{Вт}{м \cdot К}$$

Тогда уравнение теплопередачи:

$$q_{\text{ж}} = \pi k_{\text{ж}} (t_1 - t_2)$$

Плотность теплового потока

$$q = \frac{Q}{F}, \quad F_1 = \pi d_1 l; \quad F_2 = \pi d_2 l.$$

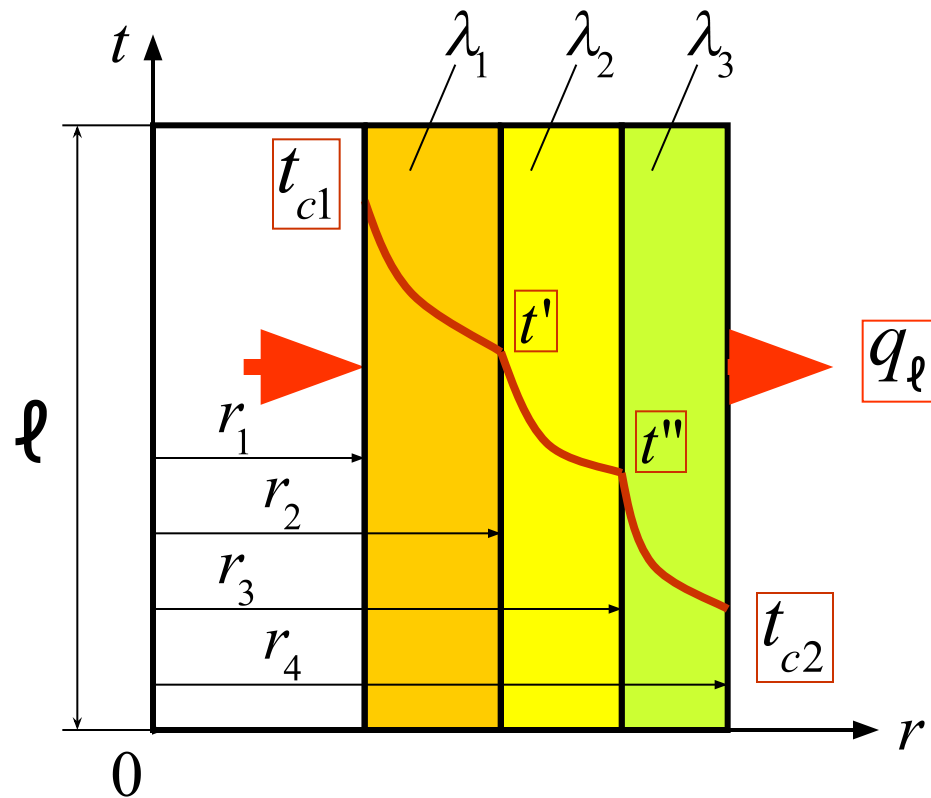
На внутренней поверхности:

$$q_1 = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_1}{\alpha_2 d_2}},$$

На внешней поверхности:

$$q_2 = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{d_2}{\alpha_1 d_1} + \frac{d_2}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Теплопроводность через трехслойную цилиндрическую стенку



Теплопроводность через многослойную цилиндрическую стенку

Уравнение теплопередачи:

$$Q_{\text{ст}} = \frac{\pi (t_{\text{ж1}} - t_{\text{ж2}})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \quad /$$

Критический диаметр цилиндрической стенки

Линейное термическое сопротивление теплопередачи через цилиндрическую стенку:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 B_1 m} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \frac{мК}{Вт}$$

Исследуем функцию вида:

$$R_l = R_l(d_2).$$

Функция непрерывна и дифференцируема.

$$\frac{dR_l}{d(d_2)} = \frac{1}{2\pi d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0.$$

Критический диаметр цилиндрической стенки

Найдем критическую точку.

$$\frac{1}{d_2} \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right) = 0 \Rightarrow d_2 = \frac{2\lambda}{\alpha_2}$$

Критическая точка:

$$d_2 = \frac{2\lambda}{\alpha_2}$$

$$\frac{d^2 R_l}{d(d_2)^2} = -\frac{1}{2\lambda d_2^2} + \frac{2}{\alpha_2 d_2^3} = \frac{1}{d_2^2} \left(\frac{2}{\alpha_2 d_2} - \frac{1}{2\lambda} \right)$$

$$\frac{2}{\alpha_2 d_2} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{2\alpha_2}{\alpha_2 2\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2\lambda} > 0$$

Критический диаметр тепловой изоляции

Теплоизоляционными называются материалы, теплопроводность которых не превышает величины $0,25 \text{ Вт/(мК)}$.

- **Естественная изоляция (природная):** асбест, слюда, пробка.
- **Предварительно обработанная:** асбослюда, шлаковата, стекловата, пенопласт, пеношлакобетон.

Теплоизоляционные свойства последним из перечисленных материалов придает наличие в них мелких воздушных пузырьков или прослоек воздуха. В них из-за малости размеров, конвекция отсутствует и теплота передается только теплопроводностью, порядок которой для воздуха при атмосферных условиях порядка $0,025 \text{ Вт/(мК)}$, то есть на порядок ниже величины, приведенной выше для теплоизоляции.

Термическое сопротивление теплопередачи через изолированный трубопровод

Линейное термическое сопротивление теплопередачи через двухслойную цилиндрическую стенку:

$$R_{\ell} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_{из}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_{из}}.$$

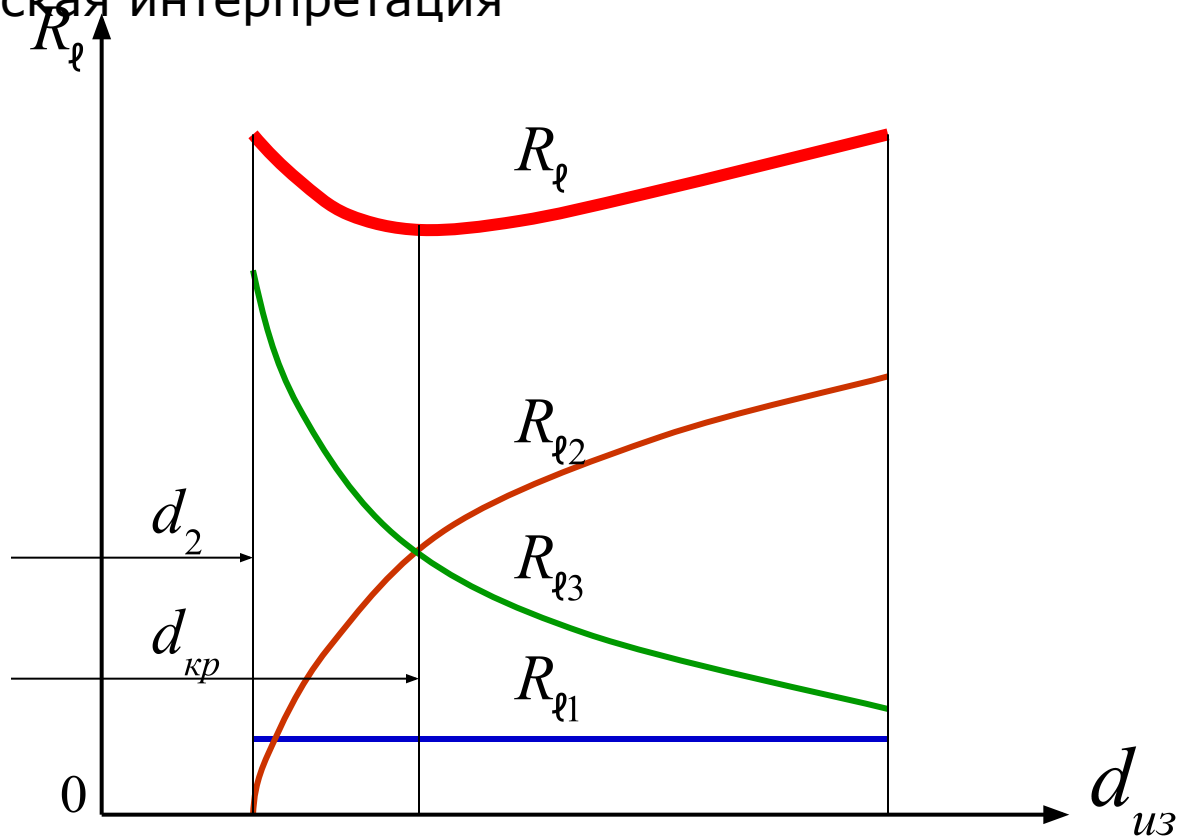
В выражении (1): $R_{\ell 1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} = Const;$

при: $d_{из} = var$ $R_{\ell 2} + R_{\ell 3} = \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_{из}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_{из}} = var.$

Из (3) видно, что с увеличением диаметра изоляции $d_{из}$ термическое сопротивление $R_{\ell 2}$ растет, а $R_{\ell 3}$ падает.

Зависимость линейного термического сопротивления от диаметра изоляции

Геометрическая интерпретация



Исследование функции (3) на минимум

Из предыдущих двух слайдов следует, что **минимальному термическому сопротивлению при $d_{кр}$ соответствуют максимальные теплопотери.**

Для определения критического диаметра изоляции надо исследовать функцию (3) на минимум, а именно:

$$\frac{d}{d(d_{из})} \left[\frac{1}{2\lambda_{из}} \ln\left(\frac{d_{из}}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{из}} \right] = 0$$

или в виде

$$\frac{d}{d(d_{из})} \left[\frac{1}{2\lambda_{из}} (\ln d_{из} - \ln d_2) + \frac{1}{\alpha_2 d_{из}} \right] = 0.$$

Тогда при

$$\lambda_{из} = Const; d_2 = Const; \alpha_2 = Const,$$

и с учетом

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; (\ln d_2)' = 0,$$

Выбор эффективной изоляции трубопроводов

$$\frac{1}{2\lambda_{из}} \frac{1}{d_{кр}} - \frac{1}{\alpha_2 d_{кр}^2} = 0.$$

После сокращения на $d_{кр}$: $\frac{1}{2\lambda_{из}} - \frac{1}{\alpha_2 d_{кр}} = 0,$

или $\alpha_2 d_{кр} - 2\lambda_{из} = 0$, откуда **критический диаметр изоляции:**

$$d_{кр} = \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2}.$$

Из следующего слайда видно, что при $d_{кр} < d_2$ - изоляция эффективная

$$\Delta q_{\ell 2} < \Delta q_{\ell 1}$$

а при $d_{кр} > d_2$ - малоэффективная.

Критический диаметр изоляции

