Лекция №3

Кинематический анализ рычажных механизмов

Задачей кинематического анализа рычажных механизмов является определение кинематических параметров и кинематических характеристик всех звеньев и характерных точек механизмов по заданному закону движения входного (ведущего звена).

Характерные точки механизма – это центры масс звеньев, центры кинематических пар, к которым присоединяются дополнительные кинематические цепи или исполнительные устройства и др.

Кинематические параметры звеньев – это их положения, скорости и ускорения, линейные или угловые.

Кинематические параметры точек – это координаты их положения, линейные скорости и ускорения.

Кинематические характеристики – это зависимости кинематических параметров от положения ведущего звена механизма во всем диапазоне его работы.

Сложность кинематического анализа зависит не столько от числа звеньев механизма, сколько от его класса.

Кинематические характеристики необходимы инженеру для оценки работоспособности механизмов не только на стадии проектирования, но и в эксплуатации (в особенности при модернизации машин).

Анализ выполняют по кинематической схеме, которая в отличии от структурной схемы содержит размеры звеньев, необходимые для расчета.

Для кинематического анализа рычажных механизмов используют аналитические, графические и экспериментальные методы.

Аналитический метод кинематического анализа рычажных механизмов

Наиболее распространенным методом является метод замкнутых векторных контуров. Для его использования вдоль каждого звена, составляющего замкнутый контур, направляют вектор. Угловое положение его определяется углом, положительное направление которого отсчитывается в направлении против часовой стрелки от положительной полуоси абсцисс. Метод сводится к совместному решению уравнений проекций на оси координат векторного контура механизма с последующим дифференцированием полученных уравнений для определения скоростей и ускорений.

Кривошипно-ползунный механизм. Кинематическая схема механизма приведена на рис. 2.5, *а*. Для механизма известны: длины звеньев $l_1 = l_{OA}$; $l_2 = l_{AB}$; угловая скорость начального звена $\omega_1 = \mathrm{const}$; расположение центра тяжести звена 2 – точки S_2. Необходимо определить кинематические параметры звеньев 2 и 3 в функции положения ведущего звена $\varphi_1 : \varphi_2(\varphi_1), \omega_2(\varphi_1), \varepsilon_2(\varphi_1), x_B(\varphi_1), \upsilon_B(\varphi_1), a_B(\varphi_1),$ а также закон движения точки S_2: $x_{S2}(\varphi_1), y_{S2}(\varphi_1), \upsilon_{S2}(\varphi_1), a_{S2}(\varphi_1).$

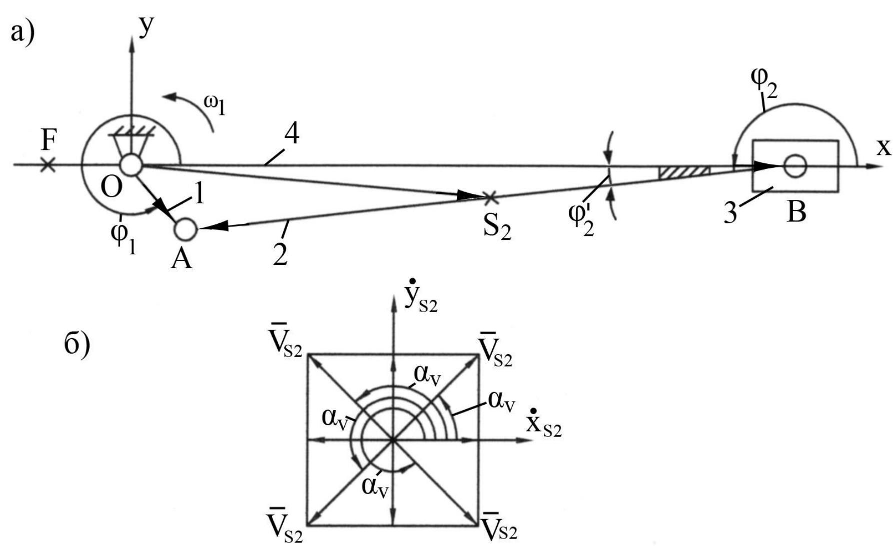


Рис. 2.5

Векторное уравнение замкнутого треугольника имеет вид

$$\bar{\ell}_{OB} + \bar{\ell}_{BA} = \bar{\ell}_{OA} \qquad (2.2)$$

Спроектируем векторное уравнение на оси координат x и y

$$\left.\begin{aligned} x_B + \ell_2 \cos\varphi_2 = \ell_1 \cos\varphi_{1,} \\ \ell_2 \sin\varphi_2 = \ell_1 \sin\varphi_{1.} \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

С помощью второго уравнения системы уравнений (2.3) можно определить угол φ_2

$$\varphi_2 = 2\pi + \varphi_2' \quad \text{при} \quad x_F = +1, \qquad (2.4)$$

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_2' \quad \text{при} \quad x_F = -1,$$

где φ_2' - острый угол

$$\varphi_2' = \arcsin\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\sin\varphi_1\right) \qquad (2.5)$$

x_F – признак сборки кривошипно-ползунного механизма

Из первого уравнения системы уравнений (2.3) можно определить координату точки B

$$x_B = -\ell_2 \cos\varphi_2 + \ell_1 \cos\varphi_1 = x_B(\varphi_1). \qquad (2.6)$$

Определение скоростей и ускорений звеньев кривошипно-ползунного механизма

Для определения скоростей звеньев 2 и 3 продифференцируем систему двух уравнений (2.3) по времени

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_B}{dt} - \ell_2 \sin\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = -\ell_1 \sin\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \\ &\ell_2 \cos\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = \ell_1 \cos\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

Или с учетом равенств

$$\frac{dx_B}{dt} = \upsilon_{B,} \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$$

будем иметь систему

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon_B - \ell_2\omega_2 \sin\varphi_2 = -\ell_1\omega_1 \sin\varphi_1, \\ &\ell_2\omega_2 \cos\varphi_2 = \ell_1\omega_1 \cos\varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

Из второго уравнения системы уравнений (2.8) получим выражение для ω_2, а из первого – для υ_B:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\ell_1 \cos\varphi_1}{\ell_2 \cos\varphi_2} = \omega_2(\varphi_1); \quad (2.9)$$

$$\upsilon_B = \ell_2\omega_2 \sin\varphi_2 - \ell_1\omega_1 \sin\varphi_1 = \upsilon_B(\varphi_1). \quad (2.10)$$

Повторное дифференцирование системы уравнений (2.8) позволяет получить выражения для ускорений звеньев 2 и 3. С учетом равенств

$$\frac{d\upsilon_B}{dt} = a_B, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2, \quad \frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon_1 = 0$$

эти выражения имеют вид

$$\varepsilon_2 = \frac{\ell_2\omega_2^2 \sin\varphi_2 - \ell_1\omega_1^2 \sin\varphi_1}{\ell_2 \cos\varphi_2} = \varepsilon_2(\varphi_1); \quad (2.11)$$

$$a_B = \ell_2\varepsilon_2 \sin\varphi_2 + \ell_2\omega_2^2 \cos\varphi_2 - \ell_1\omega_1^2 \cos\varphi_1 = a_B(\varphi_1). \quad (2.12)$$

Определение закона движения центра тяжести звена 2 (т. S_2)

Для определения закона движения центра тяжести звена 2 – точки S_2 составим новый замкнутый векторный контур OS_2A (рис. 2.5, *а*). Векторное уравнение его имеет вид

$$\bar{\ell}_{OS2} + \bar{\ell}_{S2A} = \bar{\ell}_{OA}. \qquad (2.13)$$

Проектируя уравнение на оси координат, получим координаты точки S_2

$$\left.\begin{aligned} x_{S2} &= -\ell_{AS2}\cos\varphi_2 + \ell_1\cos\varphi_1, \\ y_{S2} &= -\ell_{AS2}\sin\varphi_2 + \ell_1\sin\varphi_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

Первая и вторая производные от x_{S2} и y_{S2} дадут значения составляющих скорости и ускорения точки S_2

$$\dot{x}_{S2} = \ell_{AS2}\omega_2\sin\varphi_2 - \ell_1\omega_1\sin\varphi_1; \qquad (2.15)$$

$$\dot{y}_{S2} = -\ell_{AS2}\omega_2\cos\varphi_2 + \ell_1\omega_1\cos\varphi_1; \qquad (2.16)$$

$$\ddot{x}_{S2} = \ell_{AS2}\varepsilon_2\sin\varphi_2 + \ell_{AS2}\omega_2^2\cos\varphi_2 - \ell_1\omega_1^2\cos\varphi_1; \qquad (2.17)$$

$$\ddot{y}_{S2} = -\ell_{AS2}\varepsilon_2\cos\varphi_2 + \ell_{AS2}\omega_2^2\sin\varphi_2 - \ell_1\omega_1^2\sin\varphi_1. \qquad (2.18)$$

Значения полных векторов скорости и ускорения точки будут

$$V_{S2} = \sqrt{\dot{x}_{S2}^2 + \dot{y}_{S2}^2}, \qquad (2.19)$$

$$a_{S2} = \sqrt{\ddot{x}_{S2}^2 + \ddot{y}_{S2}^2}. \qquad (2.20)$$

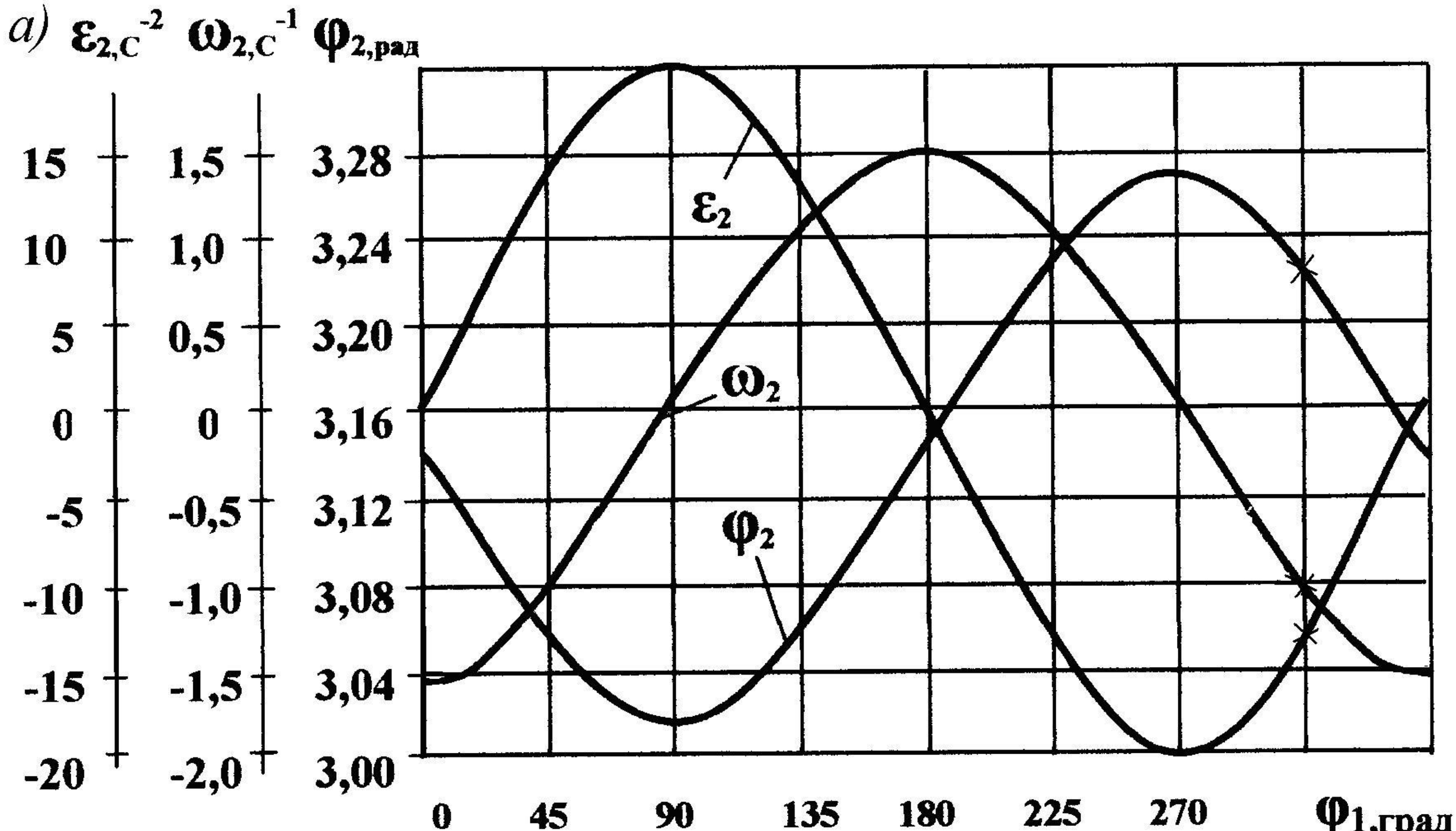
Положение вектора скорости относительно оси определяется углом α_V (рис. 2.5, б)

$$\alpha_V = \mathrm{arctg}\left(\frac{\dot{y}_{S2}}{\dot{x}_{S2}}\right) \quad \text{при} \quad \dot{x}_{S2} > 0; \qquad (2.21)$$

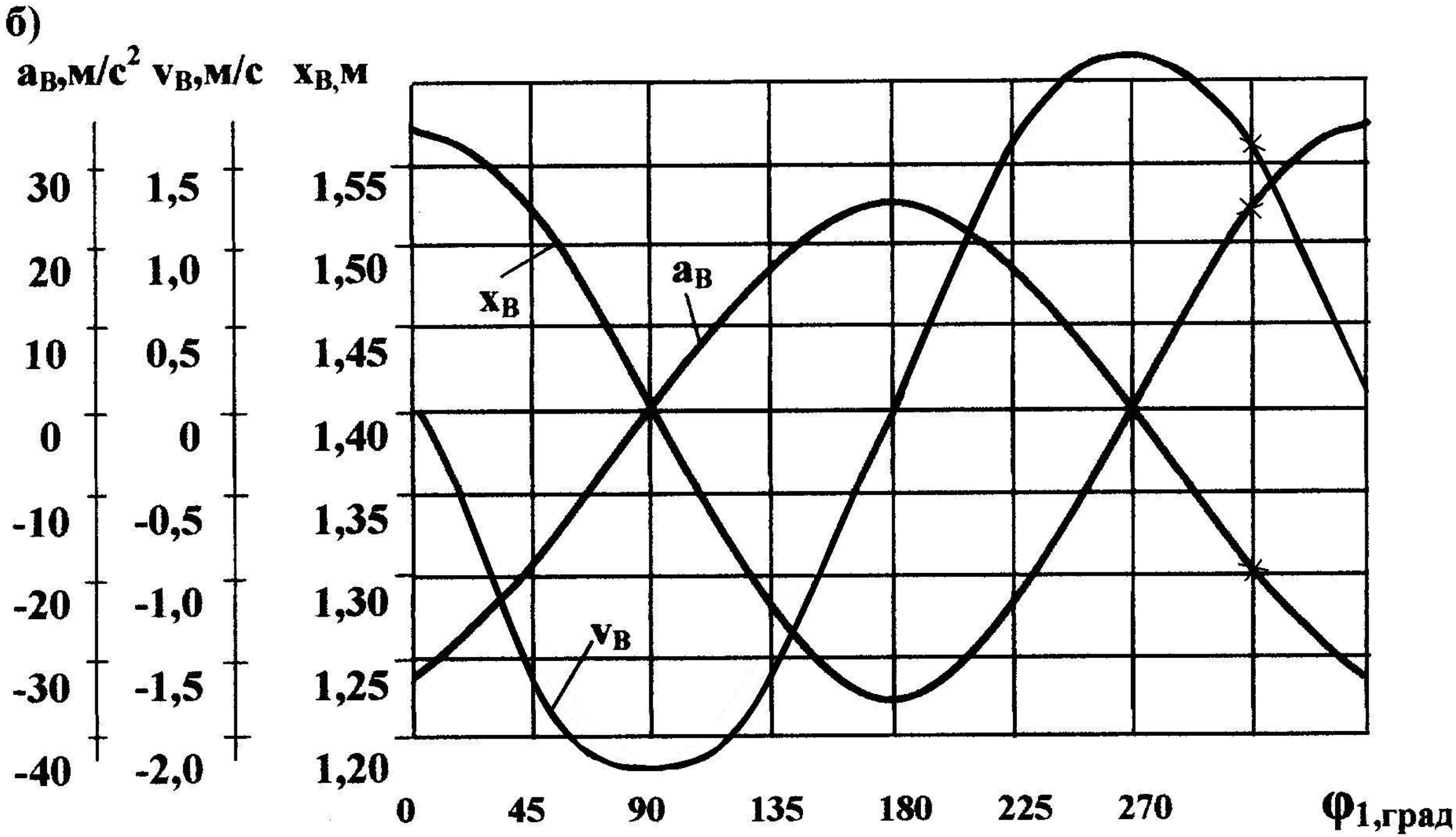
$$\alpha_V = \mathrm{arctg}\left(\frac{\dot{y}_{S2}}{\dot{x}_{S2}}\right) + \pi \quad \text{при} \quad \dot{x}_{S2} < 0.$$

Аналогично определяется положение вектора ускорения углом α_α

Кинематические характеристики звена 2



Кинематические характеристики звена 2



Кинематический анализ механизма с гидроцилиндром аналитическим методом
Постановка задачи

Кинематическая схема механизма приведена на рис. 2.7. Обобщенной координатой здесь является положение поршня со штоком 2 относительно гидроцилиндра 1 l_{21}. Известны длины звеньев $l_{AB}, l_{CB} = l_3, l_{AC} = l_4$; угол φ_4, определяющий положение стойки; скорость поршня относительно цилиндра v_{21}. Необходимо определить кинематические параметры звеньев 1-2 – гидроцилиндра с поршнем и коромысла 3 в функции обобщенной координаты: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_1(l_{21}), \varphi_3(l_{21}), \omega_1(l_{21}), \omega_3(l_{21}), \varepsilon_1(l_{21}), \varepsilon_3(l_{21})$.

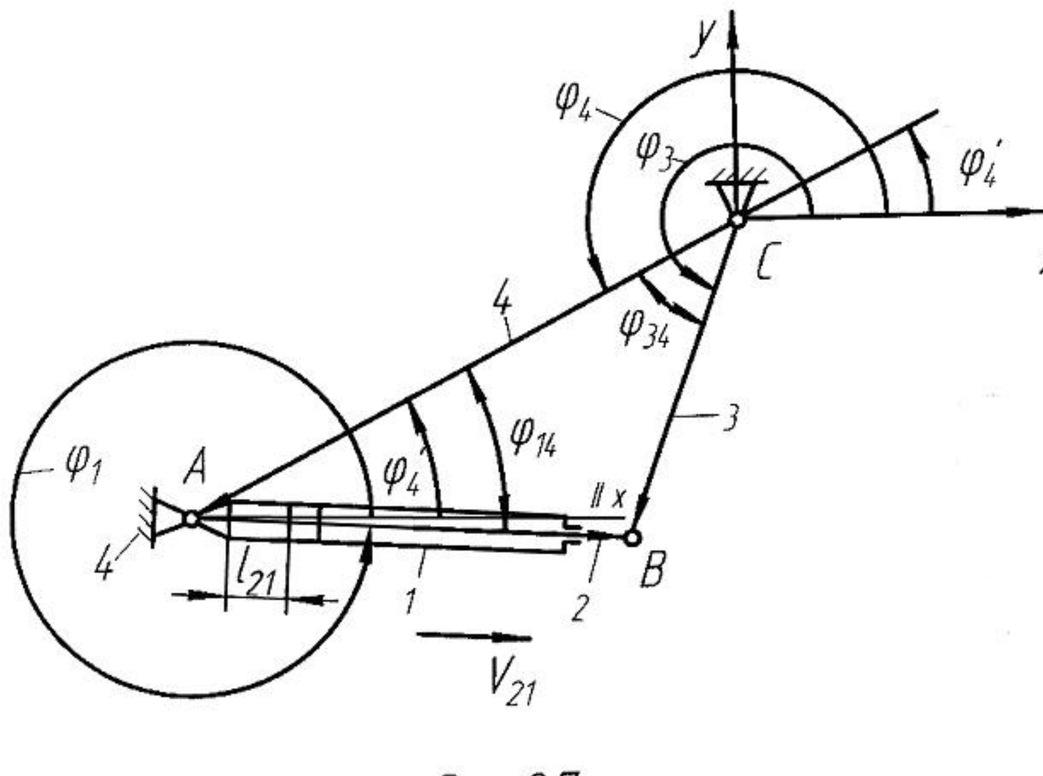


Рис. 2.7

Определение кинематических параметров звеньев механизма с гидроцилиндром

Векторное уравнение замкнутости контура АВС имеет вид $\bar{l}_4 + \bar{l}_{AB} = \bar{l}_3.$

Проекции векторного уравнения на оси координат x и y дадут систему уравнений, из которой можно определить искомые углы φ_1 и φ_3:

$$\left.\begin{aligned} l_4 \cos\varphi_4 + l_{AB}\cos\varphi_1 &= l_3\cos\varphi_3, \\ l_4 \sin\varphi_4 + l_{AB}\sin\varphi_1 &= l_3\sin\varphi_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2.24)$$

Здесь $l_{AB} = l_{AB\min} + l_{21}$ - длина гидроцилиндра со штоком поршня; $l_{AB\min}$ - расстояние между точками А и В при вдвинутом поршне.

Для определения угловых скоростей звеньев 1-2 и 3 необходимо продифференцировать по времени систему уравнений (2.24). С учетом равенств

$$\frac{dl_{AB}}{dt} = \upsilon_{21}, \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1, \frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3$$

будем иметь систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{21}\cos\varphi_1 - l_{AB}\omega_1\sin\varphi_1 + l_3\omega_3\sin\varphi_3 &= 0, \\ \upsilon_{21}\sin\varphi_1 + l_{AB}\omega_1\cos\varphi_1 - l_3\omega_3\cos\varphi_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Решая ее относительно неизвестных ω_1 и ω_3 путем несложных преобразований получим следующие выражения для угловых скоростей

$$\omega_1(l_{21}) = \frac{\upsilon_{21}}{l_{AB}\,\mathrm{tg}(\varphi_1 - \varphi_3)}; \qquad (2.26)$$

$$\omega_3(l_{21}) = -\frac{\upsilon_{21}}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}. \qquad (2.27)$$

Аналогично определяются угловые ускорения звеньев. Дифференцирование системы уравнений (2.25) по времени с учетом равенств

$$\frac{d\upsilon_{21}}{dt} = a_{21}; \frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon_1; \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$$

дает искомые выражения для угловых ускорений звеньев

$$\varepsilon_1(l_{21}) = \frac{l_3\omega_3^2}{l_{AB}\sin(\varphi_1 - \varphi_3)} + \frac{\omega_1^2}{\mathrm{tg}(\varphi_1 - \varphi_3)} - \frac{2\upsilon_{21}\omega_1}{l_{AB}}; \qquad (2.29)$$

$$\varepsilon_3(l_{21}) = \frac{l_{AB}\omega_1^2}{l_3\sin(\varphi_3 - \varphi_1)} - \frac{\omega_3^2}{\mathrm{tg}(\varphi_3 - \varphi_1)}. \qquad (2.30)$$

Очевидно, что $\omega_1 = \omega_2$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$

Кинематические характеристики звеньев механизма с гидроцилиндром

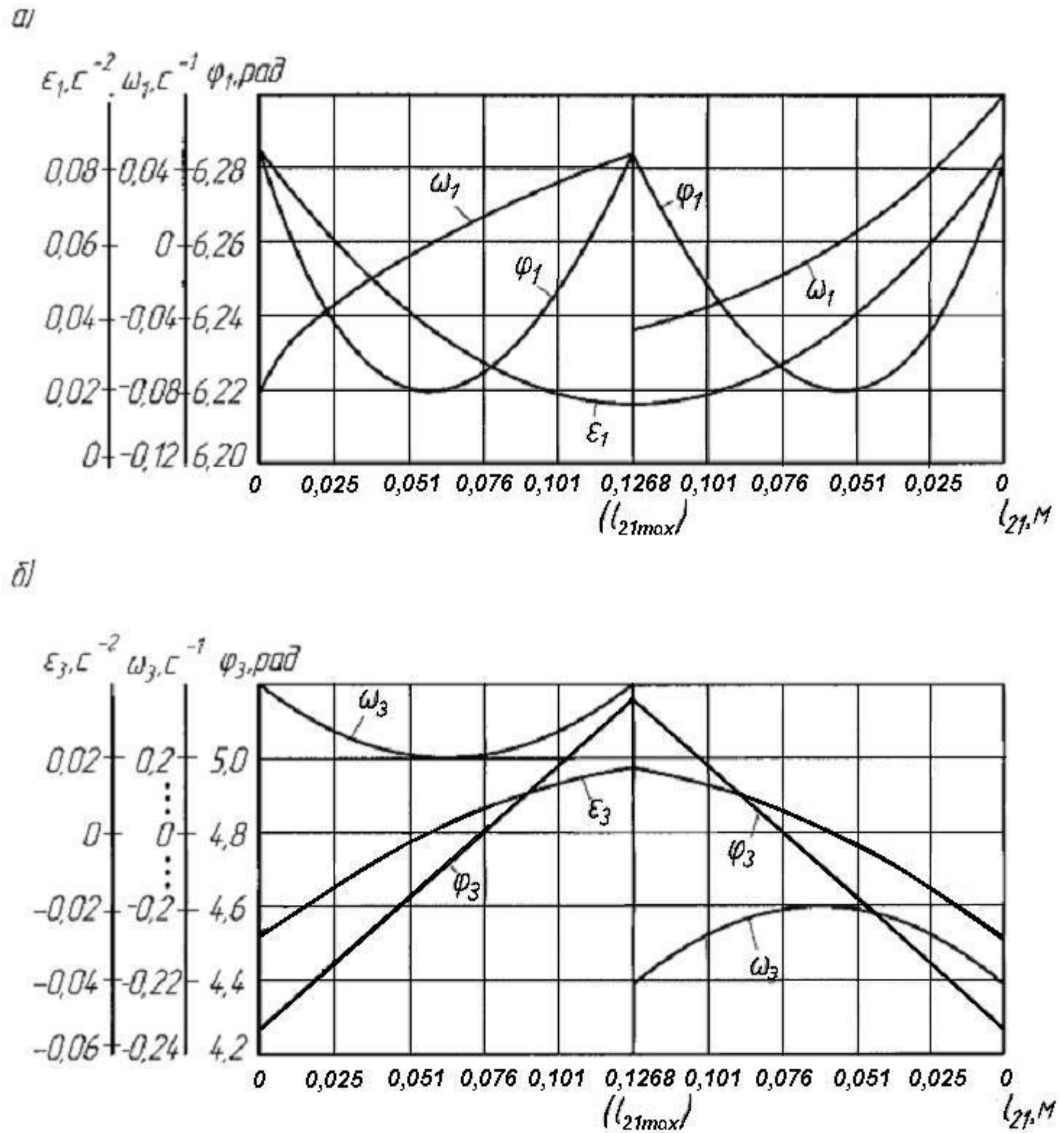


Рис. 2.8

Графоаналитический метод кинематического анализа рычажных механизмов

Графоаналитический метод определения кинематических параметров механизмов сводится к построению планов их положений, скоростей и ускорений.

План положений механизмов – это графическое изображение взаимного расположения звеньев, соответствующее выбранному расчетному положению начального звена.

План скоростей механизма – это чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и по направлению скоростям различных точек звеньев механизма в данный момент.

План ускорений – это чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению ускорениям различных точек звеньев механизм в данный момент.

<u>Кривошипно-ползунный механизм.</u> На рис. 2.9, *а* показан план положений механизма для значения обобщенной координаты $\varphi_1 = 315^\circ$.

План положений позволяет определить угол φ_2 и координаты точек B и S_2.

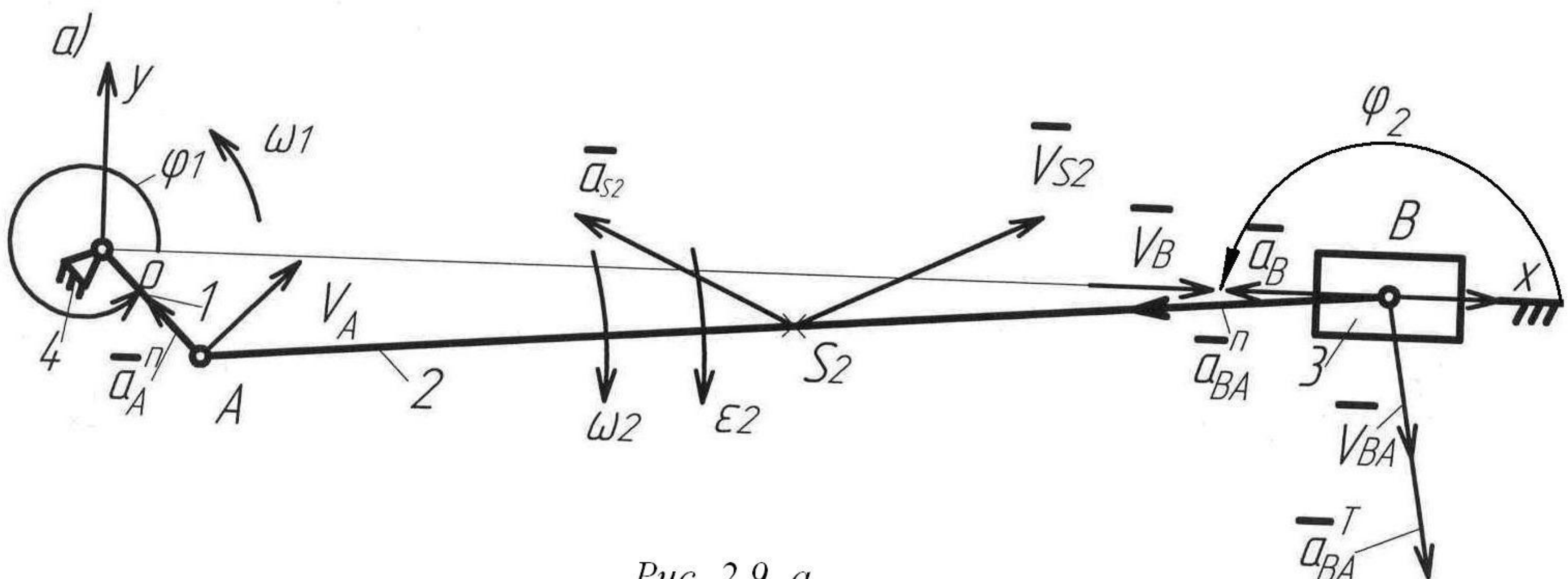


Рис. 2.9, а

Построение плана скоростей кривошипно-ползунных механизмов

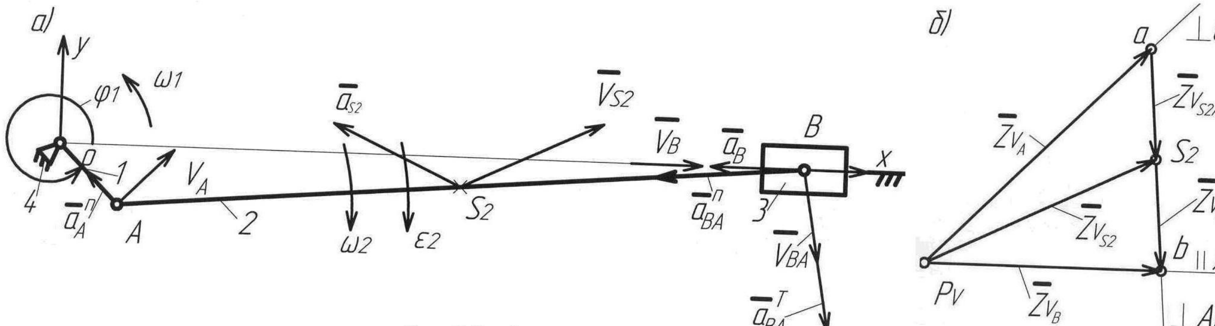


Рис. 2.9 а,б

Для построения плана скоростей должна быть известна кинематическая схема механизма, построенная в масштабе (рис. 2.9, *а*), и задан закон движения начального звена (например, $\omega_1 = \mathrm{const}$).

Требуется найти линейные скорости точек А, В и S_2, а также угловую скорость звена 2.

Построение плана скоростей начинается с определения скорости точки кривошипа $\upsilon_A = \omega_1 l_1$. (2.33)

Скорость точки В, принадлежащей звену 2, можно представить как векторную сумму скоростей переносного $\bar{\upsilon}_{Be}$ и относительного $\bar{\upsilon}_{Br}$ движений $\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_{Be} + \bar{\upsilon}_{Br}$. (2.34)

Переносным движением звена 2 является поступательное движение его со скоростью точки А $\bar{\upsilon}_{Be} = \bar{\upsilon}_A$,

а относительным – вращательное движение звена 2 вокруг точки А. Если обозначить относительную скорость через υ_{BA}, то $\bar{\upsilon}_{Br} = \bar{\upsilon}_{BA}$.

Окончательное векторное уравнение для скорости точки В будет иметь вид

$$\underset{/\!/x}{\underline{\bar{\upsilon}_B}} = \underset{\perp OA}{\underline{\underline{\bar{\upsilon}_A}}} + \underset{\perp BA}{\underline{\bar{\upsilon}_{BA}}}. \quad (2.35)$$

В этом уравнении векторы скоростей, известные по величине и направлению, подчеркнуты двумя чертами, а известные лишь по направлению – одной чертой.

Для определения указанных неизвестных величин строим план скоростей с выбранным масштабным коэффициентом K_V

$$K_\upsilon = \frac{\upsilon_A}{Z\upsilon_A}\left[\frac{м/с}{мм}\right].$$

здесь $Z\upsilon_A$ – длина отрезка, изображающего на плане скорость $\bar{\upsilon}_A$.

Величины действительных скоростей определяют по формулам

$$|\upsilon_B| = Z\upsilon_B \cdot K_\upsilon; \quad \upsilon_B > 0;$$

$$\upsilon_{BA} = Z\upsilon_{BA} \cdot K_\upsilon; \quad |\omega_2| = \upsilon_{BA}/l_2; \quad \omega_2 < 0.$$

Скорость точки S_2 определяется с помощью векторного уравнения:

$$\upsilon_{S2} = \underline{\underline{\upsilon_{A}}} + \underline{\underline{\upsilon_{S2A}}} \qquad (2.39)$$

$$\perp OA \perp AS_2$$

Здесь скорость относительного движения точки S_2 υ_{S2A} находится методом пропорционального деления отрезка *ав* на плане скоростей, изображающего относительную скорость υ_{BA}

$$\overline{as_2} = \overline{ав}\left(AS_2 / AB \right). \qquad (2.40)$$

Действительная скорость υ_{S2A} определяется как

$$\upsilon_{S2} = \overline{Z}\upsilon_{S2} \cdot K_{\upsilon}. \qquad (2.41)$$