

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ТРЕМ НЕКОМПЛАНАРНЫМ ВЕКТОРАМ

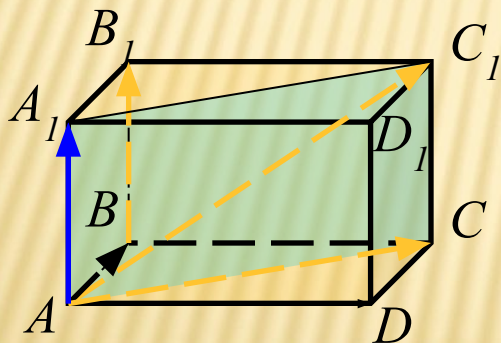
МОБУ «СОШ N°78»

учитель математики
Ягодникова Наталья Олеговна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛАНАРНЫХ ВЕКТОРОВ

Компланарные векторы – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.

Пример:



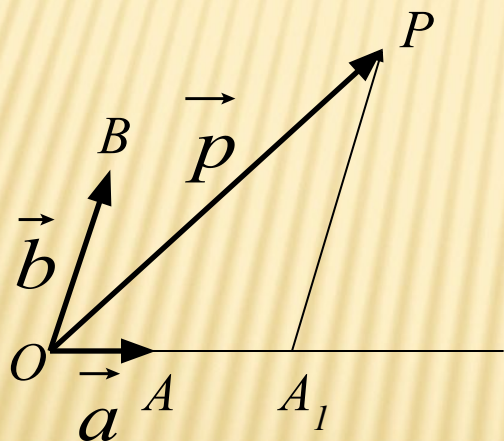
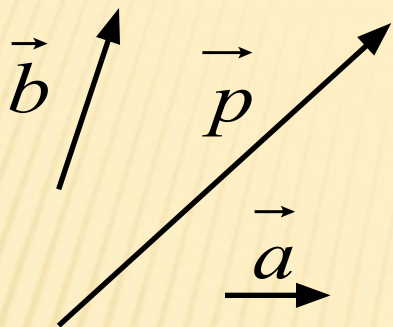
$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$ – компланарны, т.к.
 $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$, а векторы $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$
лежат в плоскости (AA_1C)

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ДВУМ НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ ВЕКТОРАМ

□ Теорема.

- Любой вектор можно разложить по двум
- данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ



Дано :

$\vec{a}, \vec{b}$ – неколлинеарные
векторы

Доказать :

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Доказательство :

1) Пусть $\vec{p}$ коллинеарен $\vec{b}$

Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$, где y –
некоторое число.

Следовательно,

$$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$

т.е. $\vec{p}$ разложен по
векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

2) $\vec{r}$ коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$

Отметим O – произвольную точку.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} \quad \overrightarrow{OP} = \vec{r}$$

$$PA_1 \parallel BO \quad PA_1 \cap OA = A_1$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P} \text{ (по правилу треугольника)}$$

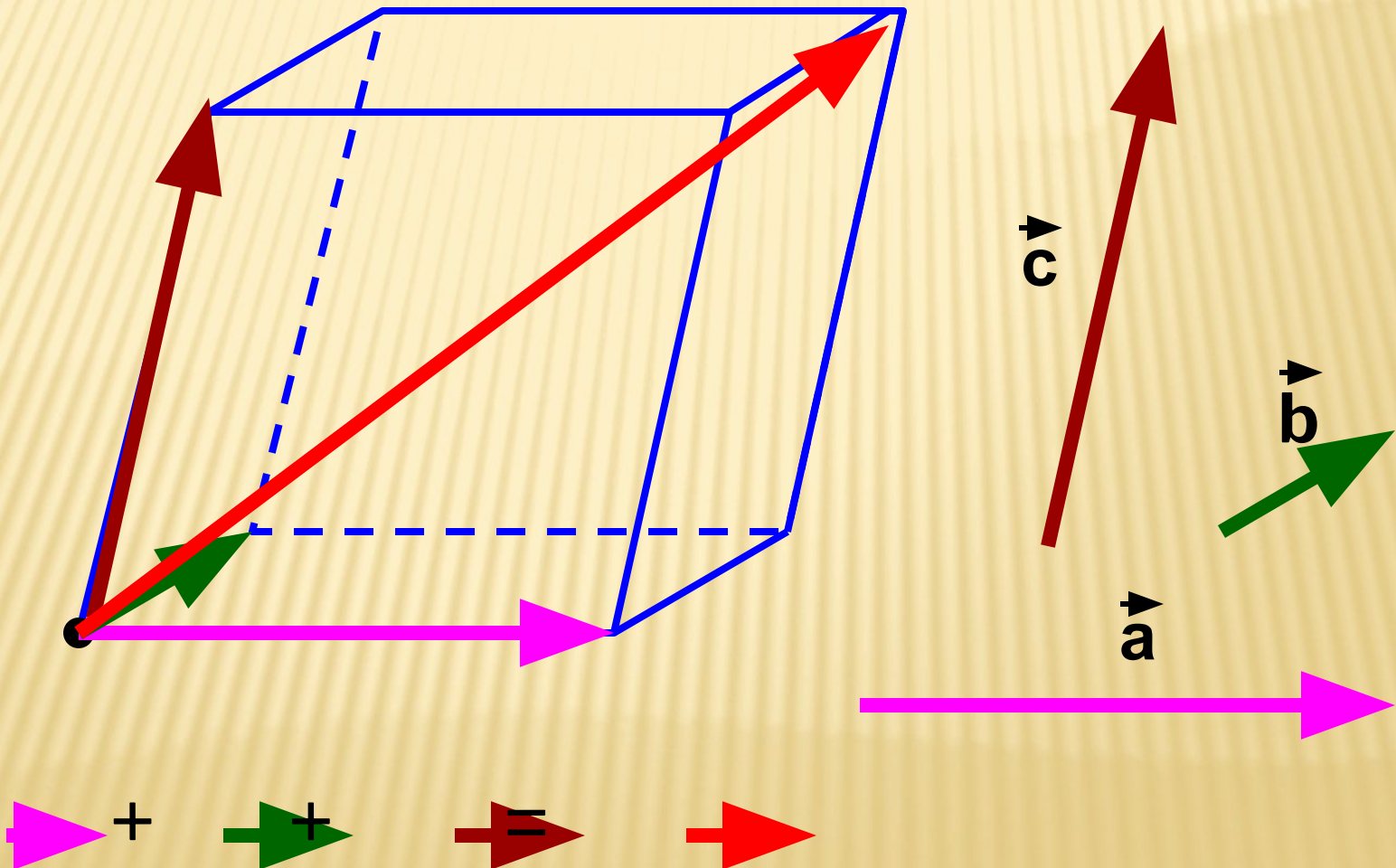
но: $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1P}$ коллинеарны $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно,

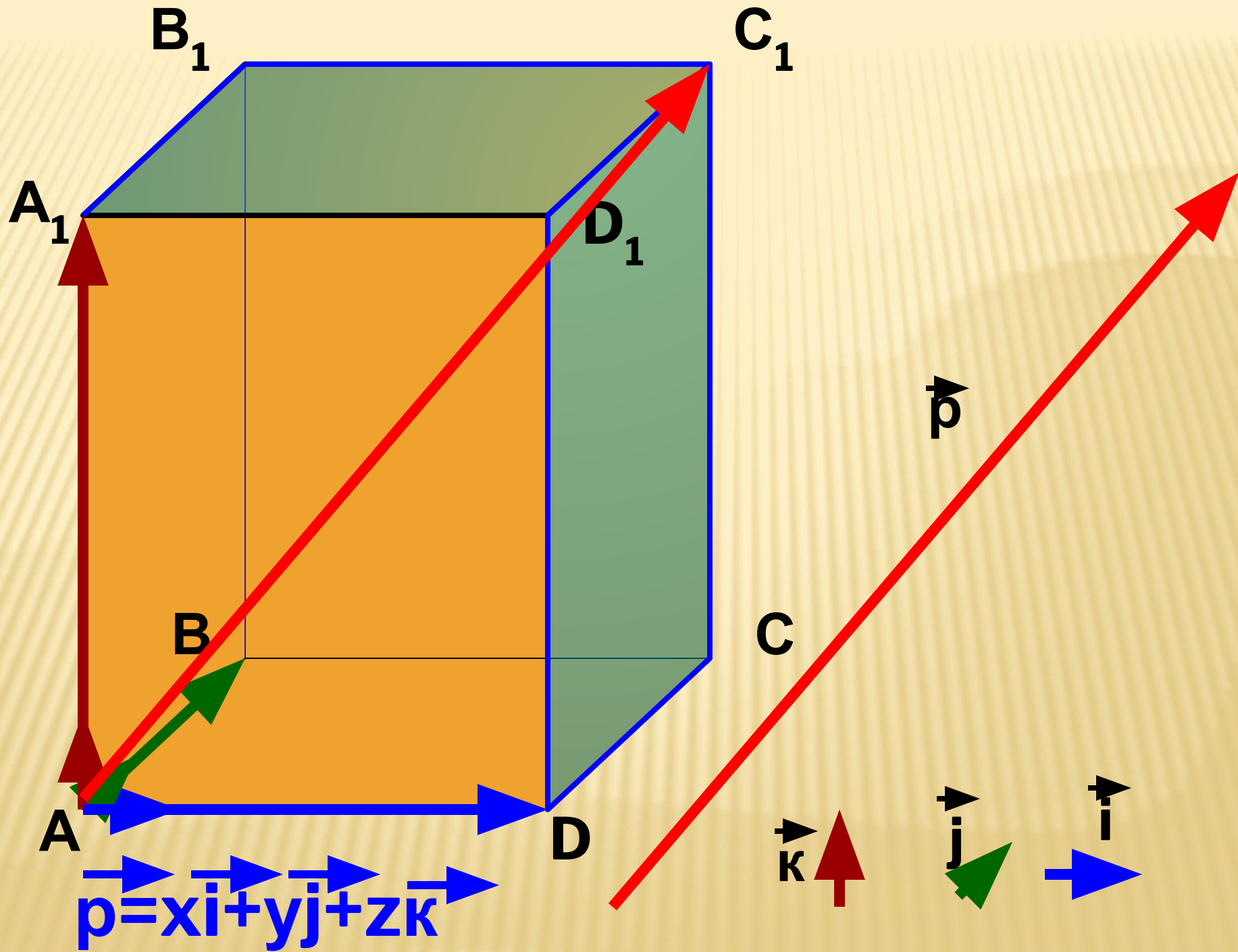
$$\text{значит } \overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}, \quad \overrightarrow{A_1P} = y\vec{b},$$

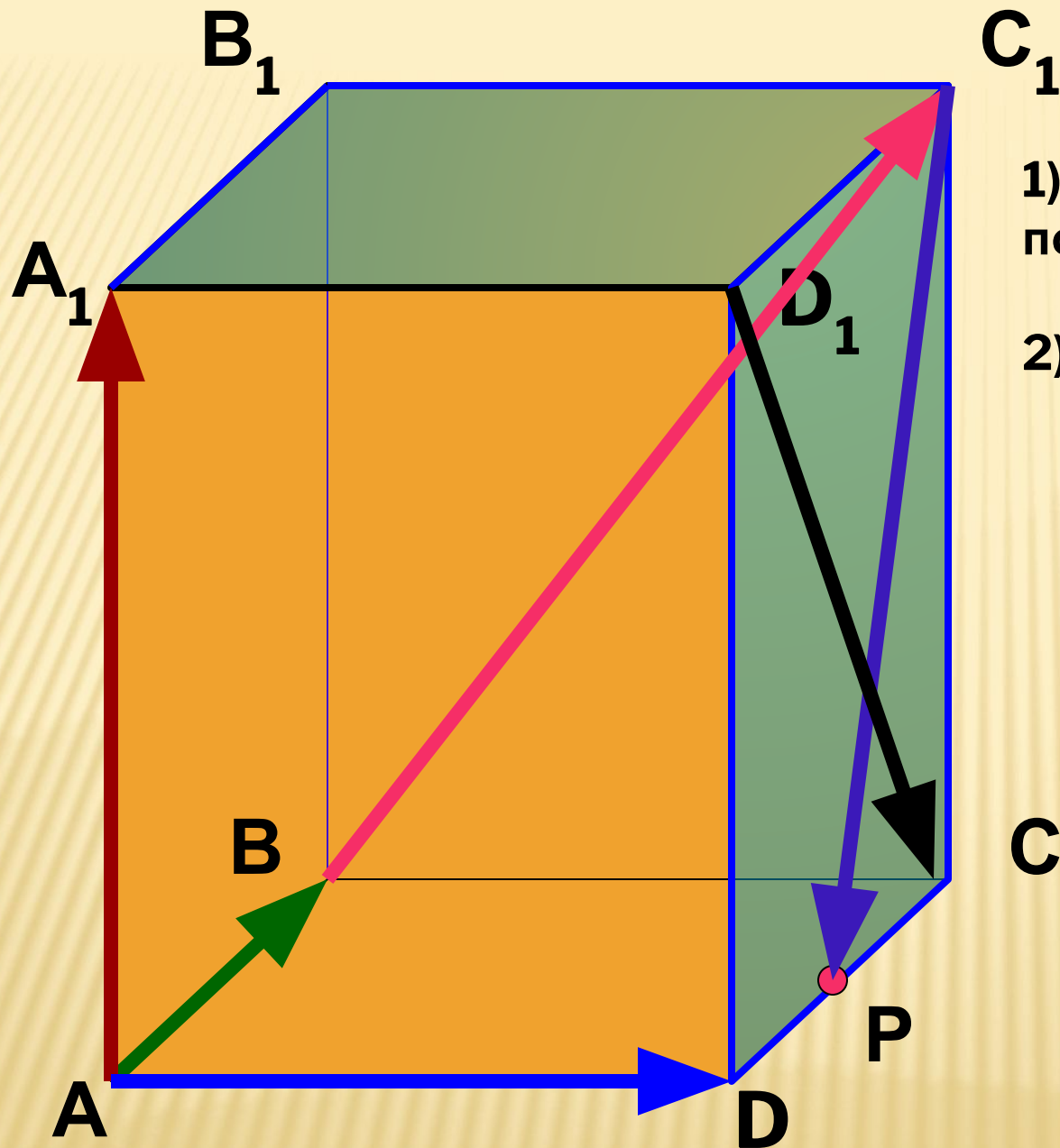
следовательно $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т.е. $\vec{r}$ разложен по $\vec{a}$ и $\vec{b}$

ч.т.д.

Правило параллелепипеда.







1). Разложить $\vec{BC_1}$ и $\vec{D_1C}$
по векторам $\vec{BC_1}$ и $\vec{D_1C}$

2). Найти длину $\vec{C_1P}$, если
 $|\vec{AA_1}|=8$, $|\vec{AB}|=12$

$\vec{a}=\vec{AB}$, $\vec{b}=\vec{AD}$, $\vec{c}=\vec{AA_1}$, P – середина CD.

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ТРЕМ НЕКОМПЛАНАРНЫМ ВЕКТОРАМ

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где x, y, z – некоторые числа, то говорят, что вектор

$\vec{p}$ разложен по векторам

, и $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

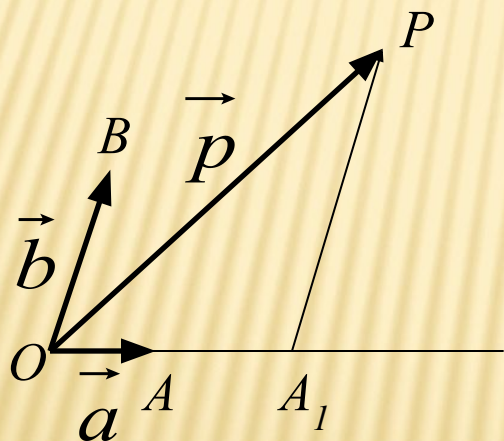
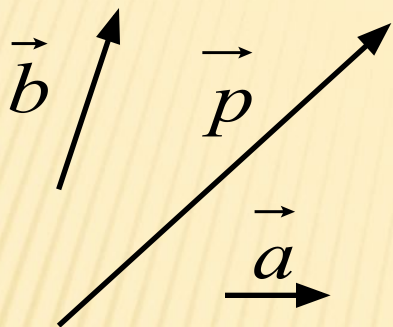
Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

Теорема

Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ



Дано :

$\vec{a}, \vec{b}$ – неколлинеарные
векторы

Доказать :

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Доказательство :

1) Пусть $\vec{p}$ коллинеарен $\vec{b}$

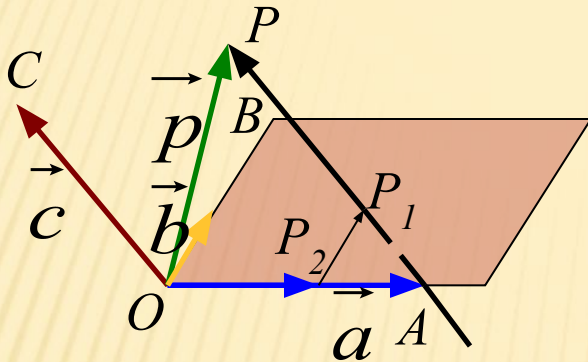
Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$, где y –
некоторое число.

Следовательно,

$$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$

т.е. $\vec{p}$ разложен по
векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ



Дано :

$\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ –

некомпланрные
векторы

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Доказательство :

O – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \vec{OB} = \vec{b} \quad \vec{OC} = \vec{c} \quad \vec{OP} = \vec{p}$$

$$AP \parallel OC \quad AP \cap (AOB) = P_1 \quad P_2P_1 \parallel OB$$

$$\vec{OP} = \vec{OP}_2 + \vec{P}_2P_1 + \vec{P}_1P$$

$\vec{OP}_2$, и $\vec{OA}$, $\vec{P}_2P_1$ и $\vec{OB}$, $\vec{P}_1P$, $\vec{OC}$ – коллинеарны

$$\vec{OP}_2 = x \cdot \vec{OA}, \quad \vec{P}_2P_1 = y \cdot \vec{OB}, \quad \vec{P}_1P = z \cdot \vec{OC}$$

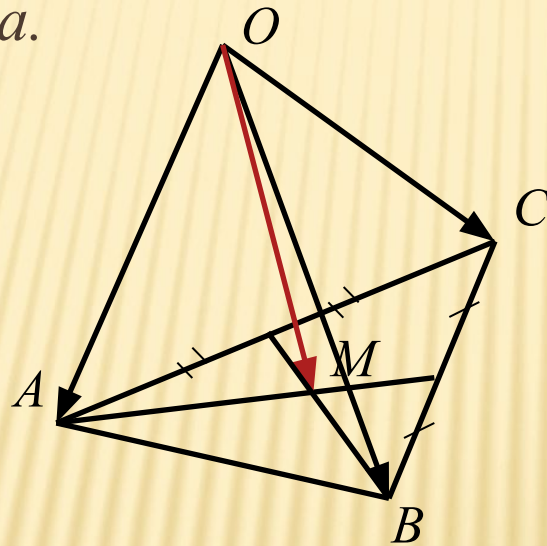
$$\vec{OP} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \text{ ч.т.д.}$$

ВЕКТОР, ПРОВЕДЕННЫЙ В ЦЕНТРОИД ТРЕУГОЛЬНИКА,

равен одной трети суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины треугольника.

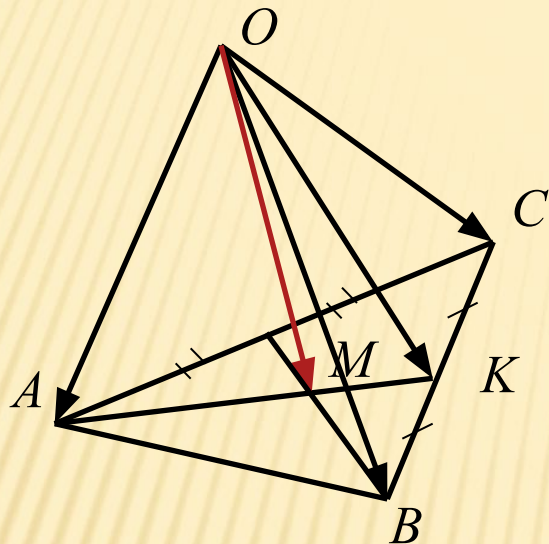
Центроид – точка пересечения медиан треугольника.



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Дано :

$\triangle ABC$

M – центр оид

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство :

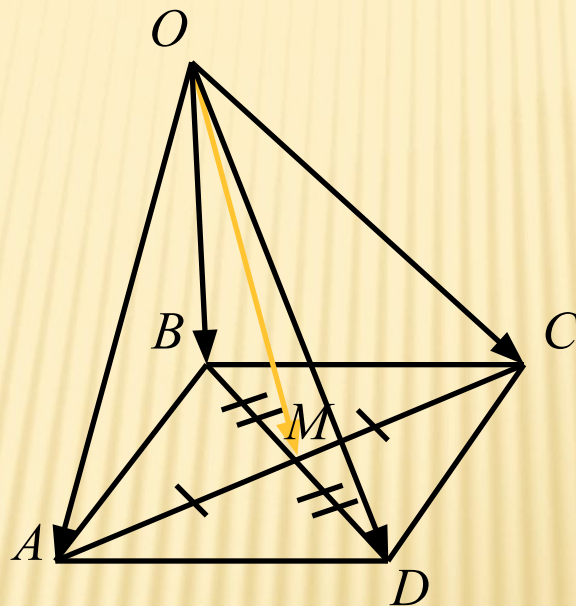
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK} =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \text{ ч.т.д.}$$

ВЕКТОР, ПРОВЕДЕННЫЙ В ТОЧКУ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДИАГОНАЛЕЙ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА,

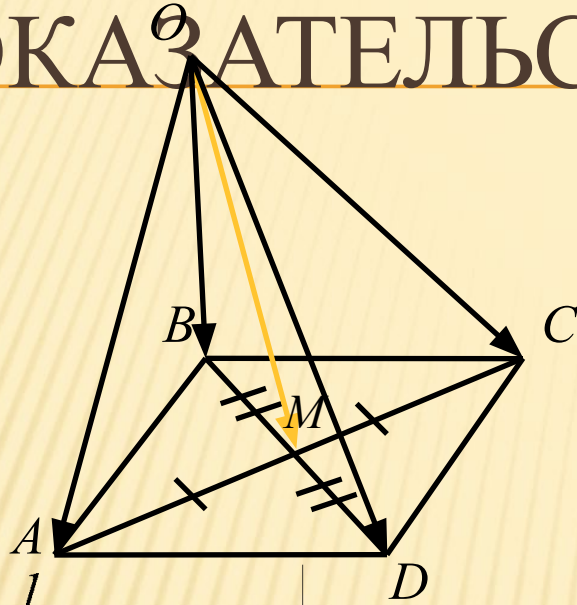
*равен одной четверти суммы векторов, проведенных
из этой точки в вершины параллелограмма.*



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Доказательство

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Дано :

$ABCD$ – пар – м

$BD \cap AC = M$

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}(OA + OC) \\ OM &= \frac{1}{2}(OB + OD) \end{aligned} \quad +$$

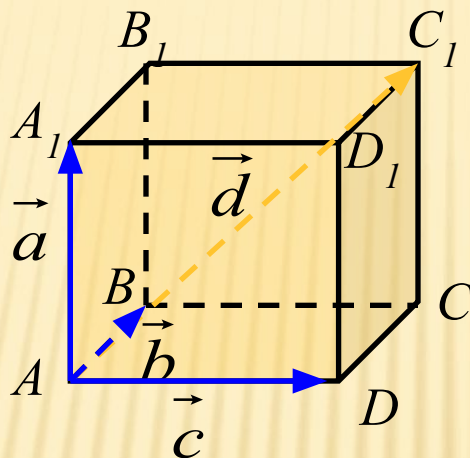
$$2OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OD$$

$$OM = \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OB + \frac{1}{4}OC + \frac{1}{4}OD =$$

$$= \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD) \div .\grave{o}.\grave{a}.$$

ВЕКТОР, ЛЕЖАЩИЙ НА ДИАГОНАЛИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА,

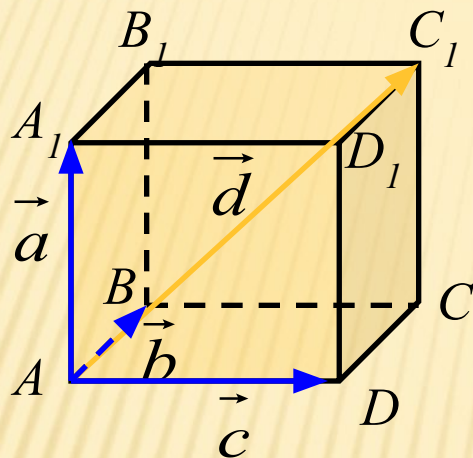
*равен сумме векторов, лежащих на трех его ребрах,
исходящих из одной вершины.*



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Доказательство

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Доказательство :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC_1} &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} = \\ &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ ч.т.д.}\end{aligned}$$

Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

Доказать :

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$