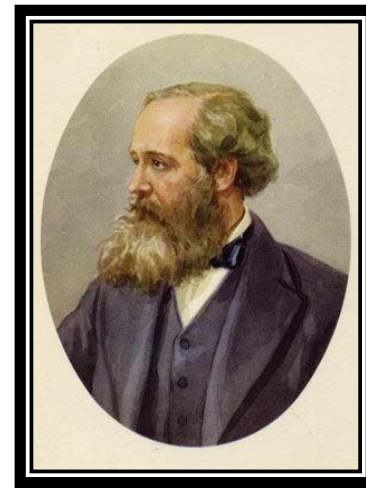


УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Гипотеза Максвелла о вихревом электрическом поле. 1-ое уравнение Максвелла.

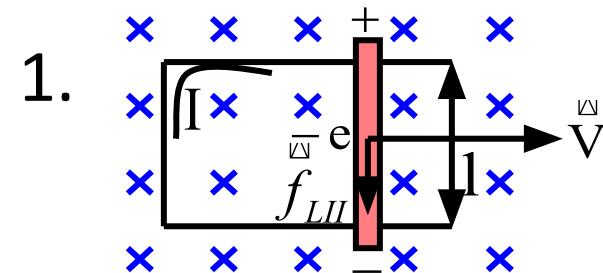


Джеймс Клерк
Максвелл
(1831-1879)

При электромагнитной индукции в замкнутом проводящем контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$

Следовательно, имеются сторонние силы (силы не кулоновской природы)

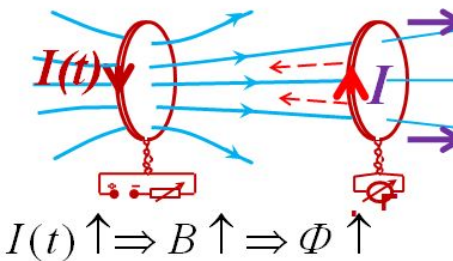
Какова природа этих сторонних сил?



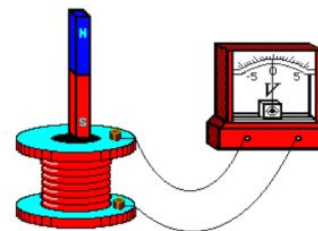
Движущийся проводник

Роль сторонней силы – составляющая силы Лоренца

2. Конфигурация контура не изменяется (проводник неподвижен), магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром, **меняется за счёт изменения магнитного поля:** само- и взаимная индукция, движение магнита.



$$I(t) \uparrow \Rightarrow B \uparrow \Rightarrow \Phi \uparrow$$

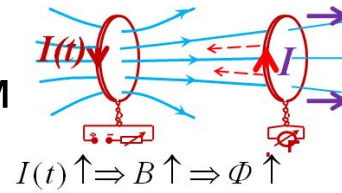


$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Какая сторонняя сила создаёт ЭДС в этом случае??

Гипотеза Максвелла о вихревом электрическом поле. 1-ое уравнение Максвелла.

2. Магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром **меняется за счёт изменения магнитного поля.**



Какая сторонняя сила создаёт ЭДС в этом случае $\mathcal{E}_i$??

изменяющееся во времени магнитное поле приводит к возникновению **вихревого** (не потенциального) **электрического поля**, существование которого не зависит от наличия проводников
напряженность вихревого электрического поля в точке :

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{q},$$

по аналогии с определением напряженности электростатического поля

$\vec{F}^*$ – сила, действующая со стороны вихревого электрического поля на точечный заряд q , помещенный в данную точку.

В проводнике, помещенном в вихревое электрическое поле, возникает индукционный ток - движение свободных носителей заряда *под действием сил вихревого электрического поля.*

$\vec{F}^*$ - **сторонняя сила**

$$\varepsilon_i = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{1}{q} \oint_l F_l^* dl \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_i = \oint_l E_l^* dl$$

Гипотеза Максвелла о вихревом электрическом поле. 1-ое уравнение Максвелла.

$$\begin{array}{l} \varepsilon_i = \oint_l E_l^* dl \\ \varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \\ \Phi = \int_S B_n dS \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \varepsilon_i = \oint_l E_l^* dl \\ \varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \\ \Phi = \int_S B_n dS \end{array}} \right\} \quad \oint_l E_l^* dl = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS \quad \xrightarrow{\downarrow} \quad \boxed{\oint_l E_l^* dl = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS}$$

$B_n = f(t, x, y, z)$

Максвелл: контур ℓ – не обязательно проводящий!

Это может быть воображаемый, мысленный контур.

Переменное магнитное поле приводит к появлению вихревого электрического поля **независимо от того, в какой среде это происходит.**

Например, если магнитное поле меняется в вакууме, то **вихревое электрическое поле существует в вакууме** (как и кулоновское)

Гипотеза Максвелла о вихревом электрическом поле. 1-ое уравнение Максвелла.

Особенности вихревого электрического поля

ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

$$\oint_l E_l^* dl = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \neq 0$$

Нельзя ввести потенциал

Источником вихрев. электр. поля **не** являются электр. заряды

ВСЕГДА: $\int_S E_n^* dS = 0$

Силовые линии вихревого электр. поля замкнуты (не имеют начала и конца)

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

$$\oint_l E_l^{кул} dl = 0$$

Поле характеризуется потенциалом

Источником потенц. электр. поля являются электр. заряды

$$\int_S E_n^{кул} dS = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \int_V \rho dV \neq 0$$

Силовые линии потенц. электр. поля начинаются и заканчиваются на электрических зарядах

Теорема Гаусса

1-ое уравнение Максвелла

$$\oint_l E_l^{кул} dl = 0$$
$$+ \oint_l E_l^* dl = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS$$

$$\oint_l E_l dl = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS$$

1-ое уравнение Максвелла

$$E_l = E_l^{кул} + E_l^*$$

проекция напряженности результирующего
электрического поля на направление элементарного
перемещения вдоль замкнутого контура

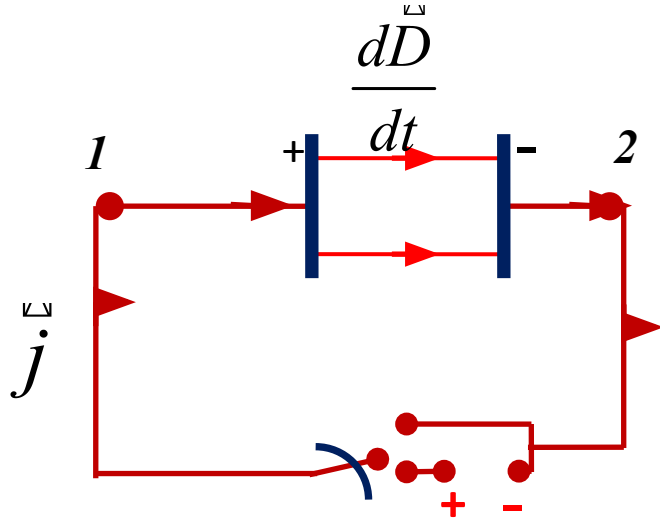
$$\int_S E_n^{кул} dS = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \int_V \rho dV$$
$$+ \int_S E_n^* dS = 0$$
$$\Rightarrow \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV$$

3-е уравнение Максвелла

2-е ур-е Максвелла

Ток смещения

Рассмотрим заряд плоского конденсатора:



Индукция электр. поля D

Волна C

Напряжение U

$$q = cU = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} E d = \epsilon_0 \epsilon E S = D S$$

$$q = D S \Rightarrow \frac{dq}{dt} = S \frac{dD}{dt}$$

Ток в проводах

$$I = S \frac{dD}{dt}$$

Размерность силы тока

Максвелл:

$$I_{CM} = S \frac{dD}{dt}$$

ТОК СМЕЩЕНИЯ (в случае однородного поля)

$$j_{CM} = \frac{\partial D}{\partial t}$$

ПЛОТНОСТЬ ТОКА СМЕЩЕНИЯ

В общем случае неоднородного электрического поля (как обычно)

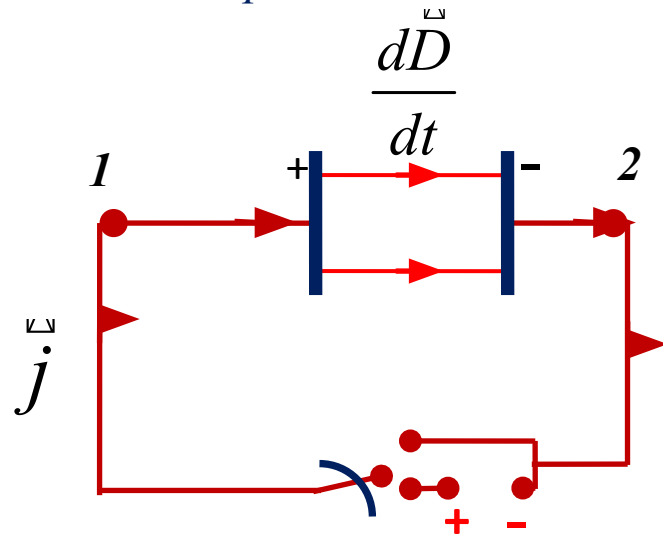
$$I_{CM} = \int_S j_n dS$$

$$I_{CM} = \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS = \int_S \left(\frac{\partial D}{\partial t} \vec{n} \right) dS$$

Плотность тока смещения

Покажем: направления токов проводимости и смещения совпадают

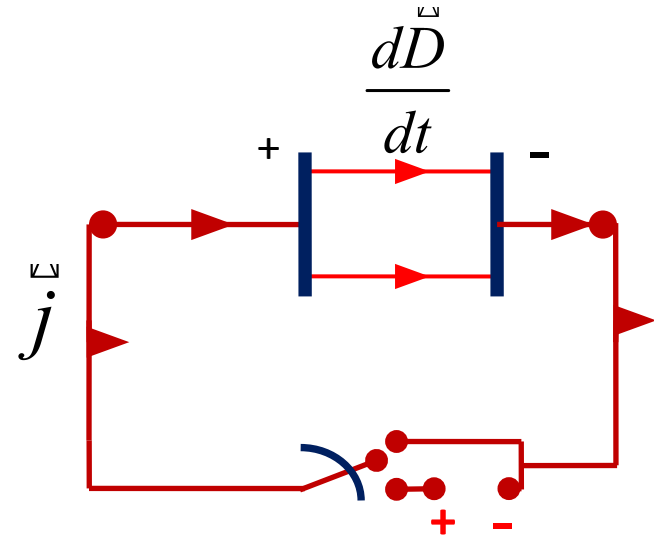
Рассмотрим заряд плоского конденсатора:



$$\frac{dD}{dt} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \vec{D} \rightarrow \\ \frac{dD}{dt} \rightarrow \\ \vec{j} \rightarrow \end{array}$$

На участке 1-2 $\vec{j}$ и $\vec{j}_{CM}$ совпадают по направлению

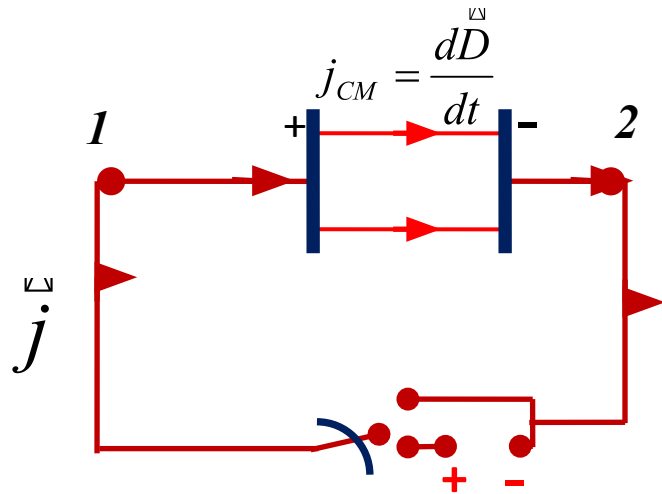
Рассмотрим разряд плоского конденсатора:



$$\frac{dD}{dt} < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \vec{D} \rightarrow \\ \frac{dD}{dt} \leftarrow \\ \vec{j} \leftarrow \end{array}$$

На участке 1-2 $\vec{j}$ и $\vec{j}_{CM}$ совпадают по направлению

На границе пластин конденсатора и диэлектрика плотность тока проводимости и плотность тока смещения совпадают не только по направлению, но и по величине.



Действительно:
В плоском конденсаторе

Ток в проводах $\rightarrow$ Ток смещения

$$I = S \frac{dD}{dt}$$

Поле однородно $\rightarrow j = \frac{I}{S}$

$$j = \frac{dD}{dt} \rightarrow j_{CM} = j$$

Таким образом, **линии тока проводимости** в проводах на границах обкладок **непрерывно переходят в линии тока смещения** внутри конденсатора (независимо от того заряжается или разряжается конденсатор).

Гипотеза Максвелла



Ток смещения создает в пространстве его окружающем магнитное поле такое же, как и магнитное поле эквивалентного тока проводимости.

Экспериментальное доказательство существования магнитного поля тока

смещения

лампочка
накаливания

Лампочка
горит!!

Конденсатор, в переменное
электрическое поле которого
помещается тороид

Источник
переменного
напряжения

Переменный
ток
смещения

Переменное
магнитное
поле

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$



Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции:

Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов (**полному току**), охватываемых этим контуром, умноженной на

Постоянный

ТОК

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \mu \sum_i I_i$$

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \mu \int_S \vec{j}_n dS$$

Равноценны в отношении создания магнитного поля

МАКСВЕЛЛ: полный ток

$$I_{\text{полн}} = I + I_{\text{CM}}$$

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{CM}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

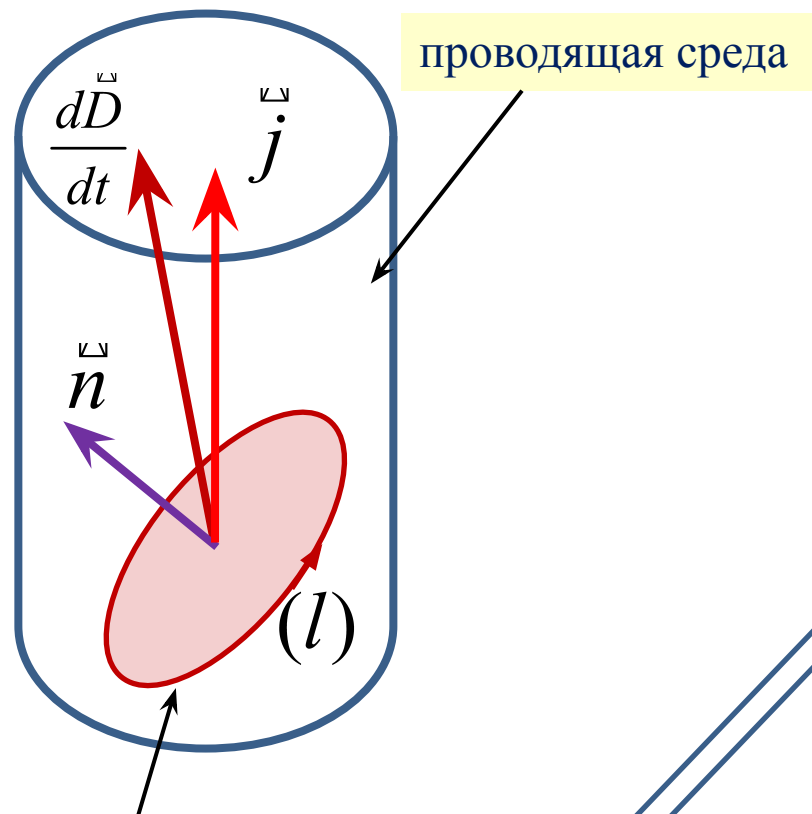
Плотность тока проводимости

Плотность тока смещения

Из всех свойств, присущих току присуще лишь одно – **создавать в окружающем пространстве магнитное поле**

2-ое уравнение Максвелла

Рассмотрим проводящую среду, в которой существуют переменное электрическое поле и ток проводимости.



$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \mu \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_n dS$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

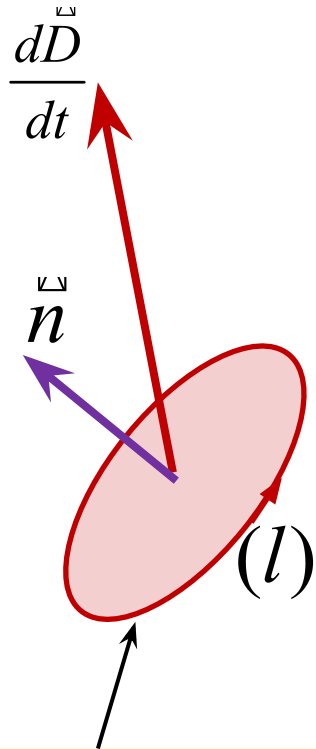
$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_n dS$$

2-е уравнение

2-ое уравнение Максвелла

2-ое уравнение Максвелла справедливо для любой среды, в том числе для диэлектрика, вакуума или неоднородной среды, включающей в себя проводники и диэлектрики.

Например, в случае вакуума (воздуха)



произвольный контур

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_n dS$$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_n dS$$

Система уравнений Максвелла в интегральной форме

Дополнив основные факты из области электромагнетизма установлением магнитных действий токов смещения, Максвелл написал **систему фундаментальных уравнений электродинамики**.

1.
$$\oint_l E_l dl = - \int_S \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_n dS$$

циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному контуру, равна «минус» скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром (**закон ЭМИ Фарадея**).

2.
$$\oint_l H_l dl = \int_S \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right)_n dS$$

циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов проводимости и токов смещения, охватываемых этим контуром (**теорема о циркуляции для м.п. + ток смещения**)
поток вектора электрической индукции через

3.
$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV$$

произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности (**теорема Гаусса – закон**

4.
$$\oint_S B_n dS = 0$$

Поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю (**отсутствие магнитных зарядов**)
(**Кулона**)).

Система уравнений Максвелла в интегральной форме

$$1. \oint_l E_l dl = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS$$

$$2. \oint_l H_l dl = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_n dS$$

$$3. \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV$$

$$4. \oint_S B_n dS = 0$$

Уравнения Максвелла - это основные аксиомы электродинамики полученные путём обобщения опытных фактов (их нельзя вывести).

Уравнения Максвелла показывают, что источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо магнитные поля, меняющиеся во времени. Магнитные же поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

Из уравнений Максвелла следует возможность существования электромагнитных волн.

Система уравнений Максвелла в интегральной форме

1.
$$\oint_l E_l dl = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS$$

2.
$$\oint_l H_l dl = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_n dS$$

3.
$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV$$

4.
$$\oint_S B_n dS = 0$$

4 уравнения Максвелла не составляют полной системы уравнений электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла не содержат данных о свойствах среды.

Уравнения Максвелла следует дополнить соотношениями, характеризующими свойства среды – «материальными уравнениями»

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E}\end{aligned}$$

Если электромагнитное поле не слишком сильное, не меняется слишком быстро во времени и резко в пространстве, отсутствуют ферромагнетики и сегнетоэлектрики,

материальные уравнения

3. Фундаментальные уравнения Максвелла в форме (82.1) — (82.4) или (82.1a) — (82.4a) не составляют еще полной системы уравнений электромагнитного поля. Среди них два уравнения векторных и два скалярных. Если их записать в координатной форме, то получится всего восемь уравнений, связывающих 16 величин: пятнадцать составляющих векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{j}$ и скаляр ρ . Ясно, что для 16 величин восьми уравнений недостаточно. Фундаментальные уравнения Максвелла не содержат никаких постоянных, характеризующих свойства среды, в которой возбуждено электромагнитное поле. Необходимо дополнить эти уравнения такими соотношениями, в которые входили бы величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Эти соотношения называются *материальными уравнениями*.

Наиболее просты материальные уравнения в случае слабых электромагнитных полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени. В этом случае для изотропных неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред материальные уравнения могут быть записаны в виде

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (82.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (82.11)$$

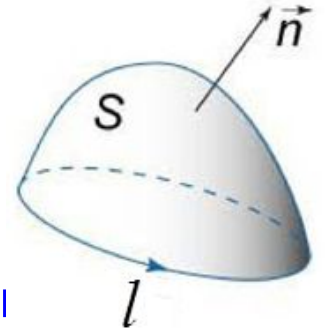
$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \quad (82.12)$$

где ϵ , μ , λ — постоянные, характеризующие электромагнитные свойства среды. Они называются *диэлектрической* и *магнитной*

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Математическое введение к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме

Теоремы Стокса и Остроградского-Гаусса



Т. Стокса

$$\oint_{(l)} A_l dl = \int_S (\text{rot} A)_n dS \quad (a)$$

S – поверхности
ограниченная контуром l

Т. Остроградского -
Гаусса

$$\oint_{(S)} A_n dS = \int_V \text{div} A dV \quad (b)$$

V – объём внутри
замкнутой поверхности S

где

$$\text{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (c)$$

Дивергенция векторного
поля, скаляр

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{rot} A)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\text{rot} A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\text{rot} A)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

(d) Ротор векторного поля,
вектор

Пример перехода к дифф. форме.

Теор. Гаусса (3-е ур-е М.)

$$\begin{array}{l}
 \text{Т. О. - Г.} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV \\ \int_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV \end{array} \right. \Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV = \int_V \rho dV \Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = \rho
 \end{array}$$

Физ. смысл дивергенции вектора

$\rho = 0$, поток через замкн. поверхность = 0, нет источников и стоков, **поток не расходится**. При этом $\operatorname{div} \vec{D} = 0 \Rightarrow$ дивергенция характеристика расходимости потока

Закон Фарадея (1-е ур-е Максвелла)

$$\begin{array}{l}
 \text{Т. Стокса} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \oint_{(l)} E_l dl = - \int_S \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_n dS \\ \int_{(S)} (\operatorname{rot} \vec{E})_n dS \end{array} \right. \Rightarrow \int_{(S)} (\operatorname{rot} \vec{E})_n dS = - \int_S \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_n dS \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
 \end{array}$$

Уравнения Максвелла

$$1. \oint_l E_l dl = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS$$

$$2. \oint_l H_l dl = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_n dS$$

$$3. \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV$$

$$4. \oint_S B_n dS = 0$$

Интегральная форма

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Дифференциальная форма

Материальные уравнения

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$