

Пример решения транспортной задачи (закрытая модель)

Исследование операций

Задача

Составить оптимальный план перевозок груза из трех пунктов отправления с запасами 30, 48, 24 т в четыре пункта назначения с потребностями 18, 27, 42, 15 т. Тарифы перевозок c_{ij} (в ден/ед.) из $(i=1,2,3)$ в $(j=1,...,4)$ приведены в матрице

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

*Рассмотрим методы
построения опорных планов
(опорного решения) ТЗ*

Метод северо-западного угла

- Заполняют клетку A_1B_1 , (левый верхний угол), поставив в него $\min(a_1b_1)$. Если $\min$ совпадает с A_1 , то запасы пункта A_1 считают исчерпанными и переходят к удовлетворению потребностей b_1 начиная с ячейки A_2B_1 .
- Затем переходят к заполнению клетки A_2B_2 . Перемещаясь так по диагонали, доходят до последней клетки A_mB_n . При этом все грузы будут исчерпаны, и потребности пунктов удовлетворены.
- **Замечание:** если на некотором шаге исчерпаны запасы, то переходим к удовлетворению потребностей как это было описано выше. Если же были удовлетворены потребности, то приступают к исчерпыванию запасов аналогичным способом.

Решение задачи методом северо-западного угла

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	18 13 1 шаг	12 7 2 шаг	X 11	X 5	30 12
A_2	X 11	15 8 3 шаг	33 13 4 шаг	X 7	48 33
A_3	X 6	X 10	9 12 5 шаг	15 9 6 шаг	24 15
b_j	18	27 15	42 9	15	102 102

Опорное решение задачи

$$X = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Метод аппроксимации Фогеля

- 1. На каждом шаге находят разности между двумя наименьшими тарифами (даже если они одинаковые) во всех строках и столбцах, записывая их в дополнительные столбец и строку таблицы;
- 2. Из найденных разностей выбирают максимальную и заполняют клетку, которой соответствует данная разность.
- Процесс продолжается до тех пор, пока все грузы не будут развезены по потребителям.

Решение задачи методом аппроксимации Фогеля

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	Δc
A_1	X 13	X 7	15 11 6 шаг	15 5 2 шаг	30 15	1A
A_2	X 11	27 8 3 шаг	21 13 4 шаг	X 7	48 21	1B
A_3	18 6 1 шаг	X 10	6 12 5 шаг	X 9	24 6	1C
b_j	18	27	42	15	102 102	
Δc	B	B	B	B		

Опорное решение задачи

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод минимальной стоимости для нахождения опорного плана

Предполагает заполнение на каждом шаге клеток с минимальным тарифом, что даст, очевидно, меньшие суммарные затраты на перевозку груза.

Решение задачи методом наименьшей стоимости

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	X 13 1 шаг	15 7 3 шаг	X 11	15 5 1 шаг	30 15
A_2	X 11	12 8 4 шаг	36 13 6 шаг	X 7	48 36
A_3	18 6 2 шаг	X 10	6 12 5 шаг	X 9	24 6
b_j	18	27 12	42 36	15	102 102

Опорное решение задачи

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов

*базируется на следующей теореме
(признак оптимальности решения):*

Для заполненных ячеек таблицы должно выполняться
условие: $u_i + v_j = C_{ij}$

Для незаполненных ячеек условие: $u_i + v_j \leq C_{ij}$

(причем количество заполненных ячеек в опорном
плане должно быть равно $n+m-1$, где m – число
поставщиков, n – число потребителей)

*Проверим план, полученный с помощью
метода наименьшей стоимости, на
оптимальность*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad n+m-1=4+3-1=6$$

Должно быть заполнено 6 ячеек.

Реально заполненных ячеек тоже 6.

*Составим систему уравнений
для заполненных ячеек:*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$u_1 + v_2 = 7$$

Полагая $u_1 = 0$, найдем: $v_2 = 7$

$$u_1 + v_4 = 5$$

$$v_4 = 5$$

$$u_2 + v_2 = 8$$

Так как $v_2 = 7$, то $u_2 = 1$

$$u_2 + v_3 = 13$$

Так как $u_2 = 1$, то $v_3 = 12$

$$u_3 + v_1 = 6$$

Так как $u_3 = 0$, то $v_1 = 6$

$$u_3 + v_3 = 12$$

Так как $v_3 = 12$, то $u_3 = 0$

Итак, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, $v_1 = 6$, $v_2 = 7$, $v_3 = 12$, $v_4 = 5$

Проверим второе условие теоремы для незаполненных ячеек

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0, \\ v_1 = 6, v_2 = 7, v_3 = 12, v_4 = 5$$

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 6 \leq C_{11} = 13 & + \\ u_1 + v_3 &= 12 > C_{13} = 11 & (-1) \\ u_2 + v_1 &= 7 \leq C_{21} = 11 & + \\ u_2 + v_4 &= 6 \leq C_{24} = 7 & + \\ u_3 + v_2 &= 7 \leq C_{32} = 10 & + \\ u_3 + v_4 &= 5 \leq C_{34} = 9 & + \end{aligned}$$

*План X_1 не оптимальный, поэтому необходимо
перераспределение грузов*

Перераспределение грузов

осуществляется с помощью *циклического сдвига*

Цикл - ломанная, вершины которой находятся в заполненных ячейках, кроме одной. Это одна вершина должна находиться в незаполненной ячейке, для которой $u_i + v_j > C_{ij}$.

При этом звенья ломанной должны удовлетворять *следующим условиям:*

1. Параллельность строкам и столбцам
2. В каждой строке и каждом столбце не более двух вершин

Построение цикла

Построим цикл:

$$u_1 + v_3 = 12 > c_{13} = 11$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Всем вершинам ломанной припишем $+$ или $-$,
начиная с проблемной ячейки:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 0+ & 15 \\ 0 & +12 & 36- & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Циклический сдвиг

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 0+ & 15 \\ 0 & +12 & 36- & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

В свободную клетку помещаем груз величиной α , равной минимальному значению из всех чисел в отрицательных клетках цикла. **Min (15,36)=15**

Сдвиг по циклу: Во все положительные клетки прибавляем α , из отрицательных — вычитаем α .

Новый план:
$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим новый план на оптимальность

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

*Составим систему уравнений
для заполненных ячеек:*

$$u_1 + v_3 = 11 \quad \text{Полагая } u_1 = 0, \text{ найдем: } v_3 = 11$$

$$u_1 + v_4 = 5 \quad v_4 = 5$$

$$u_2 + v_2 = 8 \quad \text{Так как } u_2 = 2, \text{ то } v_2 = 6$$

$$u_2 + v_3 = 13 \quad \text{Так как } v_3 = 11, \text{ то } u_2 = 2$$

$$u_3 + v_1 = 6 \quad \text{Так как } u_3 = 1, \text{ то } v_1 = 5$$

$$u_3 + v_3 = 12 \quad \text{Так как } v_3 = 11, \text{ то } u_3 = 1$$

Итак, $u_1 = 0, u_2 = 2, u_3 = 1, v_1 = 5, v_2 = 6, v_3 = 11, v_4 = 5$

Проверим второе условие теоремы для незаполненных ячеек

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = 0, u_2 = 2, u_3 = 1,$$

$$v_1 = 5, v_2 = 6, v_3 = 11, v_4 = 5$$

$$u_1 + v_1 = 5 \leq C_{11} = 13 \quad +$$

$$u_1 + v_2 = 6 \leq C_{12} = 7 \quad +$$

$$u_2 + v_1 = 7 \leq C_{21} = 11 \quad +$$

$$u_2 + v_4 = 7 \leq C_{24} = 7 \quad +$$

$$u_3 + v_2 = 7 \leq C_{32} = 10 \quad +$$

$$u_3 + v_4 = 6 \leq C_{34} = 9 \quad +$$

План X_2 оптимальный

Оптимальное решение:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$Z_{min} = 15 * 11 + 15 * 5 + 27 * 8 + 21 * 13 + 18 * 6 + 6 * 12 = 909$$

Используемая литература:

- Борзунова Т.Л., Барыкин М.П. , Данилов Е.А. Соловьева О.Ю. - Математическое моделирование: учебное пособие/ВолгГТУ, - Волгоград, 2008.
- Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике – СПб: Питер, 2000.