

Пример решения транспортной задачи (открытая модель)

Исследование операций

Задача

Выпуск продукции трех заводов A_1, A_2, A_3 составляет 260, 240, 300 т. Потребности четырех потребителей B_1, B_2, B_3, B_4 равны 300, 200, 250, 100 т.

Известно:

- 1) продукция завода A_1 не требуется пункту B_4 ;
- 2) с завода A_3 потребителю B_2 должно быть доставлено груза не более 50 т.

Тарифы перевозок c_{ij} (в ден/ед.) из A_i в B_j приведены в матрице:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Составить оптимальный план перевозок груза.

Решение:

Так как $a_1+a_2+a_3 = 260+240+300 = 800$,

$$b_1+b_2+b_3+b_4 = 300+200+250+100 = 850,$$

т.е. $(b_1+b_2+b_3+b_4)-(a_1+a_2+a_3) = 50$, то введем фиктивного поставщика A_4 с запасами $a_4=50$ и нулевыми тарифами.

Получили **закрытую** модель транспортной задачи.

Учтем условия:

- 1) В клетку A_1B_4 запишем число M (блокируем).
- 2) В столбце B_2 запишем потребности $b_2=50$, остальные $b_2^*=150$ заносим в дополнительный столбец B_2^* .
Все тарифы, как в B_2 , но в $A_3B_2^*$ ставим число M .

Решение задачи методом наименьшей стоимости

	B1	B2	B3	B4	B2*	a _i
A1	110 ³ 4 шаг	X ⁴	X ⁶	M ¹	150 ⁴ 2 шаг	260
A2	X ⁵	X ⁷	240 ² 3 шаг	X ³	X ⁷	240
A3	190 ⁴ 5 шаг	50 ³ 1 шаг	X ⁸	60 ⁶ 6 шаг	M ³	300
A4	X ⁰	X ⁰	10 ⁰ 7 шаг	40 ⁰ 8 шаг	X ⁰	50
b _j	300	50	250	100	150	850

Опорное решение задачи

$$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 0 \\ 190 & 50 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

*Проверим опорный план X_1
на оптимальность*

**Составим систему уравнений
для заполненных ячеек:**

$$u_1 + v_1 = 3 \quad \text{Пусть } u_1 = 0, \text{ тогда: } v_1 = 3$$

$$u_1 + v_2^* = 4 \quad v_2^* = 4$$

$$u_2 + v_3 = 2 \quad \text{Так как } v_3 = 5, \text{ то } u_2 = -3$$

$$u_3 + v_1 = 4 \quad \text{Так как } v_1 = 3, \text{ то } u_3 = 1$$

$$u_3 + v_2 = 3 \quad \text{Так как } u_3 = 1, \text{ то } v_2 = 2$$

$$u_3 + v_4 = 6 \quad \text{Так как } u_3 = 1, \text{ то } v_4 = 5$$

$$u_4 + v_3 = 0 \quad \text{Так как } u_4 = -5, \text{ то } v_3 = 5$$

$$u_4 + v_4 = 0 \quad \text{Так как } v_4 = 5, \text{ то } u_4 = -5$$

Итак, $u_1 = 0, u_2 = -3, u_3 = 1, u_4 = -5,$

$v_1 = 3, v_2 = 2, v_2^* = 4, v_3 = 5, v_4 = 5$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 0 \\ 190 & 50 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим второе условие теоремы для незаполненных строк

$$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 0 \\ 190 & 50 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = 0, u_2 = -3, u_3 = 1, u_4 = -5, \\ v_1 = 3, v_2 = 2, v_2^* = 4, v_3 = 5, v_4 = 5$$

$$\begin{aligned} u_1 + v_2^* &= 4 \leq C_{12} = 4 & + \\ u_1 + v_3 &= 5 \leq C_{13} = 6 & + \\ u_1 + v_4 &= 5 > C_{14} = 1 & (-4) \\ u_2 + v_1 &= 0 \leq C_{21} = 5 & + \\ u_2 + v_2 &= -1 \leq C_{22} = 7 & + \\ u_2 + v_4 &= 2 \leq C_{24} = 3 & + \\ u_3 + v_3 &= 6 \leq C_{33} = 8 & + \\ u_4 + v_1 &= -2 \leq C_{41} = 0 & + \\ u_4 + v_2 &= -3 \leq C_{42} = 0 & + \end{aligned}$$

*Но ячейка A1B4 заблокирована, следовательно,
план X1 оптимальный*

Оптимальное решение:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 0 \\ 190 & 50 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Z_{min} &= 110*3 + 150*4 + 240*2 + 190*4 + 50*3 + 60*6 + \\ &+ 10*0 + 40*0 = 2680 \end{aligned}$$

Используемая литература:

- Борзунова Т.Л., Барыкин М.П. , Данилов Е.А. Соловьева О.Ю. - Математическое моделирование: учебное пособие/ВолгГТУ, - Волгоград, 2008.
- Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике – СПб: Питер, 2000.