

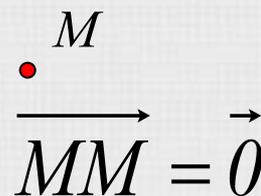
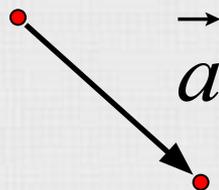
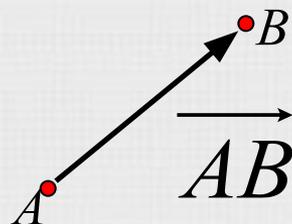
Векторы в пространстве



Понятие вектора в пространстве

Вектор(направленный отрезок) –

отрезок, для которого указано какой из его концов считается началом, а какой – концом.



Длина вектора \overrightarrow{AB} – длина отрезка AB.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB \quad |\vec{0}| = 0$$



Коллинеарные векторы

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.

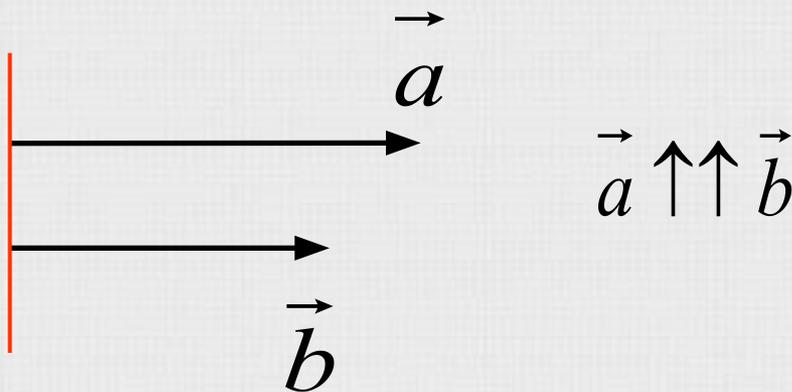
Среди коллинеарных различают:

- Сонаправленные векторы
- Противоположно направленные векторы



Сонаправленные векторы

Сонаправленные векторы - векторы, лежащие по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.



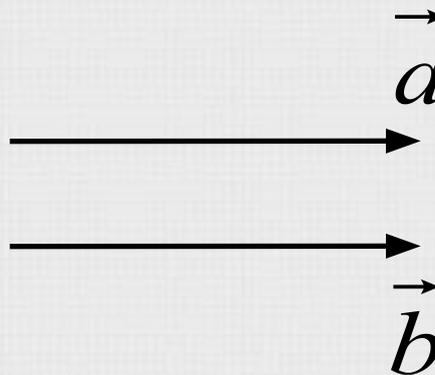
Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором.

- Равные векторы



Равные векторы

Равные векторы - сонаправленные векторы, длины которых равны.

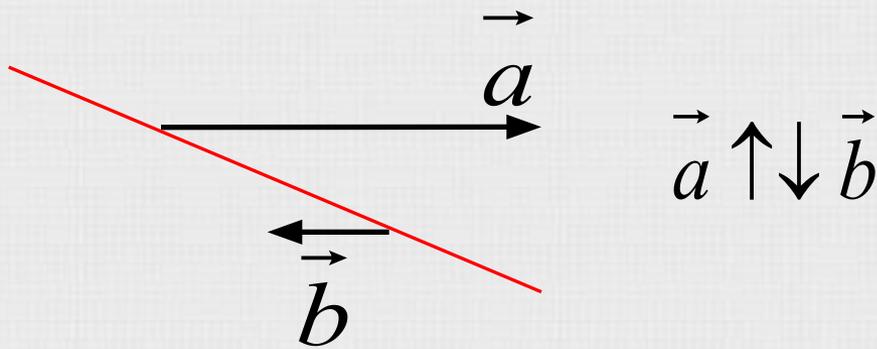

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.



Противоположно направленные векторы

Противоположно направленные векторы – векторы, лежащие по разные стороны от прямой, проходящей через их начала.

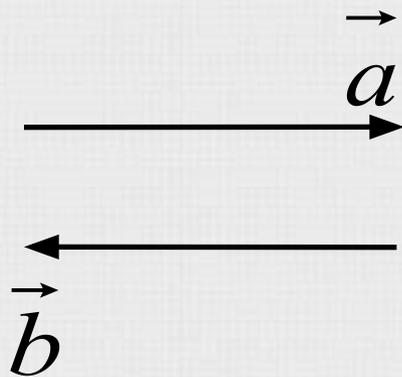


- Противоположные векторы



Противоположные векторы

Противоположные векторы – противоположно направленные векторы, длины которых равны.


$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Вектором, противоположным нулевому, считается нулевой вектор.



Признак коллинеарности

Если существует такое число k при котором выполняется равенство $\vec{a} = k\vec{b}$ и при том вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

Доказательств

0



Доказательство признака коллинеарности

Два вектора \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство.

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

вектор $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k \geq 0$ (следует из определения

вектор $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$ произведения вектора на число)

Значит вектор \vec{b} и $k\vec{a}$ коллинеарны,
т.к. сонаправленные и противоположно
направленные векторы лежат на одной
или параллельных прямых.

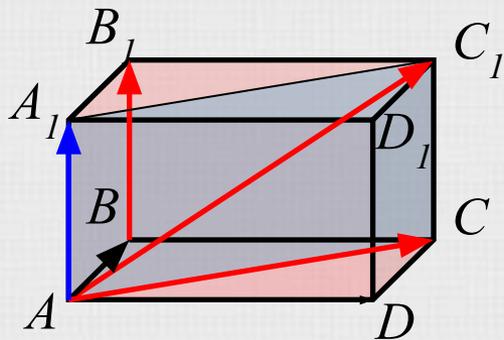
ч.т.д.



Определение компланарных векторов

Компланарные векторы – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.

Пример:

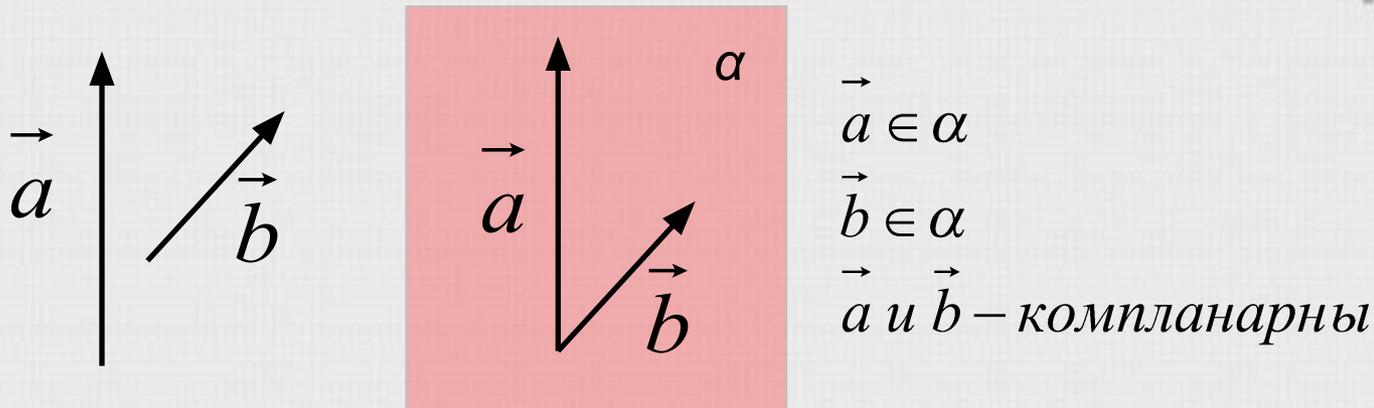


$\vec{BB}_1, \vec{AC}, \vec{AC}_1$ – компланарны, т.к.
 $\vec{BB}_1 = \vec{AA}_1$, а векторы $\vec{AA}_1, \vec{AC}, \vec{AC}_1$
лежат в плоскости (AA_1C)



О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.



Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

\vec{a}, \vec{b} и \vec{c} –
компланарны *если* $\vec{a} = k\vec{b}$



Признак компланарности

Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} , т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

где x и y – некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

Доказательство

Задачи



Задачи на компланарность

1) *Компланарны ли векторы:*

а) $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b}$;

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$?

Справка

Решение

2) *Известно, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.*

Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$;

б) $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{c}, 2\vec{b} - 3\vec{c}$?

Справка

Решение



Решение

а) векторы \vec{a} и $2\vec{a}$ коллинеарны,
векторы \vec{b} и $3\vec{b}$ коллинеарны,
значит векторы \vec{a} , \vec{b} , $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$ компланарны

б) векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{a} + \vec{b}$ компланарны,
векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны,
значит векторы \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны



Решение

а) если векторы \vec{a} , $2\vec{b}$, $3\vec{c}$ компланарны, то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

проверяем существуют ли такие m и n , что

$$\vec{a} = m \cdot 2\vec{b} + n \cdot 3\vec{c}$$

имеем :

$$2m = x \quad m = \frac{x}{2}$$

$$3n = y \quad n = \frac{y}{3}$$

m и n определяются единственным образом, значит векторы компланарны



Решение

б) если векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{c}$, $2\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны, то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} + \vec{b} = x(\vec{a} + 2\vec{c}) + y(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = x\vec{a} + 2x\vec{c} + 2y\vec{b} - 3y\vec{c}$$

$$\vec{a}(1-x) + \vec{b}(1-2y) + \vec{c}(-2x+3y) = 0$$

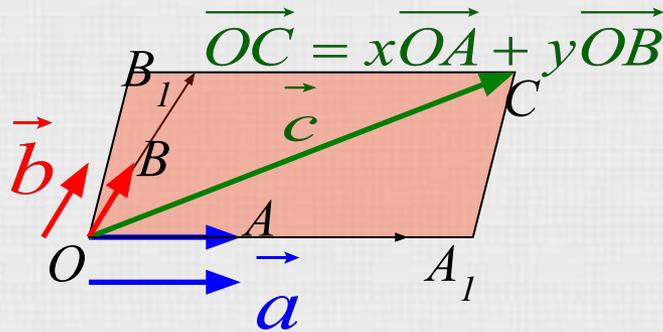
$$\begin{cases} 1-x=0 \\ 1-2y=0 \\ 3y-2x=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{c} + \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

искомые x и y существуют,
значит векторы компланарны



Доказательство признака компланарности



Дано :

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

x, y – некоторые числа

Доказать :

\vec{a}, \vec{b} и \vec{c} – компланарны

Доказательство :

Пусть \vec{a} и \vec{b} – не коллинеарны

O – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$$

$$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OA_1}, \vec{OB_1} \in (OAB)$$

$$\vec{OA_1} = x \cdot \vec{OA} \quad \vec{OB_1} = y \cdot \vec{OB} \Rightarrow$$

$$\vec{OC} = \vec{c} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB}$$

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ лежат в одной плоскости

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны ч.т.д



Свойство компланарных векторов

*Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны, то один из них
можно выразить линейным образом через два других,
т.е. представить в виде :*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

*причем коэффициенты разложения
определяются единственным образом.*



Действия с векторами

- Сложение
- Вычитание
- Умножение вектора на число
- Скалярное произведение



Сложение векторов

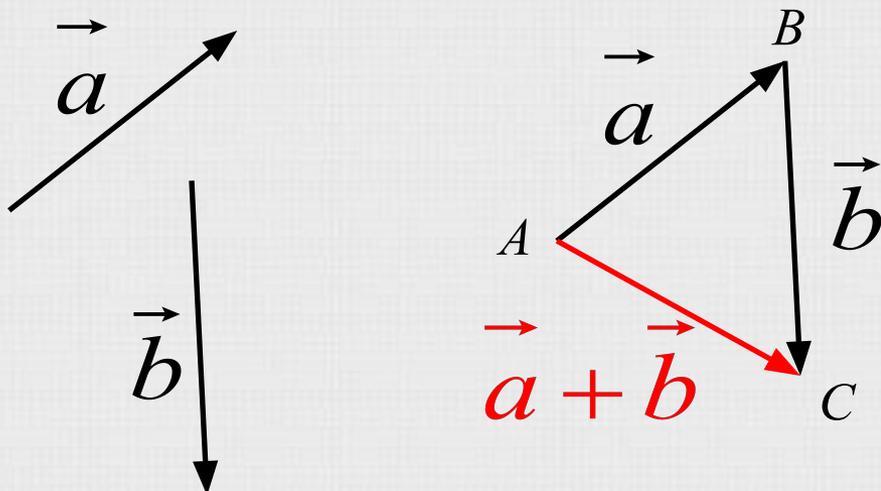
- Правило треугольника
- Правило параллелограмма
- Правило многоугольника
- Правило параллелепипеда
- Свойства сложения



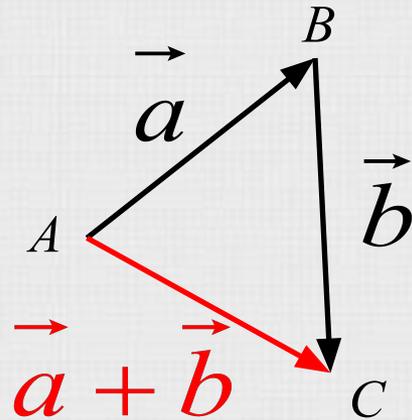
Правило треугольника

Для сложения двух векторов необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки A вектор \overrightarrow{AB} , равный \vec{a}
2. от точки B отложить вектор \overrightarrow{BC} , равный \vec{b}
3. вектор \overrightarrow{AC} называется суммой векторов \vec{a} и \vec{b}



Правило треугольника



Для любых трех точек A, B и C справедливо равенство:

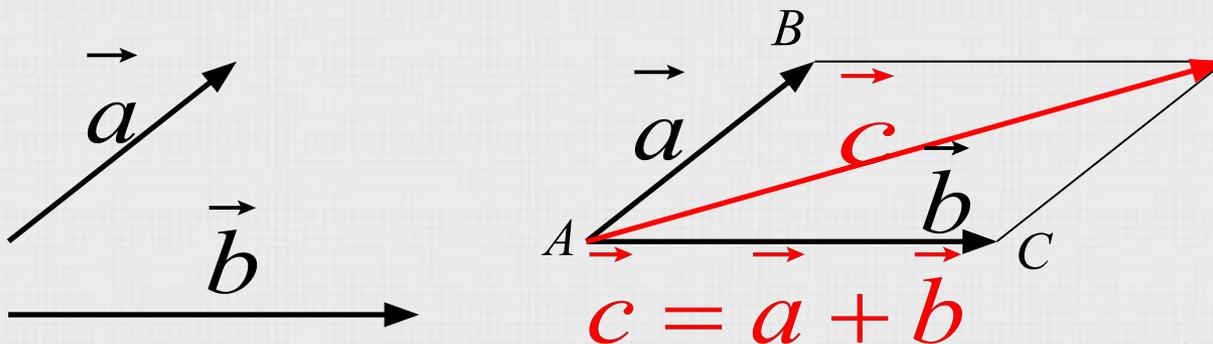
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \underline{\vec{AC}}$$



Правило параллелограмма

Для сложения двух векторов необходимо :

- 1. отложить от какой – нибудь точки A вектор \overrightarrow{AB} , равный \vec{a}*
- 2. от точки A отложить вектор \overrightarrow{AC} , равный \vec{b}*
- 3. построить фигуру до параллелограмма, проведя дополнительные линии параллельно данным векторам*
- 4. диагональ параллелограмма – сумма векторов*



Свойства сложения

Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} справедливы
равенства :

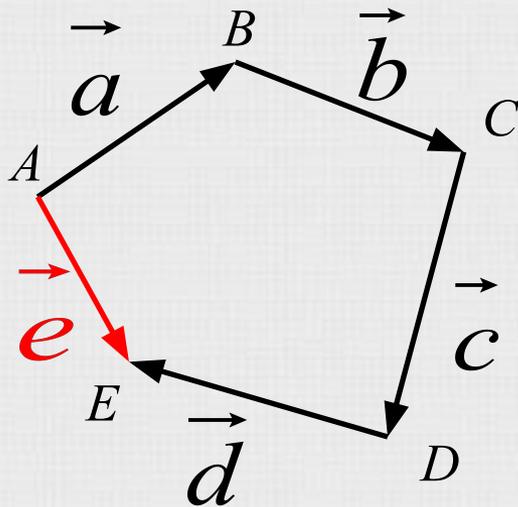
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{переместительный закон}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \quad \text{сочетательный закон}$$



Правило многоугольника

Сумма векторов равна вектору, проведенному из начала первого в конец последнего (при последовательном откладывании).



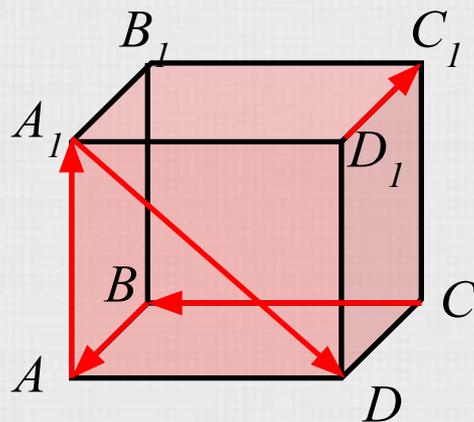
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$$

Пример

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \underline{\vec{AE}}$$



Пример

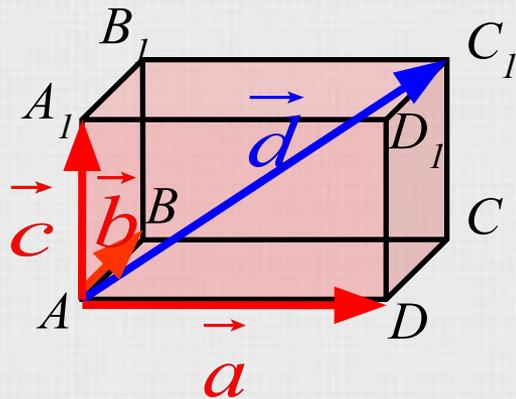


$$\vec{AA_1} + \vec{D_1C_1} + \vec{A_1D} + \vec{BA} + \vec{CB} = \vec{0}$$



Правило параллелепипеда

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда, равен сумме векторов, проведенных из той же точки и лежащих на трех измерениях параллелепипеда.



$$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

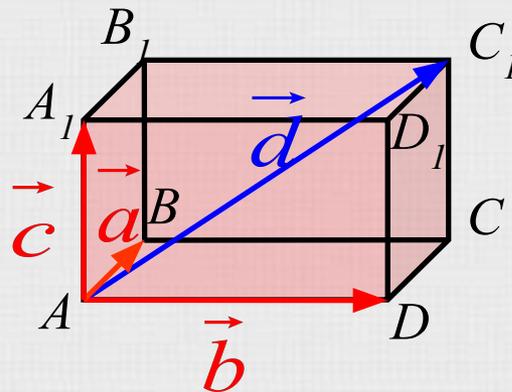
$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$$



Свойства



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ для любого параллелепипеда
 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ для прямоугольного параллелепипеда



Вычитание векторов

- Вычитание
- Сложение с противоположным



Вычитание

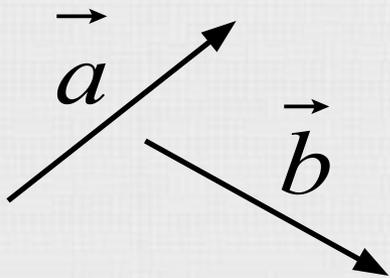
Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор, сумма которого с вектором \vec{b} равна вектору \vec{a} .



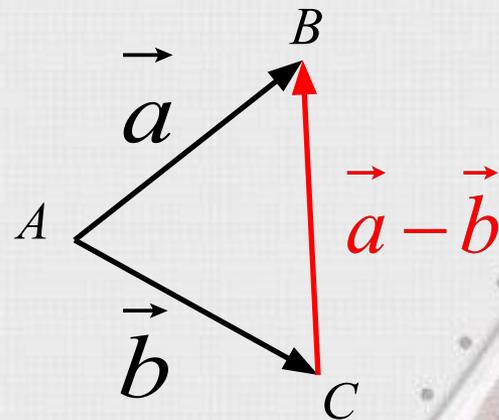
Вычитание

Для вычитания одного вектора из другого необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки A вектор \overrightarrow{AB} , равный \vec{a}
2. от этой же точки A отложить вектор \overrightarrow{AC} , равный \vec{b}
3. вектор \overrightarrow{CB} называется разностью векторов \vec{a} и \vec{b}

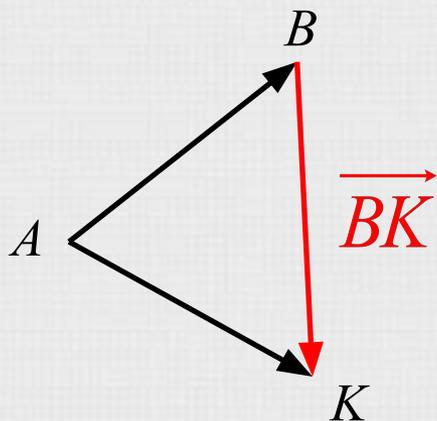


Правило трех точек



Правило трех точек

Любой вектор можно представить как разность двух векторов, проведенных из одной точки.



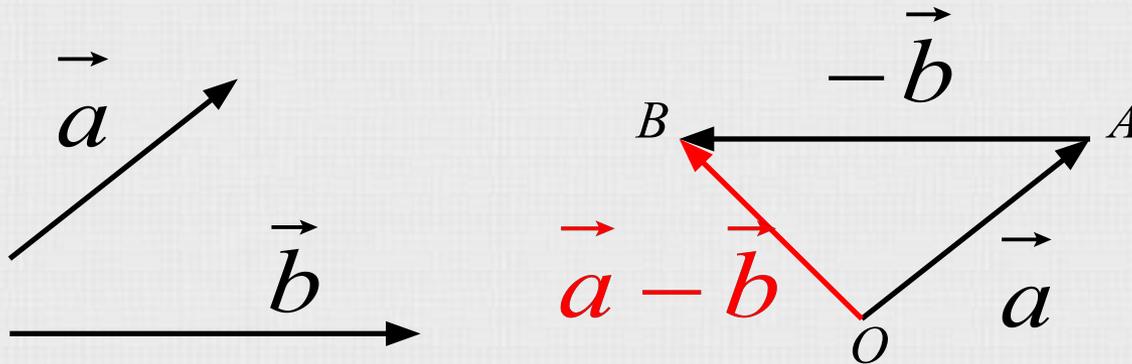
$$\underline{\vec{BK}} = \vec{AK} - \vec{AB}$$



Сложение с противоположным

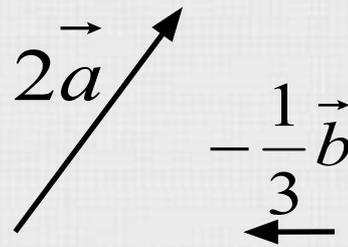
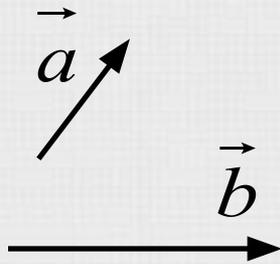
Разность векторов \vec{a} и \vec{b} можно представить как сумму вектора \vec{a} и вектора, противоположного вектору \vec{b} .

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, при чем векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.



Свойства

- Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

$$\vec{0} \cdot n = \vec{0}$$

- Произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор.

$$n \cdot \vec{0} = \vec{0}$$



Свойства

Для любых векторов \vec{a} и \vec{b} и любых чисел k, l справедливы равенства :

$$(\vec{k}l)\vec{a} = \vec{k}(\vec{l}a) \quad \text{сочетательный закон}$$

$$\vec{k}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{k}a + \vec{k}b \quad \text{1-ый распределительный закон}$$

$$(\vec{k} + \vec{l})\vec{a} = \vec{k}a + \vec{l}a \quad \text{2-ой распределительный закон}$$



Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения



Справедливые утверждения

• *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

• *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$$



Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Доказательств

во



Доказательство формулы скалярного произведения

Доказательство :

I. при $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, равенство

$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ справедливо, т.к. $\vec{0}\{0;0;0\}$

II. при $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

O – произвольная точка

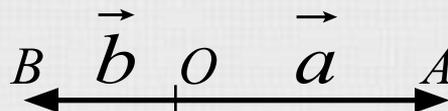
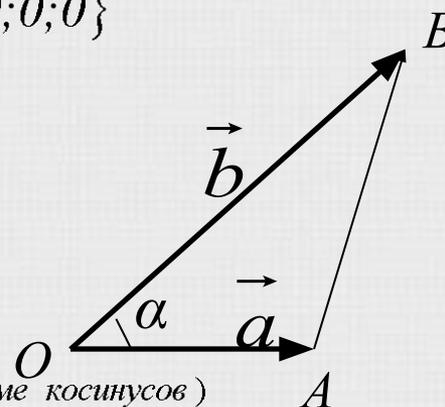
$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$

если \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны, то

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$ (по теореме косинусов)

это равенство верно и в том случае когда векторы

\vec{a} и \vec{b} коллинеарны



$$\begin{aligned} \cos\alpha = 1, AB^2 &= (OA - OB)^2 = & \cos\alpha = -1, AB^2 &= (OA + OB)^2 = \\ &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB = & &= OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB = \\ &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha & &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha \end{aligned}$$



Доказательство формулы скалярного произведения

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{b} - \vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 -$$

$$- (z_2 - z_1)^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 -$$

$$- x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 - z_1^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$



Свойства скалярного произведения

Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} и любого числа k справедливы равенства :

$$1^0. \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \text{ причем } \vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \text{ при } \vec{a} \neq 0$$

$$2^0. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{переместительный закон})$$

$$3^0. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{распределительный закон})$$

$$4^0. (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{сочетательный закон})$$



Разложение вектора

- По двум неколлинеарным векторам
- По трем некомпланарным векторам



Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

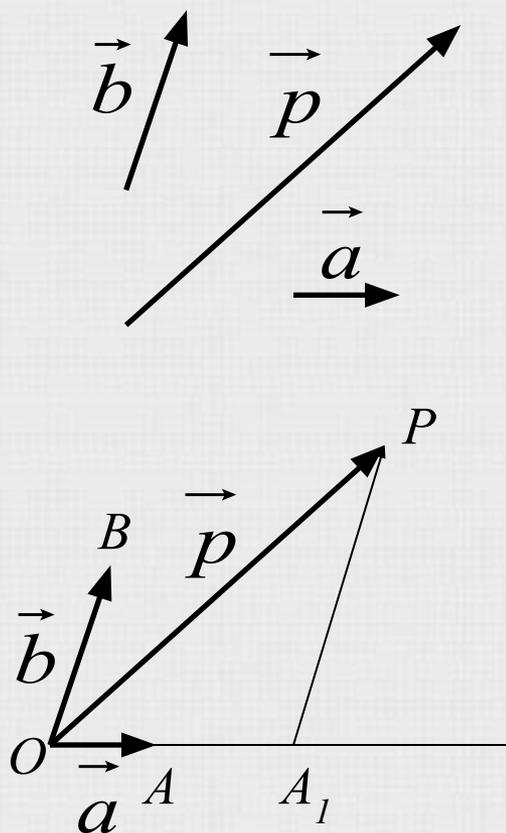
Теорема.

Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство



Доказательство теоремы



Дано :

\vec{a}, \vec{b} – неколлинеарные
векторы

Доказать :

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Доказательство :

1) Пусть \vec{p} коллинеарен \vec{b}
Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$, где y –
некоторое число.

Следовательно,

$$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$

т.е. \vec{p} разложен по
векторам \vec{a} и \vec{b} .



Доказательство теоремы

2) \vec{r} коллинеарен ни вектору \vec{a} , ни вектору \vec{b}

Отметим O – произвольную точку.

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \vec{OB} = \vec{b} \quad \vec{OP} = \vec{r}$$

$$PA_1 \parallel BO \quad PA_1 \cap OA = A_1$$

$$\vec{r} = \vec{OA_1} + \vec{A_1P} \text{ (по правилу треугольника)}$$

но: $\vec{OA_1}$ и $\vec{A_1P}$ коллинеарны \vec{a} и \vec{b} соответственно,

$$\text{значит } \vec{OA_1} = x\vec{a}, \quad \vec{A_1P} = y\vec{b},$$

следовательно $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т.е. \vec{r} разложен по \vec{a} и \vec{b}

ч.т.д.



Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b}$

Тогда: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$
 $\vec{p} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$

$$\vec{0} = (x - x_1) \vec{a} + (y - y_1) \vec{b}$$

$$x - x_1 = 0, y - y_1 = 0,$$

если бы $x - x_1 \neq 0$ то $\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1} \vec{b}$

а значит \vec{a} , и \vec{b} коллинеарны, что противоречит условию теоремы значит $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, откуда $x = x_1$ и $y = y_1$.



Разложение вектора по трем некопланарным векторам

Если вектор \vec{p} представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где x, y, z – некоторые числа, то говорят, что вектор \vec{p} разложен по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

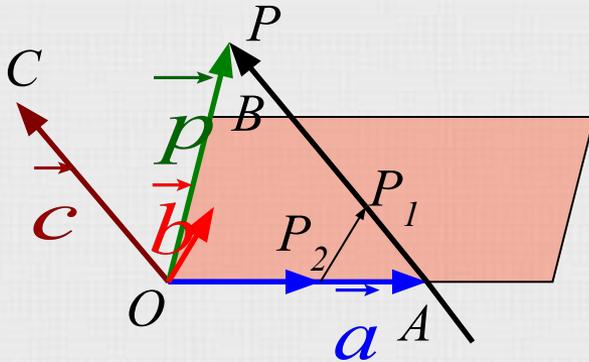
Теорема

Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство



Доказательство теоремы



Дано:
 \vec{a} \vec{b} \vec{c} –
 некопланрные
 векторы
 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Доказательство:

O – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \vec{OB} = \vec{b} \quad \vec{OC} = \vec{c} \quad \vec{OP} = \vec{p}$$

$$AP \parallel OC \quad AP \cap (AOB) = P_1 \quad P_2P_1 \parallel OB$$

$$\vec{OP} = \vec{OP}_2 + \vec{P}_2P_1 + \vec{P}_1P$$

\vec{OP}_2 , и \vec{OA} , \vec{P}_2P_1 и \vec{OB} , \vec{P}_1P , \vec{OC} – коллинеарны

$$\vec{OP}_2 = x \cdot \vec{OA}, \quad \vec{P}_2P_1 = y \cdot \vec{OB}, \quad \vec{P}_1P = z \cdot \vec{OC}$$

$$\vec{OP} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \text{ ч.т.д.}$$



Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$

Тогда: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$
 $\vec{p} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$

$$\vec{0} = (x - x_1) \vec{a} + (y - y_1) \vec{b} + (z - z_1) \vec{c}$$

$$x - x_1 = 0, \quad y - y_1 = 0, \quad z - z_1 = 0$$

если бы $z - z_1 \neq 0$ то $\vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1} \vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1} \vec{b}$

а значит \vec{a} , \vec{b} , и \vec{c} компланарны, что противоречит условию теоремы

значит $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$



Базисные задачи

Вектор, проведенный в середину отрезка

Вектор, проведенный в точку отрезка

Вектор, соединяющий середины двух отрезков

Вектор, проведенный в центроид треугольника

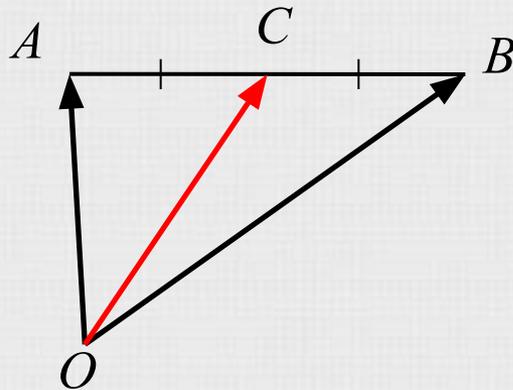
Вектор, проведенный в точку пересечения
диагоналей параллелограмма

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда



Вектор, проведенный в середину отрезка,

равен полусумме векторов, проведенных из той же точки в его концы.

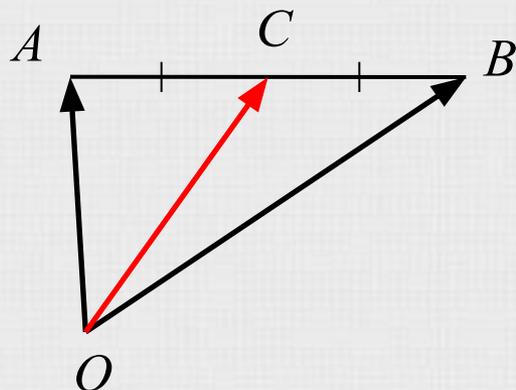


$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

AB – отрезок

$AC = CB$

Доказать :

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

Доказательство :

$$\left. \begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AC} \\ \vec{OC} &= \vec{OB} + \vec{BC} \end{aligned} \right| +$$

$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OA} + \vec{OB} + (\vec{AC} + \vec{BC})$$

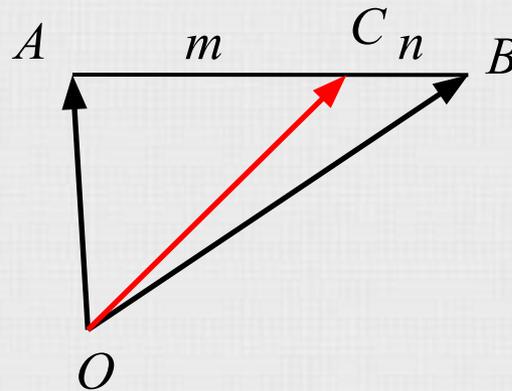
$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \quad | \div 2$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \quad | \text{ч.т.д.}$$



Вектор, проведенный в точку отрезка

Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$.

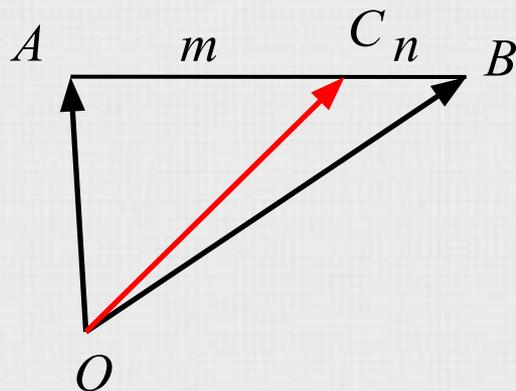


$$\vec{OC} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

AB – отрезок

$$AC = m$$

$$CB = n$$

Доказать :

Доказательство :

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{OC} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$$

$$\vec{AC} = \frac{m}{m+n} \vec{AB} = \frac{m}{m+n} (\vec{OB} - \vec{OA})$$

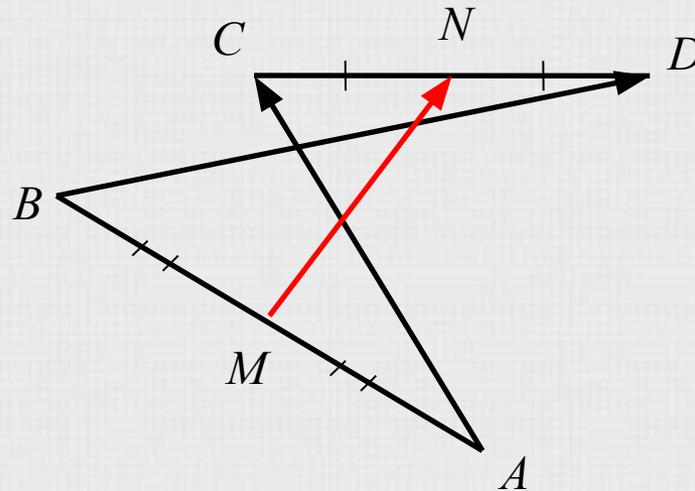
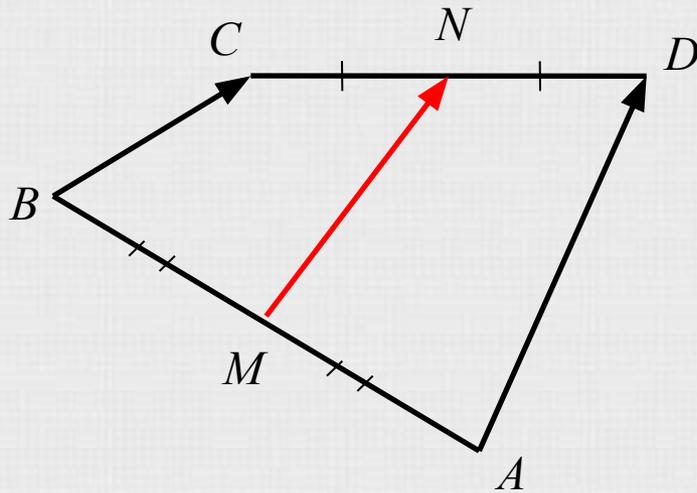
$$\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB} - \frac{m}{m+n} \vec{OA} =$$

$$= \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB} \text{ ч.т.д.}$$



Вектор, соединяющий середины двух отрезков,

равен полусумме векторов, соединяющих их концы.

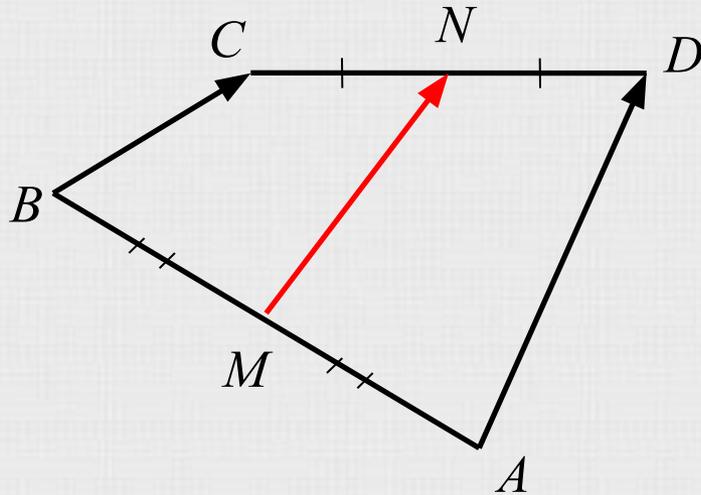


$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

$AB; CD$

$BM = AM$

$CN = ND$

Доказать :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \end{aligned} \right\} +$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

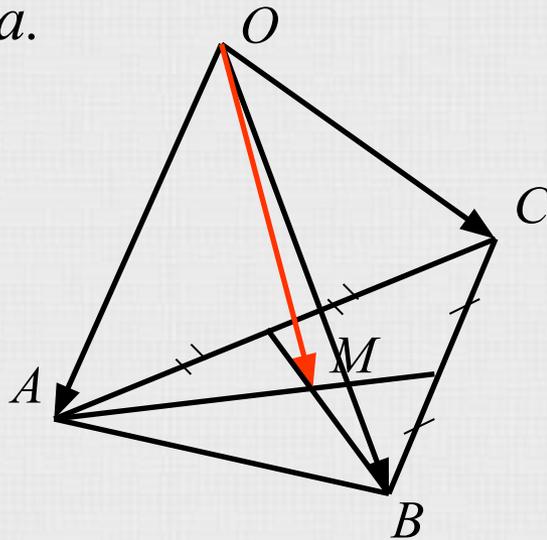
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \text{ ч.т.д.}$$



Вектор, проведенный в центроид треугольника,

равен одной трети суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины треугольника.

Центроид – точка пересечения медиан треугольника.

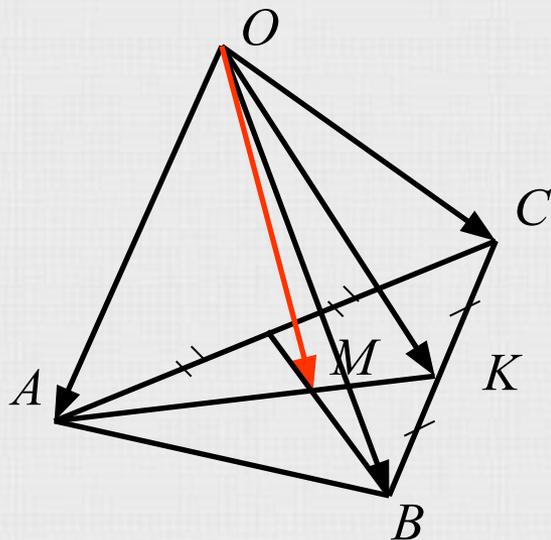


$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

[Доказательство](#)



Доказательство



Дано :

$\triangle ABC$

M – центр тяжести

Доказать :

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

Доказательство :

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OK} =$$

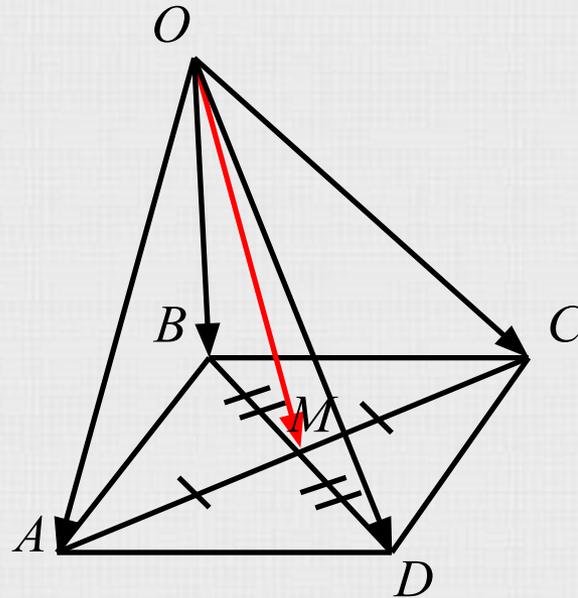
$$= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \text{ ч.т.д.}$$



Вектор, проведенный в точку пересечения диагоналей параллелограмма,

равен одной четверти суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины параллелограмма.

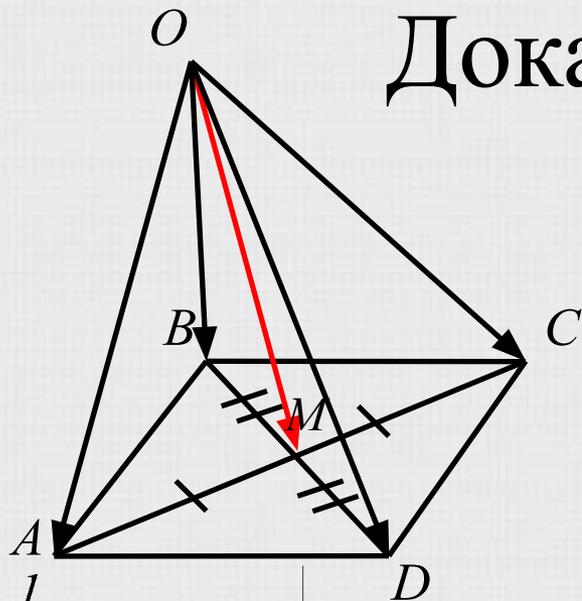


$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

$ABCD$ – пар – м

$BD \cap AC = M$

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}(OA + OC) \\ OM &= \frac{1}{2}(OB + OD) \end{aligned} \quad +$$

$$2OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OD$$

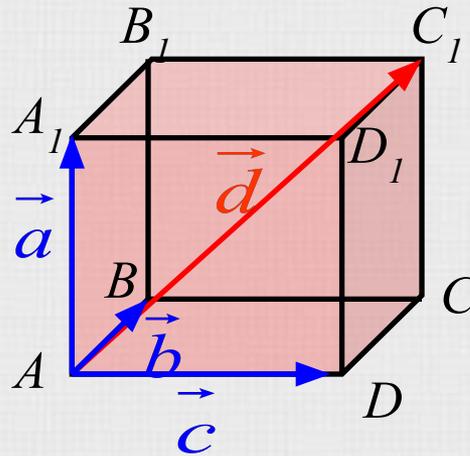
$$OM = \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OB + \frac{1}{4}OC + \frac{1}{4}OD =$$

$$= \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD) \quad \div. \dot{o}. \ddot{a}.$$



Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда,

равен сумме векторов, лежащих на трех его ребрах, исходящих из одной вершины.

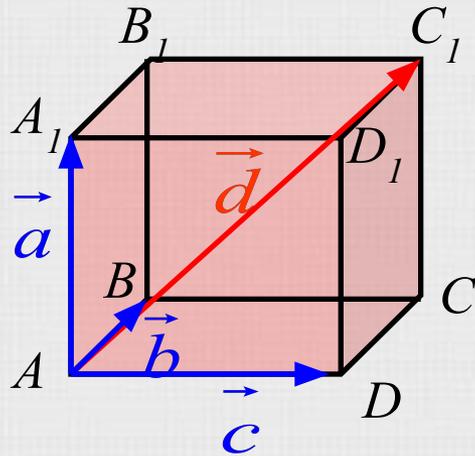


$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – м

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

Доказательство :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC_1} &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} = \\ &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ ч.т.д.}\end{aligned}$$

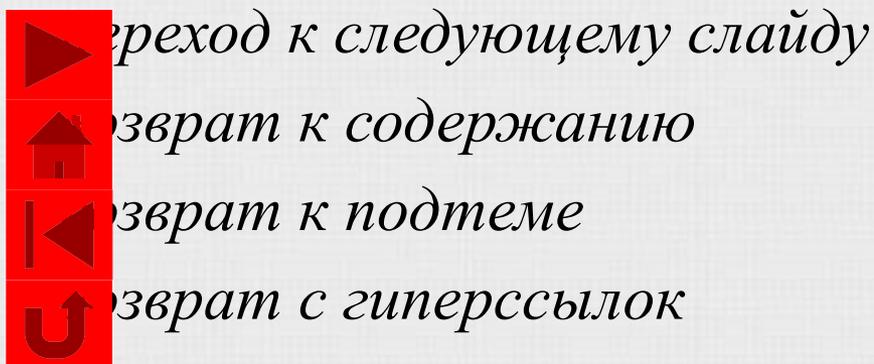
Доказать :

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



Помощь в управлении презентацией

- *управление презентацией осуществляется с помощью левой клавиши мыши*
- *переход от одного слайда к другому и на гиперссылки по одиночному щелчку*
- *завершение презентации при нажатии кнопки выход*



Проверь себя

- Устные вопросы
- Задача 1 **Задача 1.** Задача на доказательство
- Задача 2. Разложение векторов
- Задача 3. Сложение и вычитание векторов
- Задача 4. Скалярное произведение



Устные вопросы

Справедливо ли утверждение:

а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны?

б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены?

в) любые два равных вектора коллинеарны?

г) любые два сонаправленных вектора равны?

д) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$?

е) существуют векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} такие, что \vec{a} и \vec{c} не коллинеарны, \vec{b} и \vec{c} не коллинеарны, а \vec{a} и \vec{b} коллинеарны?

Ответ

ы



Ответы

а) ДА

б) НЕТ (могут быть и противоположно направленными)

в) ДА

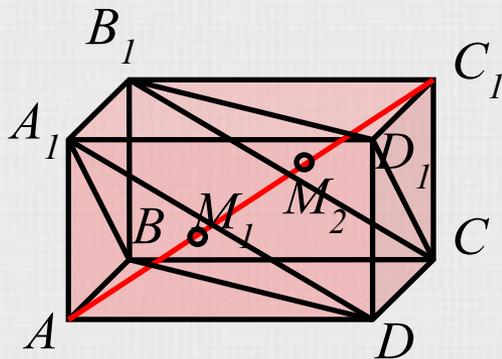
г) НЕТ (могут иметь разную длину)

д) ДА

е) ДА



Задача 1. Задача на доказателство



Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – д
 M_1, M_2 – точки пересечения
медиан $\triangle A_1 B D_1$ и $\triangle D_1 C B_1$
соответственно

Доказать :

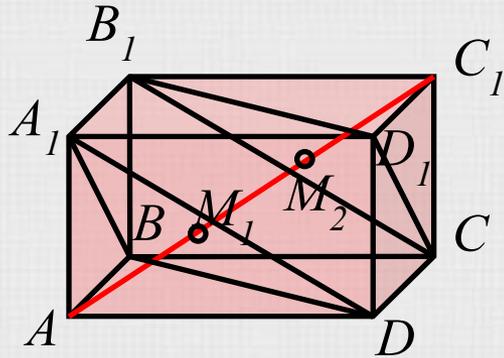
$$AM_1 = M_1 M_2 = M_2 C_1$$

Решени

e



Решение



Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – д
 M_1, M_2 – точки пересечения
медиан $\triangle A_1 B D$ и $\triangle D_1 C B_1$

соответственно

Доказать :

$$AM_1 = M_1 M_2 = M_2 C_1$$

Доказательство :

Рассм. тетраэдр $AA_1 B D$

M_1 – центр оид $\triangle A_1 M_1 B$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ по правилу пар – да}$$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$M \in AC_1, AM_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

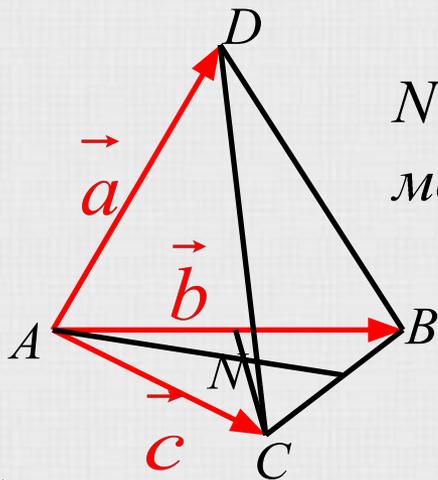
$$\text{аналогично } M_2 \in AC_1, C_1 M_2 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

следовательно $AM_1 = M_1 M_2 = M_2 C_1$ ч.т.д.



Задача 2. Разложение векторов

Разложите вектор по \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} :



N – точка пересечения
медиан $\triangle ABC$

- a) \overrightarrow{DB}
- б) \overrightarrow{CB}
- в) \overrightarrow{DC}
- г) \overrightarrow{DN}

Решение



Решение

$$a) \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$б) \overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$в) \overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$г) \overrightarrow{DN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) \right) =$$
$$= -\vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} + \frac{1}{6} \vec{c}$$



Задача 3. Сложение и вычитание

Упростите выражения:

а) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK}$

б) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA}$

в) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST}$

г) $\overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK}$

д) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$

е) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$

Решение



Решение

$$a) \quad \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CK}$$

$$б) \quad \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{DA}$$

$$в) \quad \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TD}$$

$$г) \quad \overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KL}$$

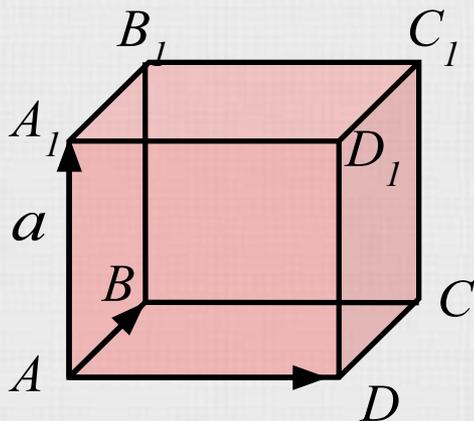
$$\begin{aligned} д) \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} &= \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM} = \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD} &= \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EK} = \\ &= \overrightarrow{AK} \end{aligned}$$



Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб
 $|\overrightarrow{AB}| = a$

а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1 C_1}$

б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1 A_1}$

в) $\overrightarrow{D_1 B} \cdot \overrightarrow{AC}$

г) $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

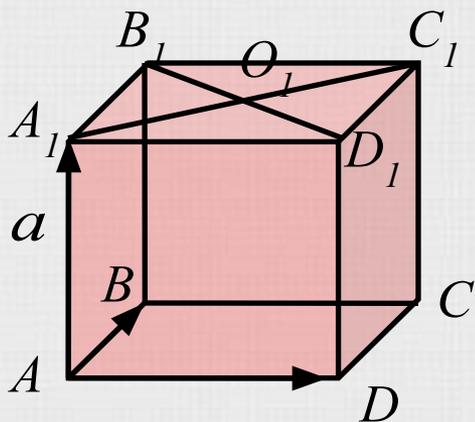
Решени

e



Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

$$|\overrightarrow{AB}| = a$$

$$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$$

д) $\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$

е) $\overrightarrow{DO_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1}$

ж) $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$

Решени

е



Решение

$$а) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = a^2$$

б) AC – диагональ квадрата

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} = -\overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{AC} \cdot (-\overrightarrow{A_1C_1}) = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = -(a\sqrt{2})^2 = -2a^2$$

в) D_1B – диагональ куба

$$D_1B = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}a \text{ (т. Пифагора из } \triangle DD_1B)$$

$$\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}a^2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^3 \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^3 \sqrt{3}$$

г) BA_1, BC_1 – диагонали квадратов

$\triangle A_1BC_1$ – равносторонний, $\angle A_1BC_1 = 60^\circ$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2$$



Решение

д) A_1O_1 – половина диагонали квадрата

A_1C_1 – диагональ квадрата

$$\angle O_1A_1C_1 = 0^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

е) D_1O_1, B_1O_1 – половины диагонали квадрата

$$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{D_1O_1} \cdot (-\overrightarrow{O_1B_1}) = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2}$$



Решение

ж) I способ – решение по определению:

$$BO_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

C_1B – диагональ квадрата

$$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2} \angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

$$\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{BO_1} \cdot (-\overrightarrow{BC_1}) = -\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3}{2}a^2$$

II способ – разложение по базису:

$$\overrightarrow{BO_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{C_1B} = -\vec{b} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} &= \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot (-\vec{a} - \vec{b}) = -(\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - \\ & - \frac{1}{2}\vec{a}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}^2) = -\left(\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}^2\right) = -\frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$

