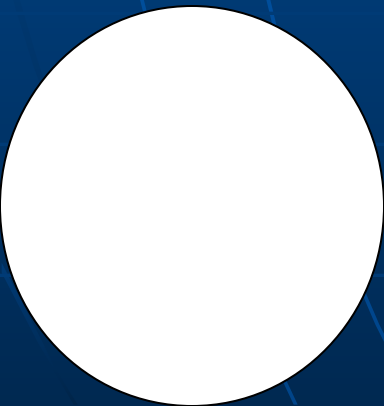


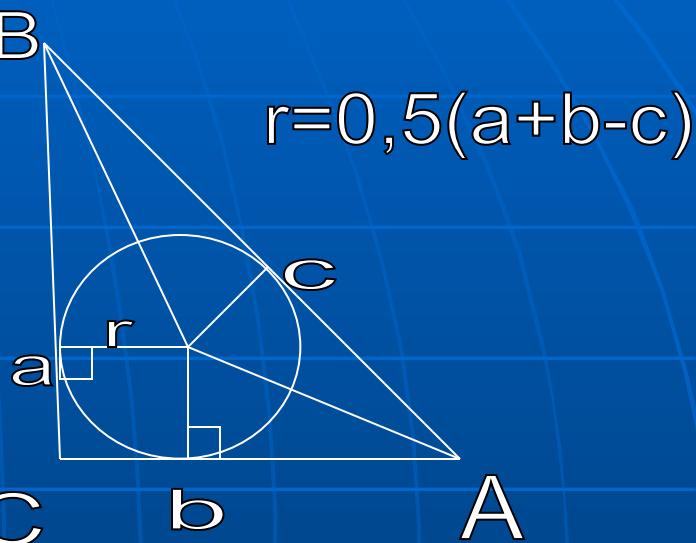
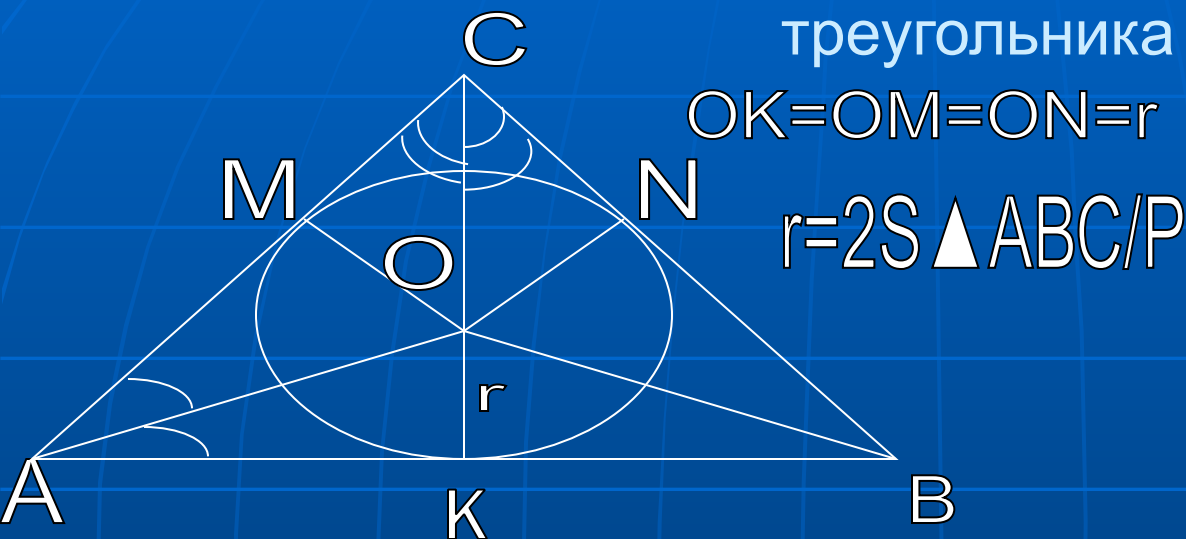
Систематизация геометрических знаний в процессе подготовки к ГИА и ЕГЭ

«Вписанные и описанные окружности в
треугольнике». Подготовила Ряшина Н.И,
учитель высшей квалификационной
категории

МАОУ СОШ №2 г .Усть- Лабинск
Краснодарский край.
2011-2012уч.год.

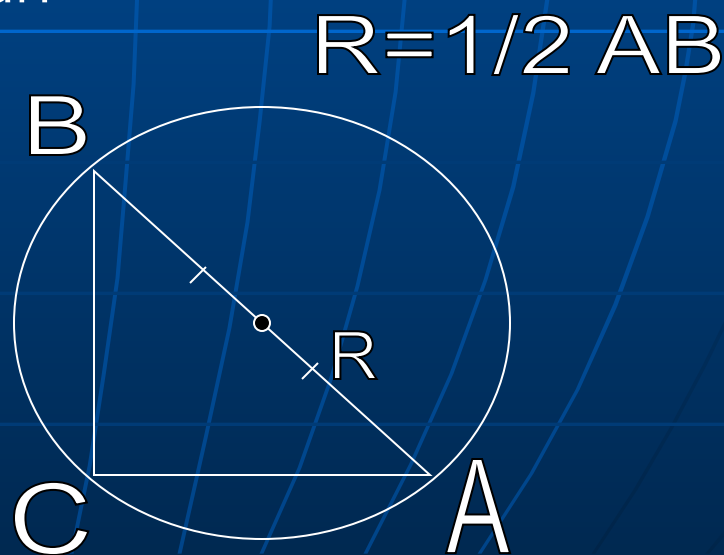
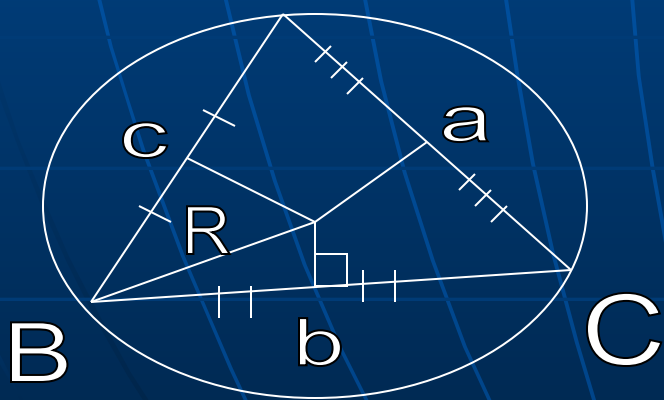


В любой треугольник можно вписать окружность. Центр окружности - точка пересечения биссектрис



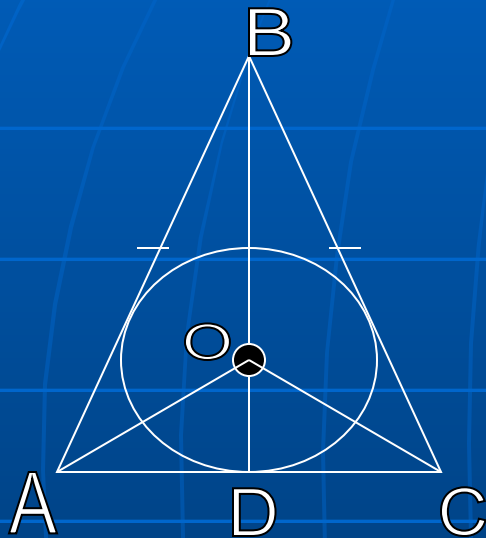
- Около любого треугольника можно описать окружность. Центр окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам

$R = a * b * c / 4S_{\triangle}$



■ Задача 1

- В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высота BD равна 5 см и $AB:AC=13:24$. Найти радиус вписанной в треугольник окружности.



- Дано:
- ABC-треугольник, AC-основание,
- $BD \perp AC$, $BD=5\text{ см}$, $AB/AC=13/24$, $\text{окр}(O;r)$
- Найти: r

Решение

1 способ

O-точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$, тогда по свойству биссектрисы треугольника $\triangle ABD$ имеем $AB/AD=BO/OD$;

$$13/12=(5-x) / x; \text{ где } OD=r$$

$$13x=12 \cdot (5-x)$$

$$25x=60$$

$$x=60/25$$

$$x=2,4 \text{ значит } r=2,4 \text{ см}$$

- 2 способ
- 1) Пусть на одну часть приходится x см, тогда $AB=13x$ см, $AD=12x$ см, тогда из $\triangle ABD$ ($\angle D=90^\circ$) по теореме Пифагора имеем: $BD=\sqrt{(13x)^2+(12x)^2}=5x$ отсюда $5x=5$, $x=1$, значит на одну часть приходится 1 см, отсюда $AB=13$; $AC=24$ см.
- 2)
 $r=OD=2S_{\triangle}/P=2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 / (13+13+24)=120/50=2,4$ (см)
- Ответ: 2,4 см

- Задача 2
- Найти площадь прямоугольного треугольника, если радиус вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 2 и 5



- Дано:
- ABC -треугольник, $\angle C = 90^\circ$
- $R = 5$, $r = 2$, окр. $(O; R)$, окр. $(X; r)$
- Найти: $S_{\triangle ABC}$

Решение
1 способ

Так как центр описанной окружности - середина гипотенузы, то $AB = 10$
 K, H и N - точки касания окр. $(X; r)$, тогда по свойству отрезков касательных имеем $CH = CK = r = 2$,
 $AN = AH = x$, $BN = BK = 10 - x$

Из треугольника ABC по теореме Пифагора имеем

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

$$(10 - x + 2)^2 + (x + 2)^2 = 10^2$$

$$(12 - x)^2 + (x + 2)^2 = 100$$

$$144 - 24x + x^2 + x^2 + 4x + 4 - 100 = 0$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x = 6 \text{ или } x = 4$$

Если $x = 6$, то $AC = 8$, $BC = 6$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC; S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$$

$$\text{Если } x = 4, \text{ то } AC = 6, BC = 8 \quad S_{\triangle} = 24$$

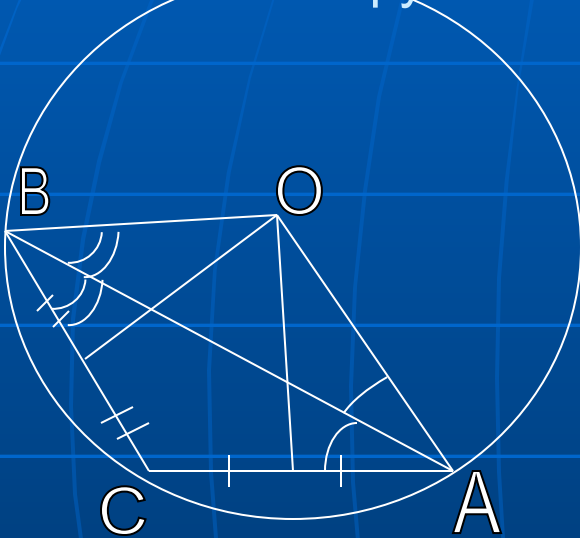
2 способ

Используем формулы

- 1) $R = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2};$
- $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = 5; \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 10; \quad a^2 + b^2 = 100.$
- 2) $r = \frac{1}{2}(a + b - c); \quad r = \frac{1}{2}(a + b - 10);$
- $2 = \frac{1}{2}(a + b - 10);$
- $4 = a + b - 10$
- $a + b = 14$
- 3) $S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{4} * 2ab = \frac{1}{4}((a + b)^2 - (a^2 + b^2)) =$
- $= \frac{1}{4} * (14^2 - 100) = \frac{1}{4}(196 - 100) = \frac{1}{4} * 96 = 24$
- Ответ: 24

Задача 3

В треугольнике сумма двух углов равно 75° , а радиус описанной окружности равен 10см. Найти площадь треугольника с вершиной в центре описанной окружности и основанием, совпадающим с большей стороной исходного треугольника.



- Дано:
- $\triangle ABC$, $\angle A + \angle B = 75^\circ$,
- $\text{Окр}(O; R)$, $R = 10\text{см}$
- Найти
- $S_{\triangle ABO}$

1) $\angle C = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, значит $\triangle ABC$ тупоугольный и O лежит вне треугольника. AB-большая сторона, т.к. лежит против тупого угла.

2) $\angle BCA = 75^\circ * 2 = 150^\circ$, т.к. $\angle A$ и $\angle B$ - вписанные углы, тогда $\angle BOA = 150^\circ$, как центральный угол, $AO = OB = R = 10\text{см}$

3) $S_{\triangle} = \frac{1}{2} AO * BO * \sin \angle AOB$,

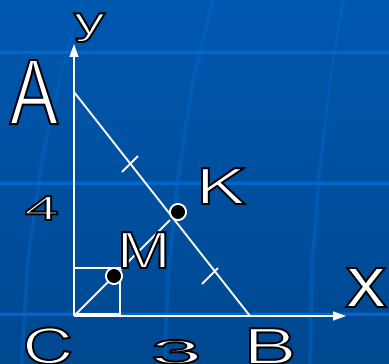
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} * 10 * 10 * \sin 150^\circ$$

$$S_{\triangle} = 50 * \frac{1}{2} = 25(\text{см}^2)$$

Ответ: 25см

Задача 4

Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3см и 4см



■ Дано:

■ $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4\text{ см}$, $BC = 3\text{ см}$
окр (K;R), окр (M;r)

Найти:
МК.

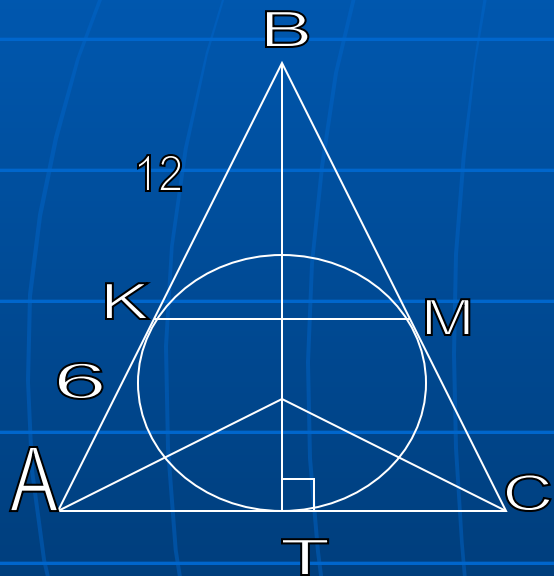
Решение

- 1) Поместим $\triangle ABC$ в систему координат : C в начало координат, AC на ось OY; CB на ось OX, тогда $C(0;0)$, $B(3;0)$, $A(0;4)$
- 2) K-центр описанной окружности, значит K-середина гипотенузы AB, значит $K(3+0/2; 0+4/2)$. $K(1,5;2)$
- 3) M-центр вписанной окружности. Координаты точки M равны, так как она принадлежит биссектрисе угла C и каждая из них равна радиусу вписанной окружности
- 4) Стороны треугольника составляют 3,4 и 5, тогда $r = (3+4-5)/2 = 1$, то есть $M(1;1)$
- 5) По формуле расстояния между двумя точками имеем $MK = \sqrt{(1,5-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{0,5^2 + 1^2} = \sqrt{1,25} = \sqrt{5}/\sqrt{4} = \sqrt{5}/2$

Ответ $\sqrt{5}/2$ см

Задача 5

Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC с основанием AC , касается сторон AB и AC в точках K и M соответственно. Найдите расстояние KM , если $AK=6\text{см}$, $BK=12\text{см}$



- Дано:
- Тр. ABC , $AB=BC$, $AK=6\text{м}$, $BK=12\text{м}$, K, M, T -точки касания вписанной окружности
- Найти: KM

Решение

- 1) $AB=BC=12+6=18(\text{м})$
- 2) $BM=BK=12\text{м}$, $MC=AK=6\text{м}$. $AT=TC=6\text{м}$ по свойству отрезков касательных, значит $AC=6+6=12(\text{м})$
- 3) $\triangle ABC$ подобен $\triangle KBM$, т.к. $\angle B$ -общий и $AB/BK=BC/BM=18/12$; отсюда $AC/KM=18/12$; $12/KM=3/2$; $KM=12 \cdot 2/3=8\text{ м}$

Ответ 8м