# Тема 1.

## Графы

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

***Граф*** *– наглядное представление конечного антирефлексивного симметричного отношения*

---

***Граф*** – конечное множество $V$, называемое ***множеством вершин***, на котором задано симметричное антирефлексивное отношение ***R*** и выделено множество $E$ двухэлементных подмножеств $V$, определяемое как $\{a, b\} \in E$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in \mathbf{R}$ и $a \neq b$.

Множество $E$ называется ***множеством ребер***. Всякий элемент $E$ называется ***ребром***.

Граф обозначается $G(V, E)$.

Элементы $a$ и $b$ графа $V$ соединены или связаны ребром $\{a, b\}$, если $\{a, b\} \in E$.

*Конечный граф изображается при помощи диаграммы, в котором вершины представлены точками, ребра, соединяющее вершины, линиями между точками.*
*Пример*

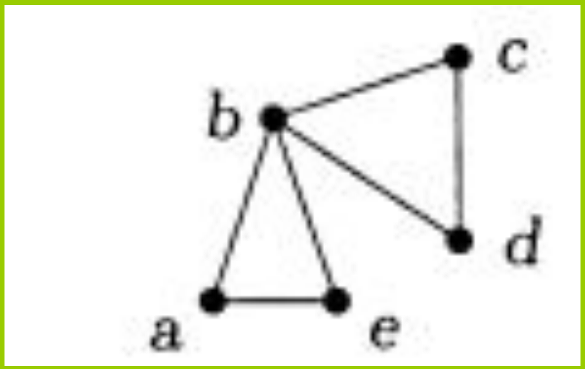
Граф, в котором множество вершин $V = \{a, b, c\}$, $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ может иметь вид

*или*


$$R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$$

## Пример

Граф, в котором множество вершин $V=\{a, b, c, d, e\}$, $E=\{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$ имеет диаграмму




$$R = \{(a,b), (b,a), (e,a), (a,e), (e,b), (b,e), (b,d), (d,b), (b,c), (c,b), (d,c), (c,d)\}$$

## *Определения*

***Ориентированный граф****,* или **орграф G** *состоит* из множества $V$ вершин и отношения $E$ на $V$, называемого множеством ***ориентированных ребер*** или просто ***ребер***, если понятно, что граф ориентирован.

Обозначается **G**($V$, $E$)

Элемент множества $E$ называется ***ориентированным ребром.***

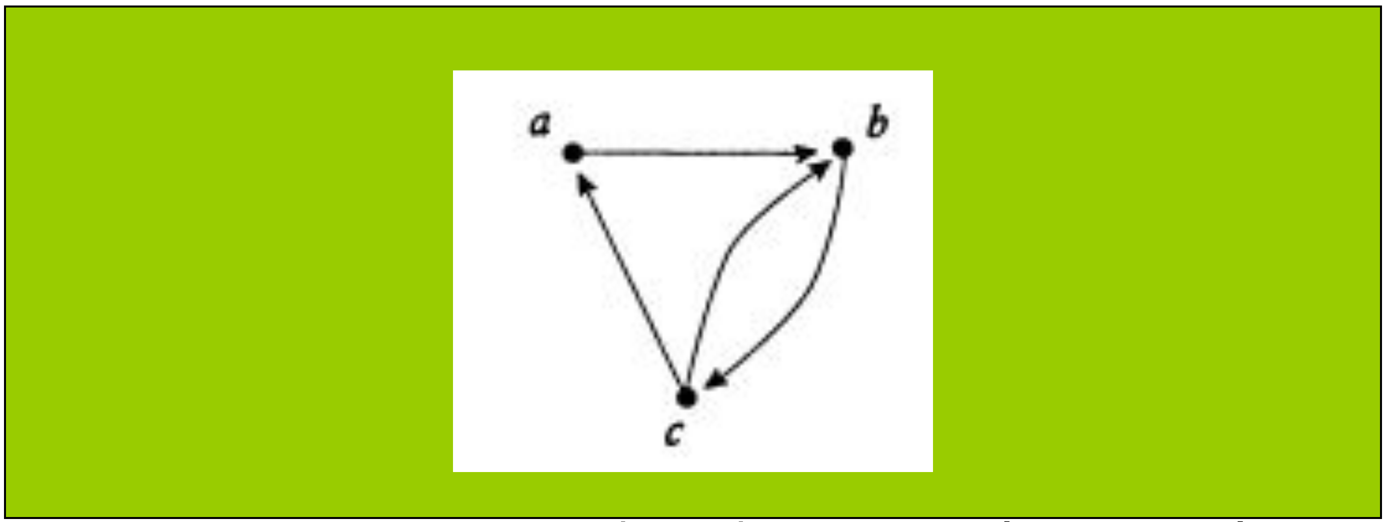
Если $(a, b) \in E$, тогда $a$ называется ***начальной вершиной*** $(a, b)$, $b$ - его ***конечной вершиной***.

*В случае ориентированного графа допускается наличие петель.*

**Пример**

Орграф с вершинами

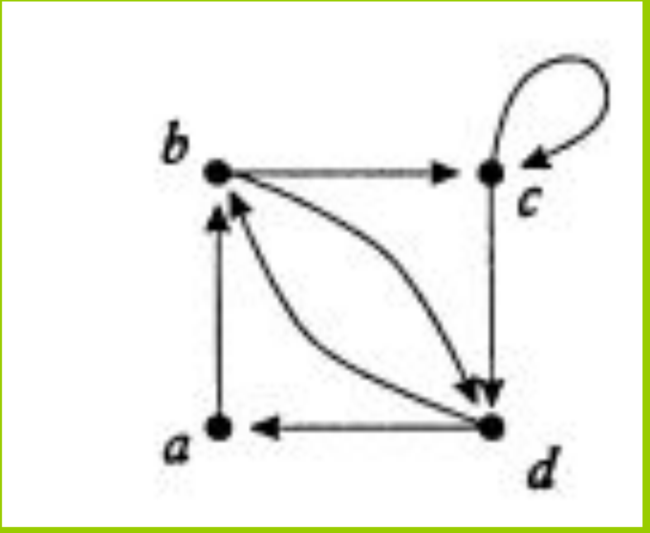
V={*a*, *b, c*} и ребрами *E*={(*a*, *b*), (*b*, *c*), (*c*, *b*), (*c*, *a*)}




Порядок имеет значение. (*a*, *b*) может быть ребром диаграммы, (*b*, *a*) – нет.

## Пример

Орграф с вершинами $V=\{a, b, c, d\}$
и ребрами $E=\{(a, b), (b, c), (c, c), (b, d), (c, d), (d, a)\}$



## ***Определение***

Отношение $R$ на $A$ есть отношение ***частичного порядка***, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если отношение $R$ на $A$ является отношением частичного порядка, то $(A, R)$ называют ***частично упорядоченным множеством*** (или ***ЧУ-множеством*** с порядком $R$).

Если отношение порядка R предполагается по умолчанию, то $(A, R)$ можно обозначить просто через $A$.

## **Пример** (*)

Пусть $C = \{1, 2, 3\}$, $X$ – множество всех подмножеств множества $C$:

$$X = P(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Определим отношение $R$ на $X$ посредством $(T, V) \in R$, если $T \subseteq V$.

$(\{2\}, \{1, 2\}) \in R$, поскольку $\{2\} \subseteq \{1, 2\}$ и

$(\{1, 2\}, \{3\}) \notin R$, поскольку $\{2, 3\} \not\subseteq \{3\}$.

$R$ – отношение частичного порядка,

$(A, R)$ – ЧУ-множество.

## *Пример*

*Пусть* $S$ – множество действительных чисел,

$R_1$ – отношение, определенное условием $(x, y) \in R_1$, если $x \leq y$.

$R_1$ – отношение частичного порядка,

$(S, R_1)$ – ЧУ-множество.

*Обозначение.*

Частично упорядочение принято обозначать через $\leq$

а ЧУ-множество - через $(S, \leq)$.

$\leq$ -частичный порядок на множестве $S$.

## *Определение*

Два элемента a и b ЧУ-множества ($S$, ≤) сравнимы, если $a \le b$ или $b \le a$.

Если каждые два элемента ЧУ-множества ($S$, ≤) сравнимы, то ($S$, ≤) называется ***вполне упорядоченным множеством***, или ***цепью***.

## Примеры

Пусть $T$ – множество положительных делителей числа 30 и $\leq_1$ есть отношение $m \leq_1 n$, если $m$ делит $n$ нацело. Целые числа 5 и 15 сравнимы, поскольку 5 делит 15 нацело, а 5 и 6 – нет.

Пусть $A$ – множество целых чисел и

$R = \leq_2$ – отношение $x \leq_2 y$, если x меньшее или равно y. Упорядоченное множество $(A, \leq_2)$ является цепью.

## Пример

Пусть $S$ – множество всех подмножеств множества $\{a,b,c\}$ $\leq_3$ есть отношение частичного порядка в примере *(*)*.

Множества $\{a, b\}$ и $\{a,b,c\}$ сравнимы, однако $\{a, b\}$ и $\{b,c\}$ таковыми не являются.

ЧУ-множество $(S, \leq_3)$ цепью не является.

## *Диаграммы Гессе*

Для изображения ЧУ-множеств.

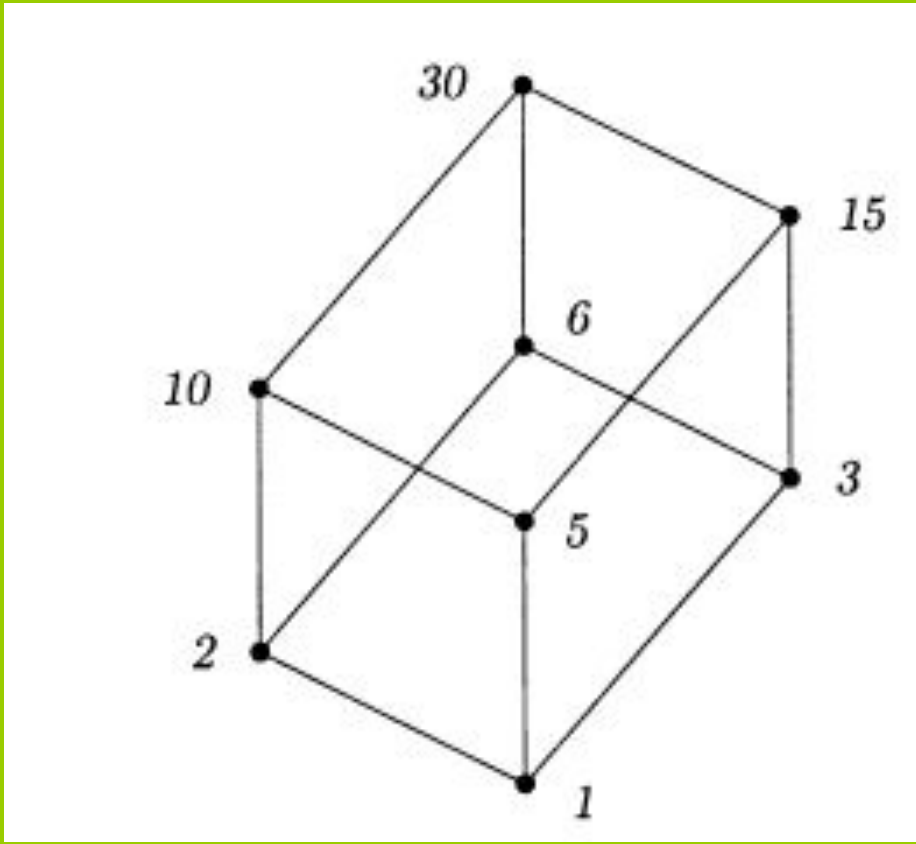
Для заданного ЧУ-множества ($A$, $\leq_2$) ***диаграмма Гессе*** состоит из совокупности точек и линий, в которой точки представляют элементы $A$, и если $a \leq c$ для элементов $a$ и $c$ множества $A$, тогда $a$ помещено ниже $c$, и они соединены линией, если не существует такое $b \neq a$, $c$, что $a \leq b \leq c$.

Если рассмотрение отношений ограничено отношениями частичного порядка, для них диаграммы Гессе – просто ориентированный граф, в котором петли не указаны.

Если $a \leq b \leq c$, тогда линия от $a$ к $c$ не указана.

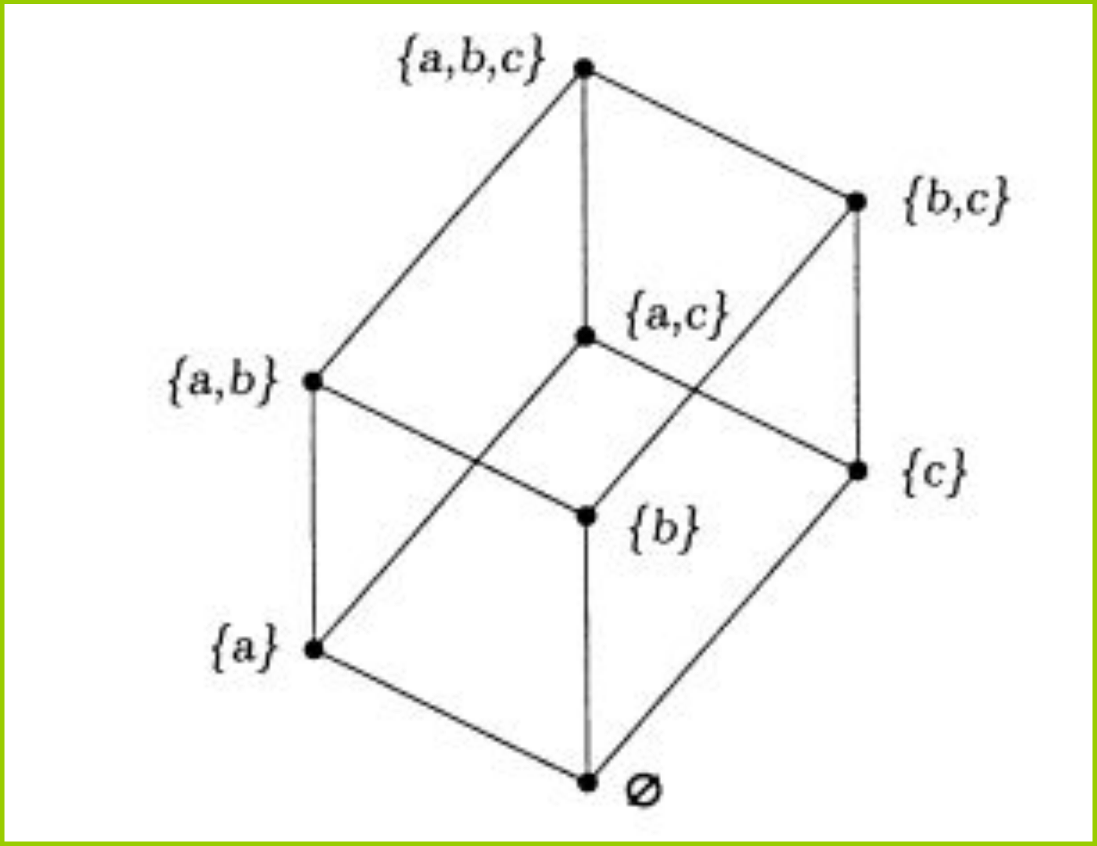
## *Пример*

Диаграмма Гессе, соответствующая множеству ($T$, $\leq_1$)



## *Пример*

Диаграмма Гессе, соответствующая множеству ($S$, $\leq_3$)



# Матрицы инцидентности и смежности

Задание любой из этих матриц дает возможность восстановить граф

## *Определение*

Пусть *G* - граф. Пусть B – матрица, строки которой обозначены вершинами графа, а столбцы обозначены ребрами графа. Считаем, что вершины и ребра графа пронумерованы.

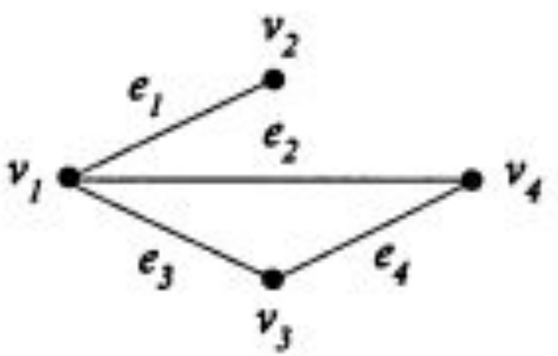
Элемент *i* –ой строки и *j* –го столбца

матрицы B ($B_{ij}$ ) равен 1, если *i*-ая вершина инцидентна *j*-му ребру, и равен 0 в противном случае.

Матрица B называется ***матрицей инцидентности*** графа *G*.

## *Пример*

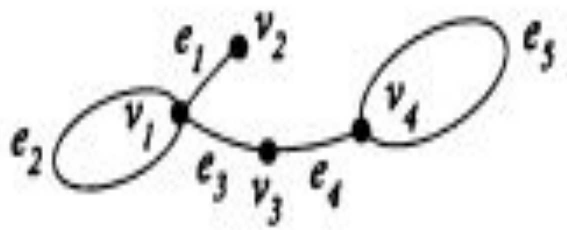
Пусть $G$ - граф. Его матрица инцидентности:




$$
\begin{array}{c|cccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\
\hline
v_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
v_4 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

## ***Пример***

Пусть *G* - граф. Его матрица инцидентности:



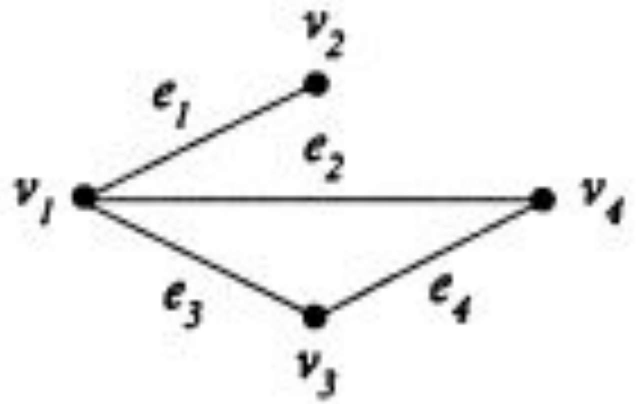

$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

## *Определение*

Пусть *G* – граф (ориентированный граф).
Пусть *B* – матрица, строки которой обозначены вершинами графа и столбцы обозначены теми же вершинами в том же самом порядке. Элемент *i*-ой строки и *j*-го столбца матрицы B, обозначаемый $B_{ij}$ , равен 1, если имеется ребро (ориентированное ребро) из *i*-ой вершины в *j*-ю вершину, и равен 0 в противоположном случае. Матрица *B* называется ***матрицей смежности*** графа *G*.

## *Пример*

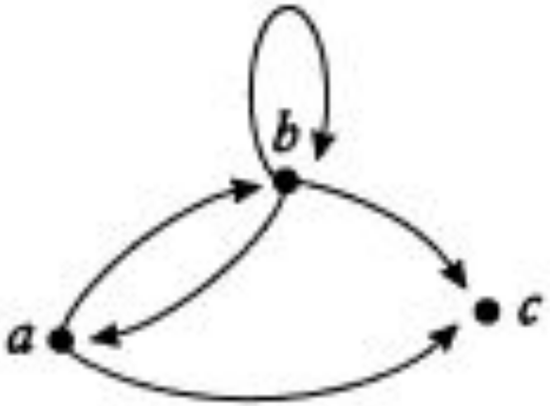
Пусть *G* - граф. Его матрица смежности:




$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

## *Пример*

Пусть G – ориентированный граф .
Его матрица смежности:




$$
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

## *Пример*

Матрица смежности для ориентированного графа, у которого четыре и восемь ребер :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Пусть матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

представляет собой матрицу смежности графа *G* с вершинами v1, v2, v4, v4.
Матрица

$$A^{\odot 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пусть матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

представляет собой матрицу смежности графа G с вершинами v1, v2, v4, v4.

$$\begin{aligned} A^{\odot 2}_{12} &= (A_{11} \wedge A_{12}) \vee (A_{12} \wedge A_{22}) \vee (A_{13} \wedge A_{32}) \vee (A_{14} \wedge A_{42}) = \\ &= (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = \\ &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{\odot 2}_{34} &= (A_{31} \wedge A_{14}) \vee (A_{32} \wedge A_{24}) \vee (A_{33} \wedge A_{34}) \vee (A_{34} \wedge A_{44}) = \\ &= (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = \\ &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \\ &= 0, \end{aligned}$$

***Теорема***

Пусть *G* – (ориентированный) граф с вершинами v1, v2, v3, …, $v_n$ и матрицей смежности *A*.
Путь длины *k*, или *k*-путь из $v_i$ в $v_j$ для $1 \le k \le n$ существует тогда и только тогда, когда

$$A_{ij}^{\odot k} = 1.$$

***Теорема***

Пусть *G* – (ориентированный) граф с вершинами v1, v2, v3, …, $v_n$ и матрицей смежности *A*.
Из вершины $v_i$ в $v_j$ имеется m путей длины *k*, где $1 \le k \le n$ тогда и только тогда, когда

$$A_{ij}^{k} = m.$$

# Алгебраические свойства графов

## Определение.

Функция $f$ из графа $G(V, E)$ в граф $G'(V', E')$ называется гомоморфизмом из $G$ в $G'$ и обозначается $f : G \to G'$, если обладает следующими свойствами:

- Если $e \in E$, то $f(e) \in E'$. ($f(E) \subseteq E'$).
- Если $v \in V$, то $f(v) \in V'$. ($f(V) \subseteq V'$).
- Если вершины $u$ и $v$ инцидентны ребру $e$ графа $G$, то вершины $f(u)$ и $f(v)$ инцидентны ребру $f(e)$ графа $G'$.

***Теорема.***

Если функция $f$ – гомоморфизм из $G$ в $G'$ , то $f(G)$ - подграф $(f(V), f(E))$ графа $G$'.

***Теорема.***

Если граф $G$ связный и $f$ – гомоморфизм, то граф $f(G)$ связный.

***Теорема.***

Если граф $G$ полный и $f$ – гомоморфизм, то граф $f(G)$ полный.

**Замечание.**

Многие свойства графа G не являются инвариантными относительно $f$.

## ***Определение.***

Гомоморфизм $f : G \to G'$, является ***изоморфизмом***, если $f : V \to V'$ и $f : E \to E'$ представляют собой взаимно однозначные соответствия. Если $f : G \to G'$ - изоморфизм, то $G$ и $G'$ называются ***изоморфными***.

Изоморфизм является переименованием вершин и ребер графа $V$, которое сохраняет свойство гомоморфности, так что если вершины $u$ и $v$ инцидентны ребру $e$ графа $G$, то вершины $f(u)$ и $f(v)$ инцидентны ребру $f(e)$ графа $G'$.

- Практически все свойства графов инвариантны относительно изоморфизма. Простейший способ показать ***неизоморфизм*** двух графов – установить свойство, которым обладает один граф и не обладает другой.

***Определение.***

Если граф $G(V, E)$ содержит ребро $e=\{v1, v2\}$ и граф $G'(V', E')$ получен из графа $G(V, E)$ добавлением новой вершины $v$ в множество $V$ и заменой ребра $\{v1, v2\}$ ребрами $=\{v1, v\}$ и $=\{v, v2\}$, то граф $G'(V', E')$ называется расширением графа $G(V, E)$. Если графы $G_1$, $G_2$, $G_3$, …, $G_n$ таковы, что $G_{i+1}$ является расширением графа $G_i$, то граф $G_n$ называют производными от графа $G_1$.

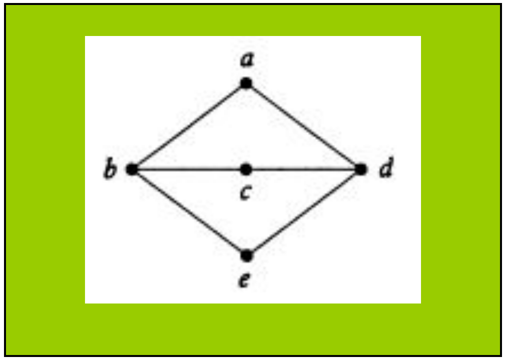
Если граф $G'(V', E')$ расширение графа $G(V, E)$, то посредине одного из ребер множества V появляется вершина, а исходное ребро делится на два новых ребра, которые соединяют вершины, инцидентные исходному ребру, и новую вершину.

***Определение.***

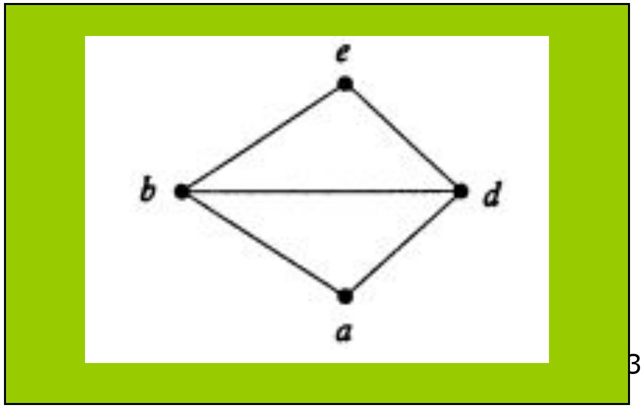
Графы *G* и *G′* называются ***гомеоморфными***, если существует граф *G''* такой, что оба графа, *G* и *G′* , являются производными от графа *G''* .

***Пример.***

Граф

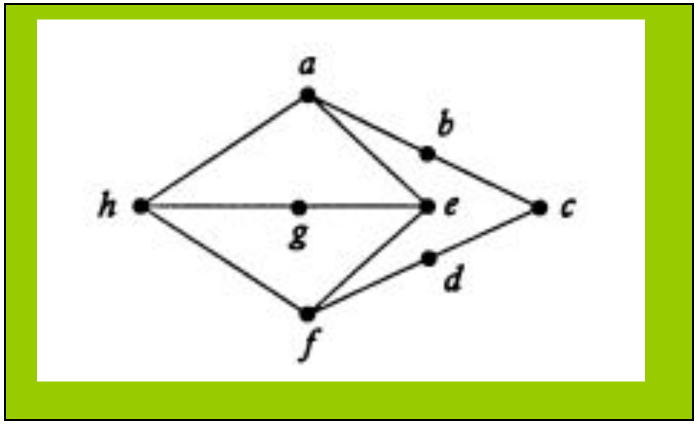



является расширением графа

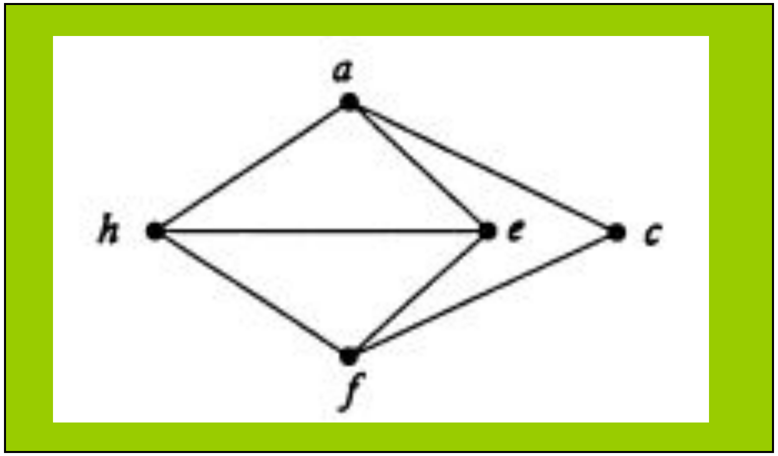


***Пример.***

Граф

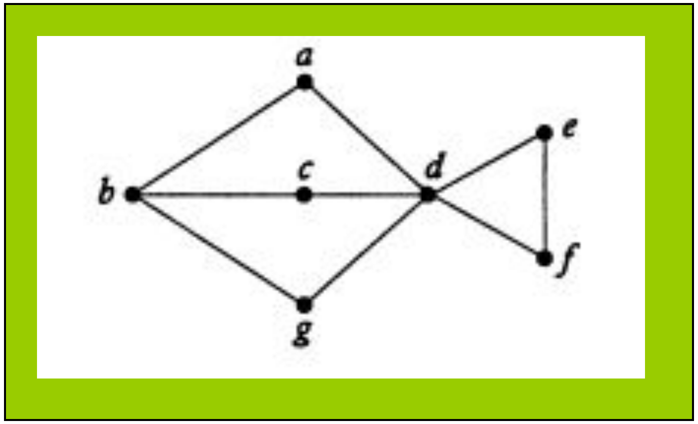



является производным от графа

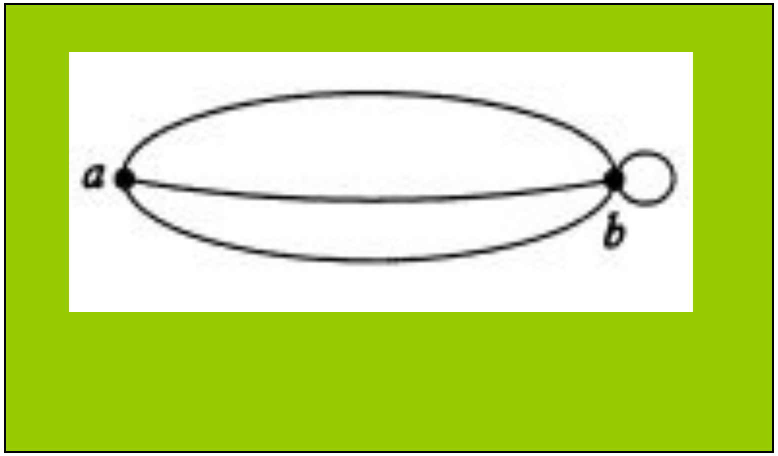


***Пример.***

Граф

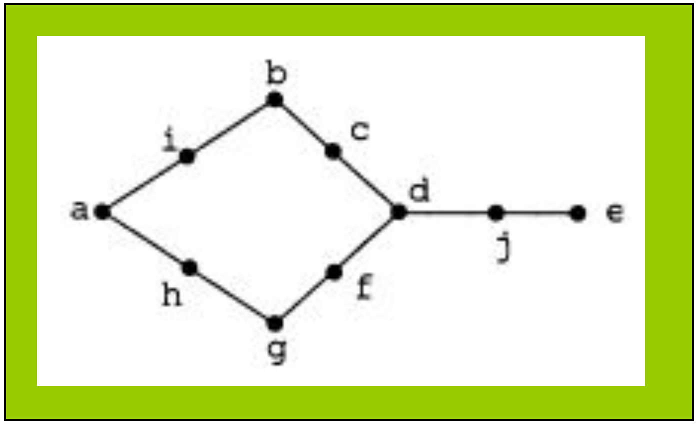



является производным от графа

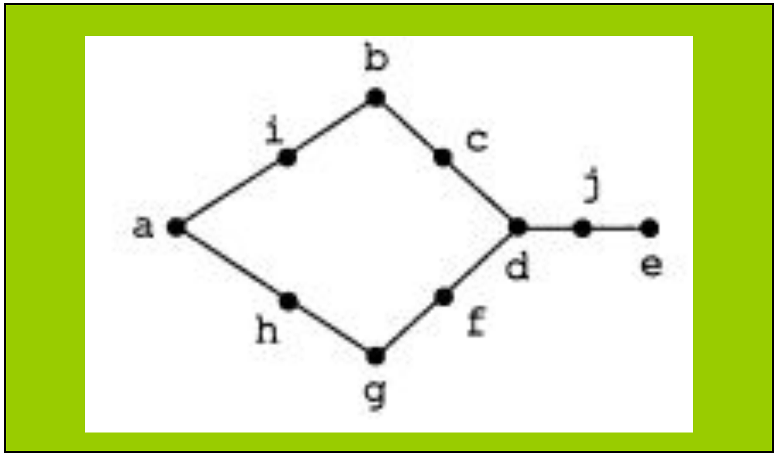


## ***Пример.***

Граф




является гомеоморфным графу



***Теорема.***

Если графы $G$ и $G'$ – гомеоморфны, то у них одинаковое количество вершин нечетной степени.

Доказательство:

Если граф $G'(V', E')$ – расширение графа $G(V, E)$, то новая добавленная вершина имеет степень 2. Степени других вершин не изменились.

***Теорема***

Если графы $G$ и $G'$ гомеоморфны, то граф $G$ имеет эйлеров цикл (собственный путь) тогда и только тогда, когда граф $G'$ имеет эйлеров цикл (собственный путь).

Если $G'$ - подграф графа $G$, то обозначается $G' \preceq G.$

***Определение.***

Пусть $G(V, E)$ - граф и $G_1$ , $G_2$ , $G_3$ , …, $G_n$ - подграфы графа $G$. Подграф $G'$ графа $G$ называется объединением графов $G_1$ , $G_2$ , $G_3$ , …, $G_n$ и обозначается

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

если

1. Вершина $v \in G'$ тогда и только тогда, когда $v \in G_i$ для некоторого $1 \le i \le n$.
2. Ребро $e \in G'$ тогда и только тогда, когда $e \in G_i$ для некоторого $1 \le i \le n$.

***Определение.***

Пусть $G(V, E)$ - граф и $G_1$ , $G_2$ , $G_3$ , …, $G_n$ - подграфы графа $G$. Подграф $G'$ графа $G$ называется пересечением графов $G_1$ , $G_2$ , $G_3$ , …, $G_n$ и обозначается

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i$$

если

1. Вершина $v \in G'$ тогда и только тогда, когда $v \in G_i$ для некоторого $1 \le i \le n$.
2. Ребро $e \in G'$ тогда и только тогда, когда $e \in G_i$ для некоторого $1 \le i \le n$.

***Определение.***

Пусть $G(V, E)$ - граф $G_1$ , $G_2$ , $G_3$ , …, $G_n$ - подграфы графа *G.* Подграфы $G_1$ , $G_2$ , $G_3$ , …, $G_n$ являются попарно непересекающимися, если $G_i \cap G_J = \varnothing$ для всех $1 \le i < j \le n$.

***Теорема.***

Если $G_1$ и $G_2$ – различные компоненты графа *G*, то $G_1$ и $G_2$ - попарно непересекающиеся.

***Теорема.***

Граф *G* является объединением попарно непересекающихся компонент.

***Определение.***

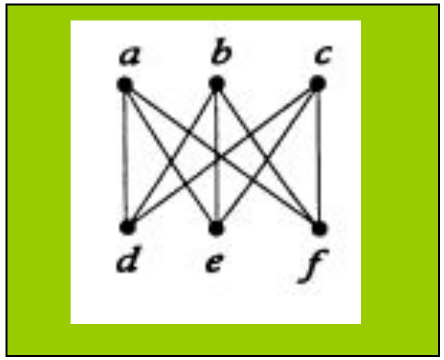
Пусть $G(V, E)$ - граф. ***Дополнением*** графа $G$ называется граф такой, что для всех вершин $u, v \in V$ ребро между вершинами $u$ и $v$ в графе $G^C$ существует тогда и только тогда, когда в графе $G$ отсутствует ребро, соединяющее $u$ и $v$.

***Определение.***

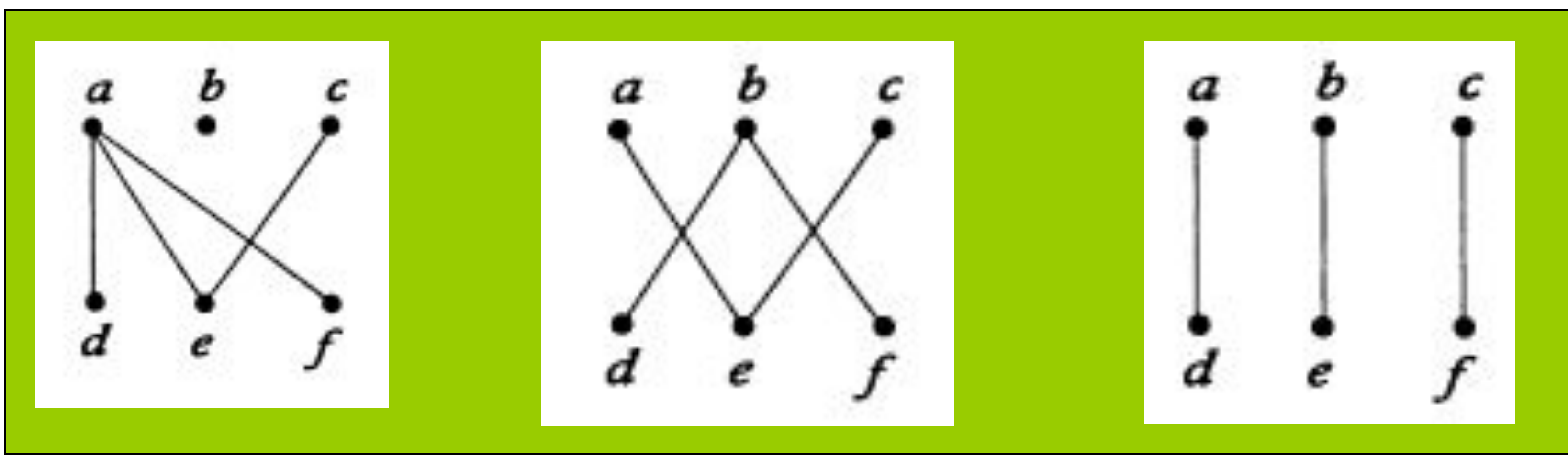
Подграф $G'(V', E')$ является ***остовным графом*** для графа $G(V, E)$, если $V' = V$.

***Пример.***

Для графа

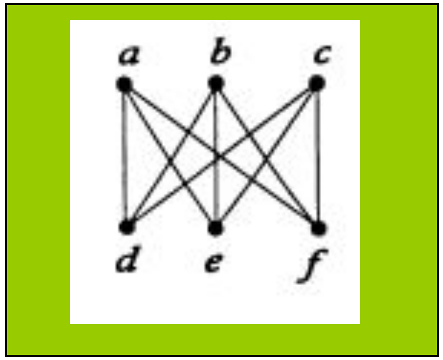



остовные графы

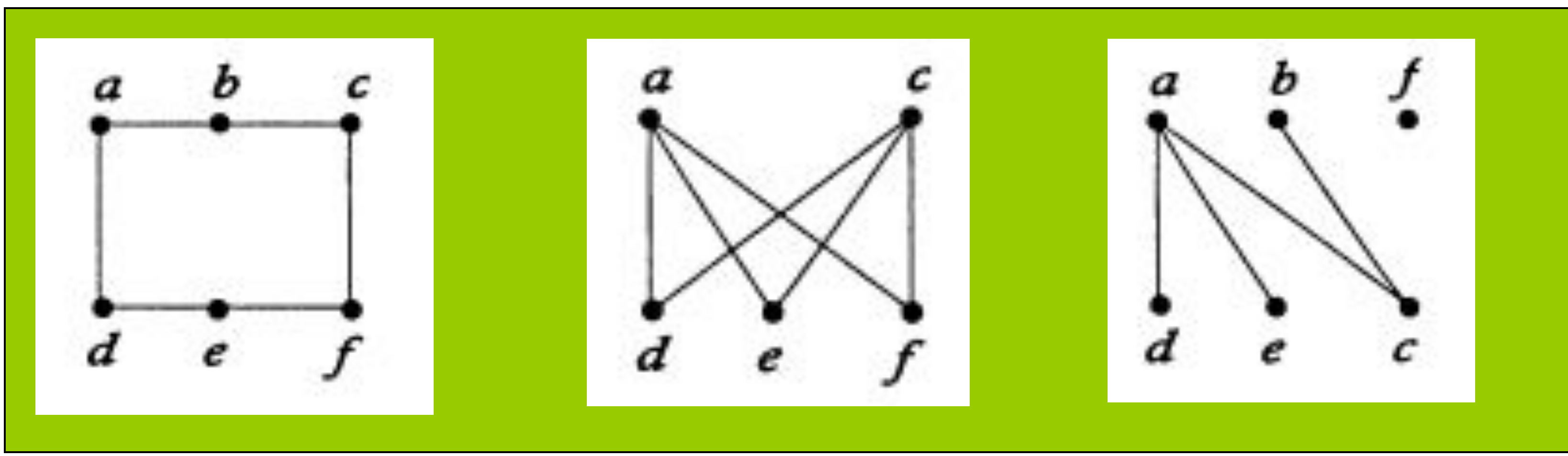


***Пример.***

Для графа




остовными **не** являются графы



***Определение.***

Дерево называется ***остовным деревом*** графа $G$, если оно является остовным графом графа $G$.

***Теорема.***

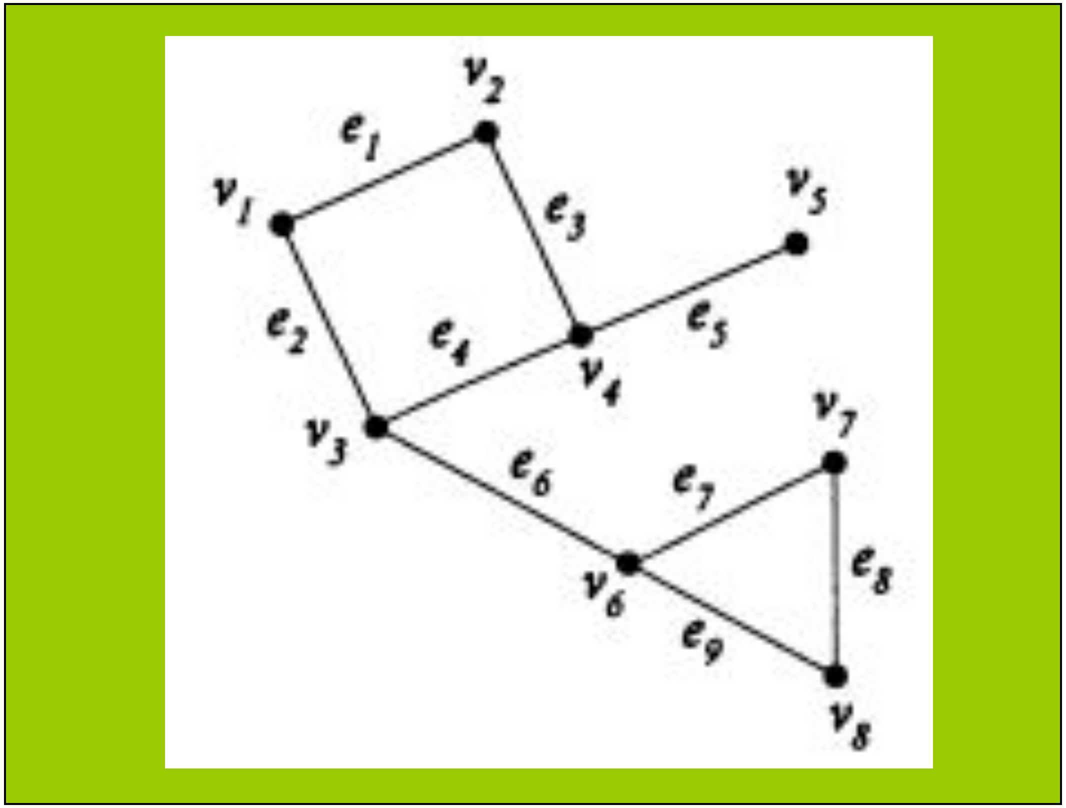
Если $T(V, E')$ - остовное дерево графа $G(V, E)$, то для любого цикла $v_0v_1v_2v_3v_4 \ldots v_0$, по крайней мере, одно из ребер принадлежит $E - E'$.

***Определение.***

Множество ребер $C$ графа $G(V, E)$ называется ***разрезающим множеством***, если удаление ребер из множества $C$ нарушает связность графа, а удаление собственного подмножества множества $C$ оставляет граф связным. Если множество $C$ состоит из одного ребра, то это ребро называется ***разрезающим ребром***.

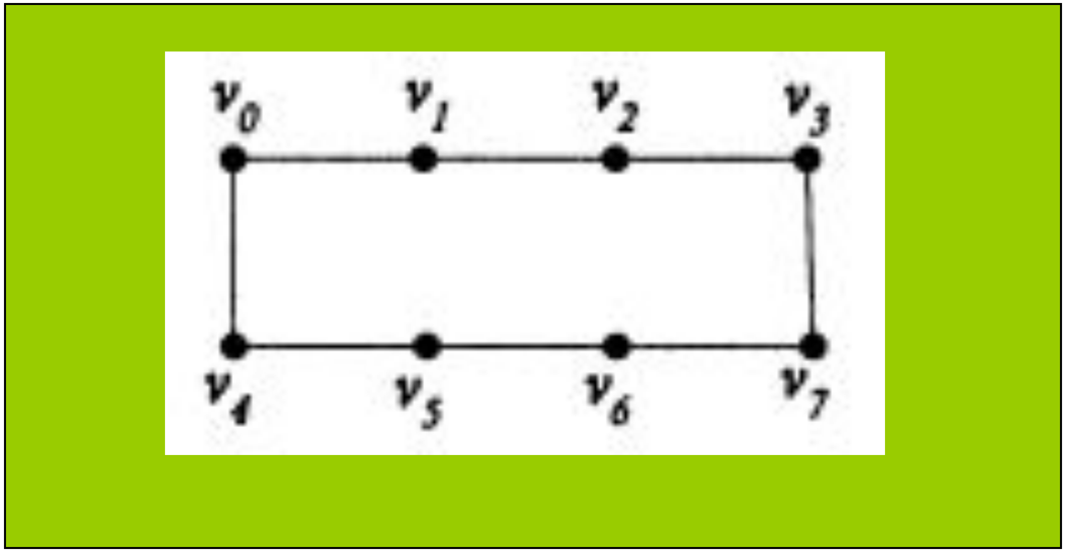
## *Пример.*

Для графа *e*5 и *e*6 – разрезающие ребра



***Пример.***

Для графа $\{\{v_1, v_2\}, \{v_5, v_6\}\}$ и $\{\{v_2, v_3\}, \{v_6, v_7\}\}$ – разрезающие множества



***Теорема.***

Если $T(V, E')$ - остовное дерево графа $G(V, E)$ и С – разрезающее множество графа $G$, то $C \cap E' \neq \varnothing$.

***Теорема.***

Ребро $e$ графа $G$ является разрезающим ребром графа $G$ тогда и только тогда, когда оно не входит в цикл графа $G$.

## Задача

Сколько городов лишится связи, если коммутационная сеть выйдет из строя в определенном городе (вершине графа).

Вопрос: Что произойдет, если удалить вершину графа?

***Определение.***

Вершина $a \in V$ связного графа $G=(V, E)$ является ***разрезающей вершиной***, или точкой сочленения, если удаление этой вершины и инцидентных ей ребер к нарушению связности графа.

***Определение.***

Граф $G=(V, E)$ называется ***двусвязным***, если не содержит точек сочленения.

## ***Теорема***

Вершина $a$ графа $G=(V, E)$ является точкой сочленения тогда и только тогда, когда существуют различные вершины $u$ и $v$ такие, что каждый путь из $v$ в $w$ проходит через $a$ .

Доказательство: *Достаточность*.

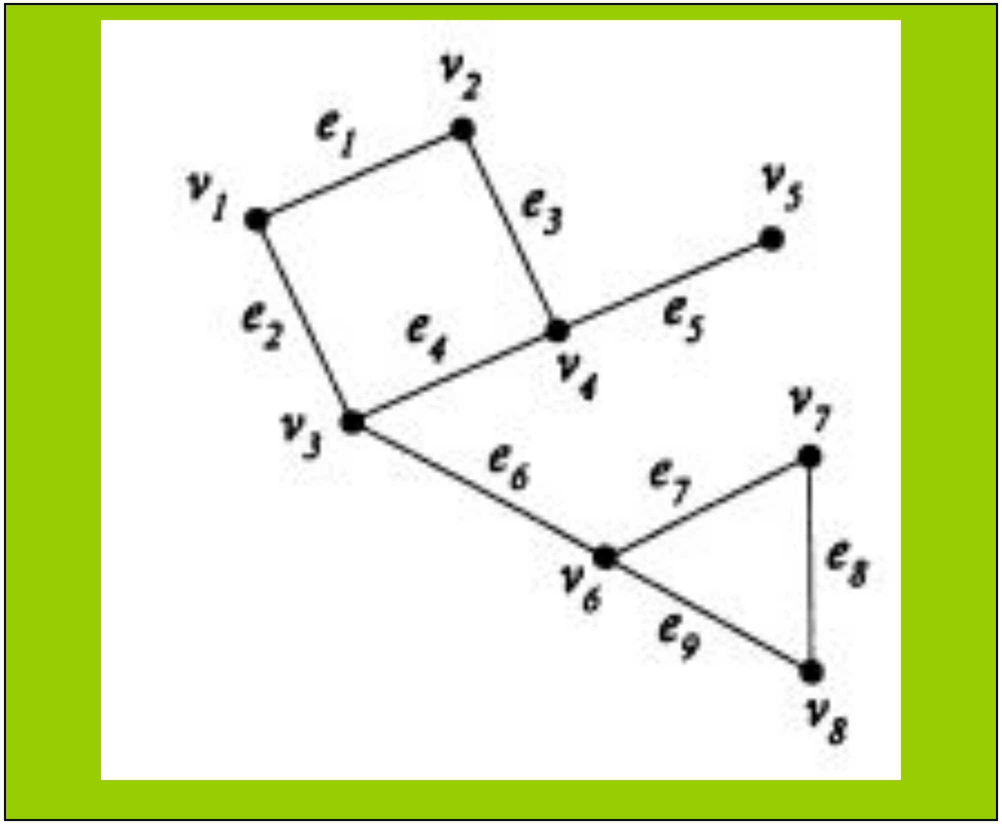
Предположим, каждый путь из вершины $v$ в $w$ проходит через вершину $a$. Если $a$ удалена ⇒ не существует более одного пути из $v$ в $w$ , граф $G$ становится несвязным. ⇒ Вершина $a$ – точка сочленения.

*Необходимость*.

Доказательство от противного. Пусть для каждой пары вершин $v$ и $w$ существует путь, который не проходит через $a$. При удалении вершины $a$ для всех $v , w \in V$ всегда остается путь из вершины $v$ в $w$ ⇒ граф $G$ остается связным ⇒ Вершина $a$ не является точкой сочленения.

## *Пример.*

Вершины  v3, v4, v6 – разрезающие вершины



## *Теорема*

Для связного графа $G=(V, E)$ определим отношение $R$ на $E$:

$e_1\ R\ e_2$ , если $e_1 = e_2$ или в графе G существует простой цикл, содержащий $e_1$ и $e_2$ в качестве ребер. Тогда отношение R является отношением эквивалентности.

***Определение.***

Пусть для каждого класса эквивалентности $E_i$ и отношения эквивалентности $R$ $V_i$ - множество вершин, инцидентных ребрам из множества $E_i$ и $G_i=(V_i, E_i)$ - подграф графа $G=(V, E)$ с вершинами $V_i$ и ребрами $E_i$ . Подграф $G_i=(V_i, E_i)$ называется ***компонентой двусвязности*** графа $G=(V, E)$.

***Теорема.***

Если $(a, b)$ и $(c, d)$ - различные ребра из компоненты двусвязности $G_i=(V_i, E_i)$ , то в графе $G_i=(V_i, E_i)$ существует простой цикл, содержащий в качестве ребер $(a, b)$ и $(c, d)$.

***Теорема.***

Если компонента двусвязности $G_i = (V_i, E_i)$ состоит из единственного ребра $e_i$, то $e_i$ - разрезающее ребро графа $G$.

***Теорема.***

Если каждые два различных ребра входят в общий простой цикл графа $G=(V, E)$, то граф $G=(V, E)$ - двусвязный.

***Следствие.***

Подграф $G=(V, E)$ - двусвязный.

***Теорема.***

Если $G_i = (V_i, E_i)$ и $G_J = (V_J, E_J)$ - компоненты двусвязности графа $G=(V, E)$, то $V_i \cap V_J$ содержит не более одной вершины.

***Теорема.***

Вершина $a$ является точкой сочленения тогда и только тогда, когда для некоторого $i \neq j$ эта вершина принадлежи $V_i \cap V_J$ для компонент двусвязности $G_i = (V_i, E_i)$ и $G_J = (V_J, E_J)$ .

***Теорема.***

Граф $G=(V, E)$ является двусвязным тогда и только тогда, когда любые два различных ребра входят в один и тот же простой цикл графа $G=(V, E)$.

***Теорема.***

Если $G_i = (V_i, E_i)$ - компонента двусвязности графа $G=(V, E)$ и $G_i = (V_i, E_i) \neq G = (V, E)$, то существует, по крайней мере, одна несовпадающая компонента дусвязности $G_J = (V_J, E_J)$ такая, что $V_i \cap V_J$ содержит ровно одну вершину.

# Последний слайд лекции