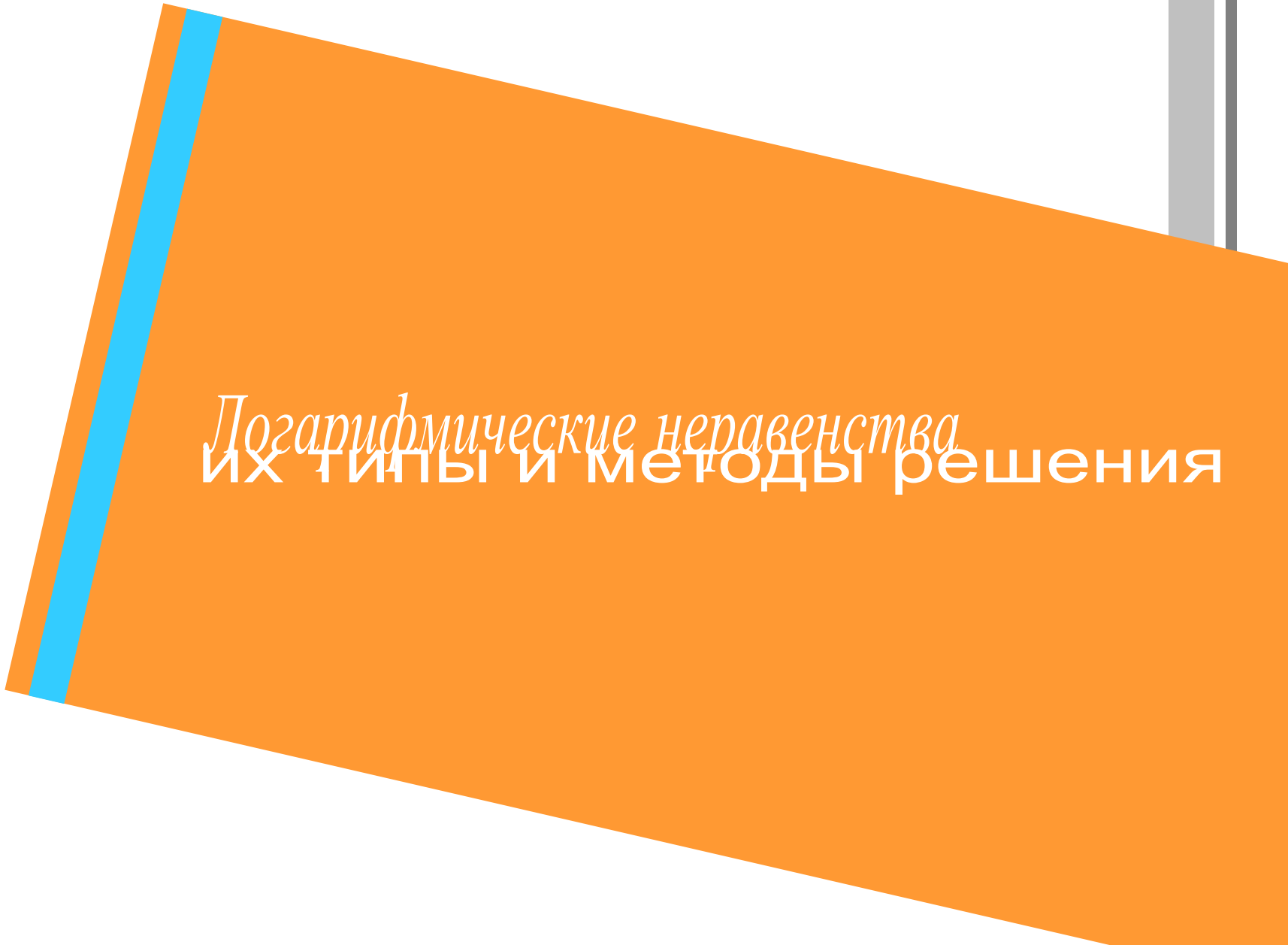




Логарифмические неравенства ИХ ТИПЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

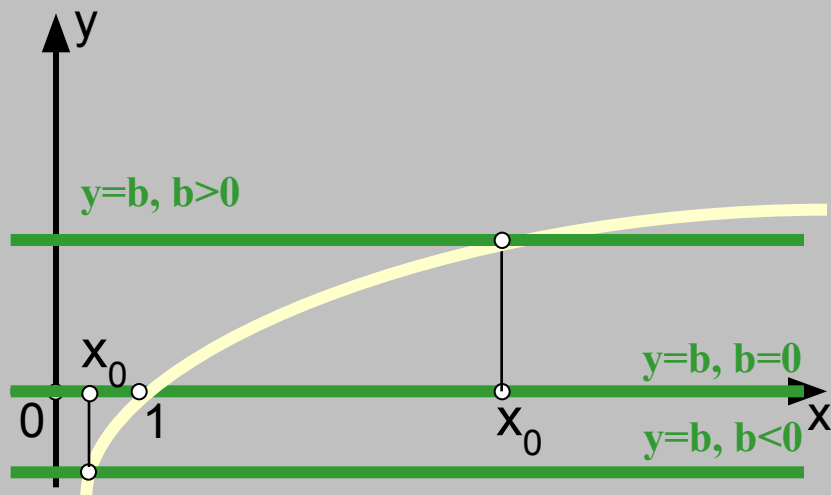
Концентрация внимания:

Вклад каждого учёного в развитие логарифмов	О т в е т
Непер	Изобрёл логарифмы, их название, создал первые таблицы логарифмов
Бюрги	Создатель таблиц логарифмов параллельно с Непером
Эйлер	Ввёл обозначение числа e и вычислил его с точностью до 23 знаков
Бриггс	Составил таблицы десятичных логарифмов
Оутред	Изобретатель логарифмической линейки
Ламберт	Доказал иррациональность числа e (т. е. число e не может быть квадратом какого-либо числа)
Эрмит	Доказал трансцендентность числа e (т.е. число e не может быть корнем какого-либо алгебраического уравнения)
Менголи	Ввёл термин « натуральные логарифмы »

Свойства функции	$a > 1$	$0 < a < 1$
1. Область определения	$(0; \infty)$	
2. Область значений	$(-\infty; \infty)$	
3. Четность, нечетность	Функция не является ни четной, ни нечетной	
4. Нули функции	$y = 0$ при $x = 1$	
5. Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ при $x \in (1; \infty)$ $y < 0$ при $x \in (0; 1)$	$y > 0$ при $x \in (0; 1)$ $y < 0$ при $x \in (1; \infty)$
6. Экстремумы	Функция экстремумов не имеет	
7. Промежутки монотонности при $x \in (0; \infty)$	Функция возрастает	Функция убывает
8. Асимптота	$x = 0$	

Рассмотрим взаимное расположение графика функции $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$) и прямой $y=b$

$$y=\log_a x \ (a>1)$$



$$y=\log_a x \ (0<a<1)$$

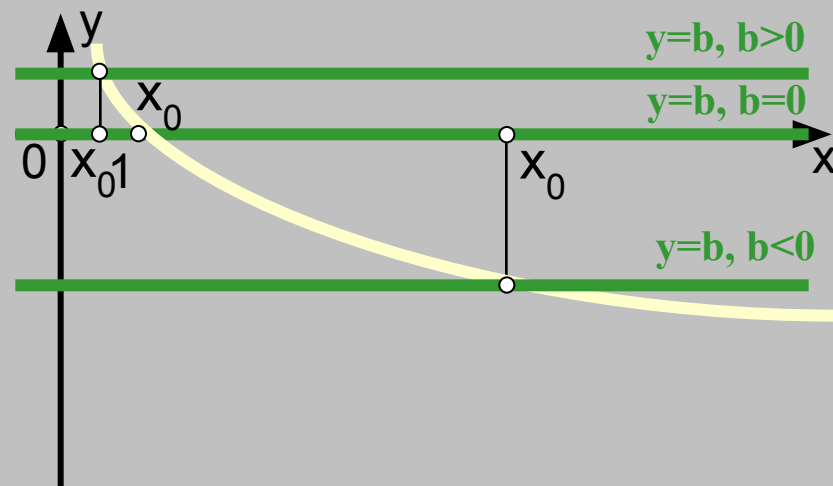


График функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) и прямая $y = b$ пересекаются в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = a^b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Пусть $a > 0, a \neq 1, b \in \mathbf{R}$, тогда
неравенства $\log_a x > b$ ($\log_a x \geq b$) или
 $\log_a x < b$ ($\log_a x \leq b$) называются
простейшими логарифмическими
неравенствами.

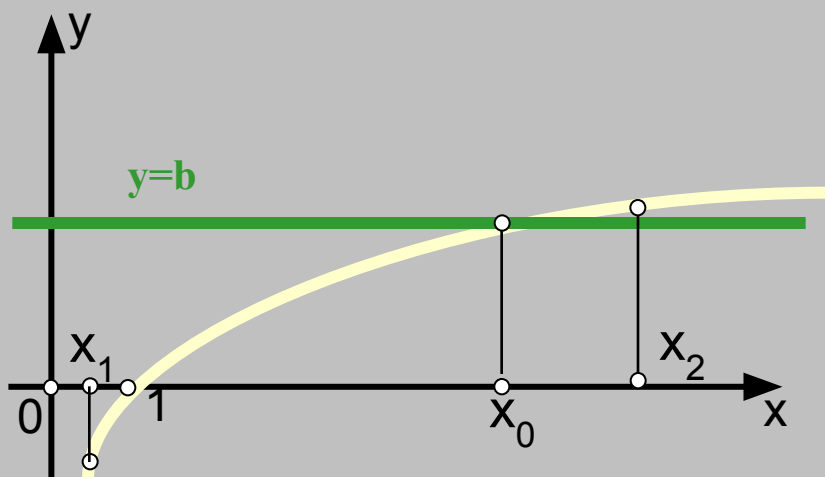
Что значит решить неравенство?

Решить неравенство - значит, найти все его решения или показать, что их нет.

Что называется решением неравенства?

Решением неравенства с
неизвестным x называют число x_0 , при
подстановке которого в неравенство вместо x
получается верное числовое неравенство.

$$y = \log_a x \quad (a > 1)$$

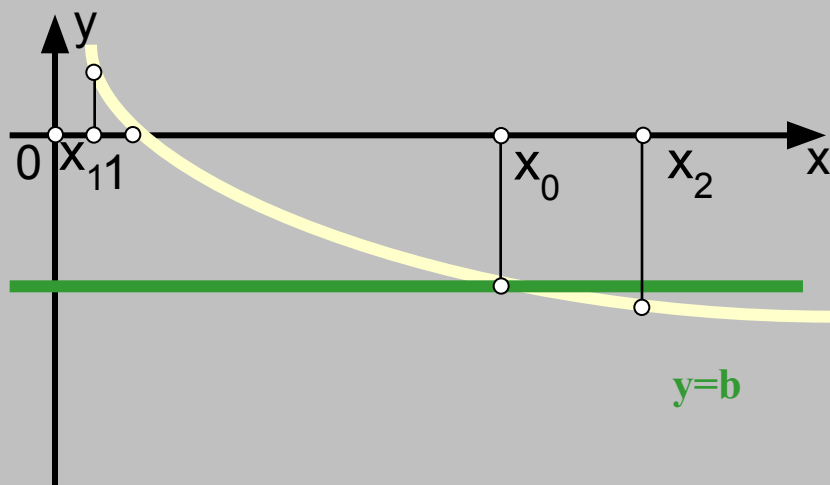


Если $a > 1$
 для каждого $x_2 > x_0$
 соответствующая точка графика
 функции $y = \log_a x$
 выше прямой $y = b$

для каждого $0 < x_1 < x_0$
 соответствующая точка графика
 функции $y = \log_a x$
 находится ниже прямой $y = b$

ВЫВОД №2:

$$y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$$



Если $0 < a < 1$
 для каждого $x_2 > x_0$
 соответствующая точка графика
 функции $y = \log_a x$
 ниже прямой
 $y = b$
 для каждого $0 < x_1 < x_0$
 соответствующая точка графика
 функции $y = \log_a x$
 находится выше прямой
 $y = b$

Простейшие логарифмические неравенства

$$a > 1$$

$$\log_a x > b$$

$$\log_a x \geq b$$

$$\log_a x < b$$

$$\log_a x \leq b$$

$$\log_a x > \log_a a^b$$

$$\log_a x \geq \log_a a^b$$

$$\log_a x < \log_a a^b$$

$$\log_a x \leq \log_a a^b$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x > a^b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \geq a^b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < a^b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \leq a^b; \end{cases}$$

$$x > a^b.$$

$$x \geq a^b.$$

$$0 < x < a^b.$$

$$0 < x \leq a^b.$$

Простейшие логарифмические неравенства

$$0 < a < 1$$

$$0 < a < 1$$

$$\log_a x > b$$

$$\log_a x \geq b$$

$$\log_a x < b$$

$$\log_a x \leq b$$

$$\log_a x > \log_a a^b$$

$$\log_a x \geq \log_a a^b$$

$$\log_a x < \log_a a^b$$

$$\log_a x \leq \log_a a^b$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < a^b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \leq a^b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x > a^b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \geq a^b; \end{cases}$$

$$0 < x < a^b.$$

$$0 < x \leq a^b.$$

$$x > a^b.$$

$$x \geq a^b.$$

1) Простейшие логарифмические неравенства

Пример №1

$$\log_{\frac{1}{3}}(5x - 1) > 0$$

Решение:

Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0, a \neq 1$; $y = \log_{\frac{1}{3}} t \left(0 < \frac{1}{3} < 1 \right)$ убывает на всей

области определения и $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 5x - 1 > 0, \\ 5x - 1 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0,2, \\ x < 0,4; \end{cases} \quad 0,2 < x < 0,4.$$

Ответ:
(0,2; 0,4)

1) Простейшие логарифмические неравенства

Пример №2

$$\log_{0,5}(4x - 3) > \log_{0,5}(x + 3)$$

Решение:

Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$; $y = \log_{0,5}t$ ($0 < 0,5 < 1$) убывает

на всей области определения, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4x - 3 < x + 3, \\ 4x - 3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > 0,75; \end{cases} \quad 0,75 < x < 2.$$

Ответ:
(0,75; 2)

2) Логарифмические неравенства, сводящиеся к простейшим логарифмическим неравенствам

Решение:

$$\log_5(3x-1) + \log_{\frac{1}{5}}(1+x^2) \geq 0,$$

$$\log_5(3x-1) - \log_5(1+x^2) \geq 0,$$

$$\log_5(3x-1) \geq \log_5(1+x^2).$$

Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0, a \neq 1$ и $y = \log_5 t$ ($5 > 1$) возрастает на всей области определения, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 1+x^2, \\ 1+x^2 > 0; \end{cases} \quad \text{т.к. } 1+x^2 > 0, \text{ при } x \in \mathbf{R}, \text{ то система равносильна неравенству}$$

$$3x-1 \geq 1+x^2. \quad x^2 - 3x + 2 \leq 0,$$

$$1 \leq x \leq 2.$$

Пример №1

$$\log_5(3x-1) + \log_{\frac{1}{5}}(1+x^2) \geq 0$$

Ответ: $[1; 2]$

2) Логарифмические неравенства, сводящиеся к простейшим логарифмическим неравенствам

Решение:

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x \leq 6,$$

$$\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x \leq 6,$$

$$2\log_3 x \leq 6,$$

$$\log_3 x \leq 3.$$

Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0, a \neq 1$; $y = \log_3 t$ ($3 > 1$) возрастает на всей

области определения и $3 = \log_3 27$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \leq 27; \end{cases} \quad 0 < x \leq 27.$$

Пример №2

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x \leq 6$$

Ответ:
(0;27]

2) Логарифмические неравенства, сводящиеся к простейшим логарифмическим неравенствам

Решение:

Пример №3

$$\log_{0,5}(x - 0,5) + \log_{0,5}(x - 1) \geq 1$$

$$\log_{0,5}(x - 0,5) + \log_{0,5}(x - 1) \geq 1.$$

Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$;

$y = \log_{0,5} t$ ($0 < 0,5 < 1$) убывает на всей области определения и $\log_{0,5} 0,5 = 1$,

то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - 0,5 > 0, \\ x - 1 > 0, \\ \log_{0,5}(x - 0,5) + \log_{0,5}(x - 1) \geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0,5, \\ x > 1, \\ \log_{0,5}(x - 0,5)(x - 1) \geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ (x - 0,5)(x - 1) \leq 0,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 1,5x \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ 0 \leq x \leq 1,5; \end{cases} \quad 1 < x \leq 1,5.$$

Ответ:

$(1; 1,5]$

2) Логарифмические неравенства, сводящиеся к простейшим логарифмическим неравенствам

Решение:

$$1 - \log_5(x - 3) \leq \log_5(x + 1).$$

Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0, a \neq 1$; $y = \log_5 t$ ($5 > 1$)

возрастает на всей области определения и $1 = \log_5 5$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ 1 - \log_5(x - 3) \leq \log_5(x + 1); \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x > -1, \\ \log_5(x + 1) + \log_5(x - 3) \geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ \log_5(x + 1)(x - 3) \geq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ (x + 1)(x - 3) \geq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 2x - 8 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ \begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq 4; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x > 3, \\ x \leq -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ x \geq 4; \end{cases} \end{cases} \quad x \geq 4.$$

Пример №4

$$1 - \log_5(x - 3) \leq \log_5(x + 1)$$

Ответ:
[4; ∞)

3) Логарифмические неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени

Решение:

$$2\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 5\log_{\frac{1}{2}} x + 2 > 0.$$

Пусть $\log_{\frac{1}{2}} x = t$, тогда $2t^2 - 5t + 2 > 0$, $\begin{cases} t < 0,5, \\ t > 2. \end{cases}$

Вернёмся к переменной x Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0, a \neq 1$, то

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_{0,5} x < 0,5, \\ \log_{0,5} x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ -\log_2 x < 0,5, \\ -\log_2 x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x > -0,5, \\ \log_2 x < -2; \end{cases}$$

$y = \log_2 x$ ($2 > 1$) возрастает на всей области определения, то

$$\begin{cases} x > 0, \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ x < \frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < \frac{1}{4}, \\ x > 0, \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{4}, \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Пример №1

$$2\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 5\log_{\frac{1}{2}} x + 2 > 0$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$

3) Логарифмические неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени

Решение:

$\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_3(3x) < -4\log_3 x + 4$. Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0, a \neq 1$, то для нахождения области допустимых значений переменной x составим систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} > 0, \\ 3x > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{В найденной области допустимых значений переменной } x \text{ преобразуем} \\ \text{неравенство.} \end{array}$$

$$\begin{cases} \log_3 x < 1, \\ \log_3 x > 3; \end{cases} \quad y = \log_3 t \quad (3 > 1)$$

возрастает на всей области определения и $1 = \log_3 3$, а также $3 = \log_3 27$.

$\begin{cases} x < 3, \\ x > 27. \end{cases}$ учёт области допустимых значений переменной x получим:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < 3, \\ x > 27; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < 3, \\ x > 0, \\ x > 27; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 3, \\ x > 27. \end{cases}$$

Пример №2

$$\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_3(3x) < -4\log_3 x + 4$$

Ответ:

$$(0; 3) \cup (27; \infty)$$

4) Логарифмические неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам

Решение:

Пусть $\lg x = t$ и $\lg 0,1 = -1$, тогда

$$\frac{2}{t-1} - \frac{1}{t} > 0,$$

$$\frac{t+1}{t(t-1)} > 0,$$

$$\begin{cases} -1 < t < 0, \\ t > 1. \end{cases}$$

Вернёмся к переменной x Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0, a \neq 1$, то

$$\begin{cases} x > 0, \\ -1 < \lg x < 0, \\ \lg x > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg 0,1 < \lg x < \lg 1, \\ \lg x > \lg 10; \end{cases}$$

$y = \lg x$ ($10 > 1$)
возрастает на всей
области определения

$$\begin{cases} x > 0, \\ 0,1 < x < 1, \\ x > 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 0,1 < x < 1, \\ x > 0, \\ x > 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,1 < x < 1, \\ x > 10. \end{cases}$$

Ответ:

$$(0;1) \cup (10;\infty)$$

4) Логарифмические неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам

Решение:

Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$, то $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

В найденной области допустимых значений переменной x преобразуем данное неравенство к виду:

$$-\log_3 x < \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2}.$$

Пусть $\log_3 x = t$. Тогда $-t < \frac{1}{t} - \frac{5}{2}$,

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} > 0, \quad \frac{(t-2)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{t} > 0, \quad \begin{cases} 0 < t < \frac{1}{2}, \\ t > 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ \begin{cases} 1 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9. \end{cases}$$

Пример №2

$$\log_{\frac{1}{3}} x < \log_x 3 - \frac{5}{2}$$

Вернёмся к переменной x .

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ \begin{cases} 0 < \log_3 x < \frac{1}{2}, \\ \log_3 x > 2; \end{cases} \end{cases} \quad y = \log_3 r \quad (3 > 1)$$

возрастает на

всей области определения и

$$\frac{1}{2} = \log_3 \sqrt{3}, \quad 2 = \log_3 9$$

Ответ:

$$(1; \sqrt{3}) \cup (9; \infty)$$

5) Логарифмические неравенства с переменной в основании и под знаком логарифма

Решение:

Пример №1

$$\log_{1-3x} 3 < 0$$

$$\log_{1-3x} 3 < 0.$$

Т.к. $\log_{1-3x} 3 < 0$ и $3 > 1$, то

$$0 < 1 - 3x < 1,$$

$$-1 < -3x < 0,$$

$$0 < x < \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

5) Логарифмические неравенства с переменной в основании и под знаком логарифма

Решение:

Пример №2

$$\log_x(2x + 5) > 1$$

$$\log_x(2x + 5) > 1,$$

$$\log_x(2x + 5) > \log_x x.$$

Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0, a \neq 1$, то

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 5 > 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ 2x + 5 < x, \\ x > 1 \\ 2x + 5 > x; \end{array} \right. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x > -2,5, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ x < -5, \\ x > 1, \\ x > -5; \end{array} \right. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x > -2,5, \\ x > 1; \end{array} \right. \quad x > 1.$$

Ответ:

$$(1; \infty)$$

5) Логарифмические неравенства с переменной в основании и под знаком логарифма

Решение:

$$\log_x (2x + 3) \leq 2,$$

$$\log_x (2x + 3) \leq \log_x x^2.$$

Т.к. $D(\log_a) = (0; \infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$, то

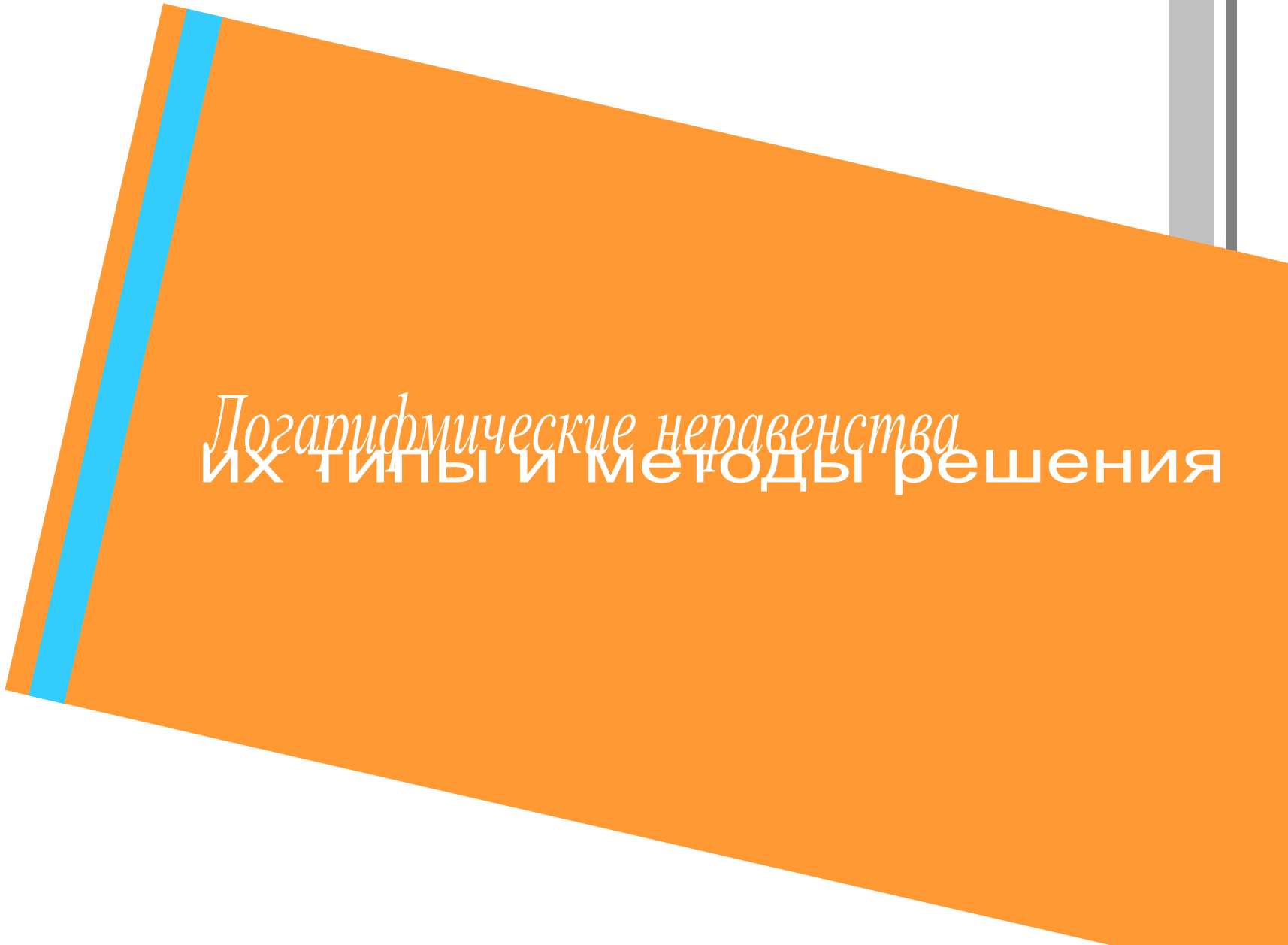
$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3 > 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ 2x + 3 \geq x^2, \end{array} \right. \\ x > 1, \\ 2x + 3 \leq x^2; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > -1,5, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0, \end{array} \right. \\ x > 1, \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > -1,5, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ -1 \leq x \leq 3, \end{array} \right. \\ x > 1, \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq -1, \\ x \geq 3; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > -1,5, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ x \geq 3; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ x \geq 3. \end{array} \right.$$

Пример №3

$$\log_x (2x + 3) \leq 2$$

Ответ:

$$(0; 1) \cup [3; \infty)$$



Логарифмические неравенства ИХ ТИПЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ