

ЗАДАЧИ.

1. **Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABC$ равна 6. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45 градусов. Найти боковое ребро.**
2. **Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 12, а высота $\sqrt{94}$. Найти сторону основания пирамиды.**



3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, Q -середина AB , S -вершина, $BC = 7$, а площадь боковой поверхности пирамиды 42. Найти SQ .

4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, O - центр основания, S - вершина, $SO=8$, $BD=30$. Найти SC .



3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы треугольника ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 4, объём пирамиды равен 6. Найти SO .



- 4. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1900 куб.м. и погружили в воду деталь. Уровень воды поднялся с 20 см до 22 см. Найти объём детали.**
- 5. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 9. Боковые рёбра $1\sqrt{\pi}$. Найти объём цилиндра, описанного около призмы.**



- 6. Диагональ куба равна 3. Найти площадь его поверхности.**
- 7. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящий из одной вершины равны 4, 6, 9. Найти ребро равновеликого куба.**
- 8. Найти объём правильной шестиугольной пирамиды , сторона основания которой равны 1, а боковые рёбра $\sqrt{3}$.**



9. Прямая призма, в основании ромб $ABCD$ с острым углом B 30 градусов. Сторона ромба равна высоте призмы. F середина BB_1 , M середина CC_1 . Найти угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через AD и точки F, M .
10. В правильной шестиугольной призме $AB\dots$ все рёбра 2 . Найти расстояние от B до прямой A_1F_1 .



11. В правильной четырёхугольной призме $AB...$ сторона основания 2, а боковое ребро 3. Найти угол между прямыми AC_1 и BA_1 .



1. В правильной треугольной призме $ABC...$

$AB = 6$, $AA_1 = 4$. Найти площадь сечения, проходящего через A, B , середину A_1C_1 .

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, боковое ребро $SA = 5$, $AB = 4$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через AB , перпендикулярно SC .

3. В прав. шестиугольной пирамиде боковое ребро 10 , высота 6 , вписана сфера. Найти площадь сферы.



1. Радиус основания конуса 5, высота 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. найти расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.
2. В кубе $ABCD \dots$ все рёбра 1. Найти расстояние от точки C до BD_1 .
3. В правильном тетраэдре $ABCD$ найти угол между высотой тетраэдра DO и медианой BM боковой грани BSC .



- В прямоугольном параллелепипеде известны рёбра $AB=5, AD=4, AA_1=9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1 .
- В правил. шестиугольной призме $ABCDEF\dots$ все рёбра 2. Найти расстояние от точки B до прямой A_1F_1 .



- ❏ 1 вариант. Боковое ребро МА пирамиды МВАС перпендикулярно плоскости основания и равно 13. угол $\text{ВАС} = 90^\circ$. АВ = 39. АС = 52. Найти расстояние от точки А до плоскости ВСМ.
- 2 вариант. Основание прямой призмы ABCD...ромб ABCD, в котором АВ = 10, АС = $6\sqrt{7}$. Боковое ребро $\text{AA}_1 = 3\sqrt{21}$. Найти расстояние от точки В до прямой AC_1 .



1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания 4, K -середина ребра SB . Тангенс угла между $СК$ и SD равен $2\sqrt{\frac{2}{17}}$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.
2. Все боковые грани прав. четырёхугольной пирамиды правильные треугольники. Расстояние от центра боковой грани до плоскости основания пирамиды равно « b ». Определить объём пирамиды.

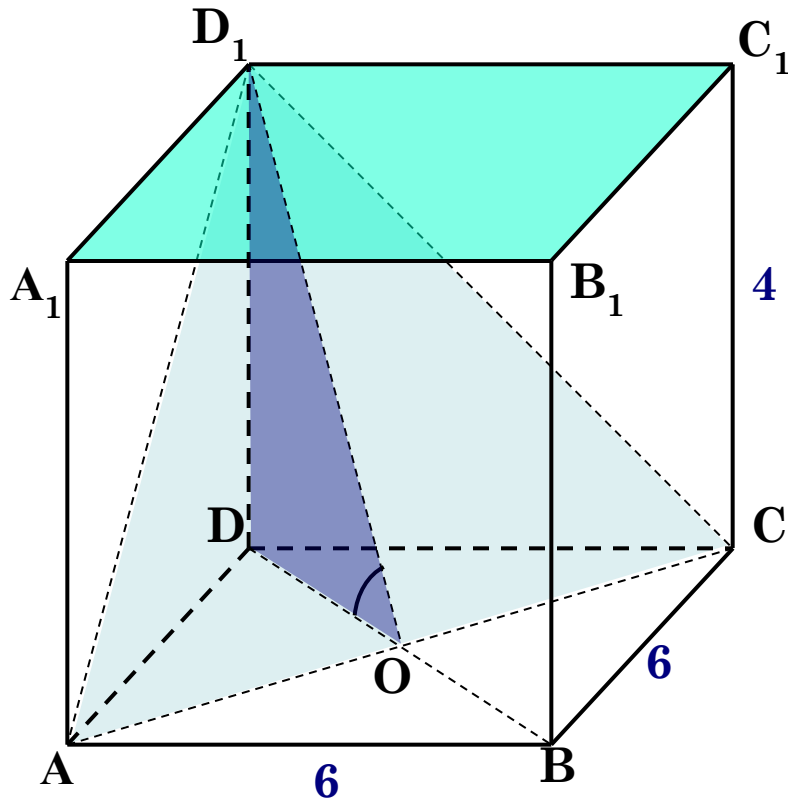


**3. Отрезок AC – диаметр основания конуса.
Отрезок AP – образующая, $AP=AC$. Хорда
основания BC составляет с AC угол 60° градусов.
Через AP проведено сечение конуса плоскостью
параллельно прямой BC . Найти расстояние от
центра основания конуса O до плоскости сечения,
если радиус основания конуса равен 1 .**



В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

Решение.



Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

- 1) Построим плоскость ACD_1 .
- 2) Вместо плоскости $A_1B_1C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC .
- 3) $ABCD$ – квадрат, диагонали $AC \cap BD$ в точке O , O – середина AC , $DO \perp AC$.
$$DO = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AD^2 + DC^2} = 3\sqrt{2}.$$
- 4) $D_1O \perp AC$, так как $\triangle AD_1C$ – равнобедренный, $AD_1 = D_1C$.
- 5) Значит, $\angle D_1OD$ — линейный угол искомого угла.
- 6) $\triangle D_1DO$ – прямоугольный, тогда

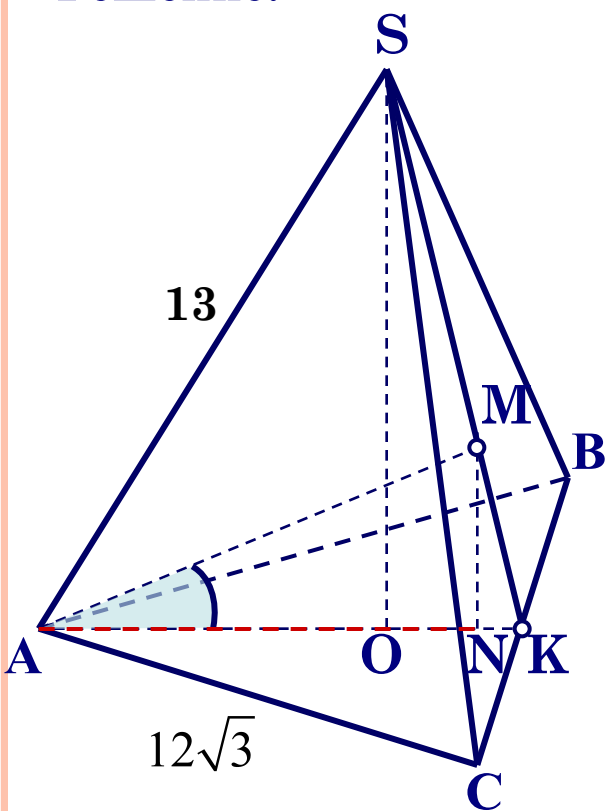
$$tg(\angle DOD_1) = \frac{DD_1}{DO} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



№
1

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 12\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM , где M точка пересечения медиан грани SBC .

Решение.



Пусть K – середина ребра BC .

Прямая SK – апофема.

Прямая SO – высота пирамиды.

M – точка пересечения медиан грани SBC , поэтому $SM:MK = 2:1$.

Опустим из точки M перпендикуляр MN , тогда отрезок AN – проекция отрезка AM на плоскость основания.

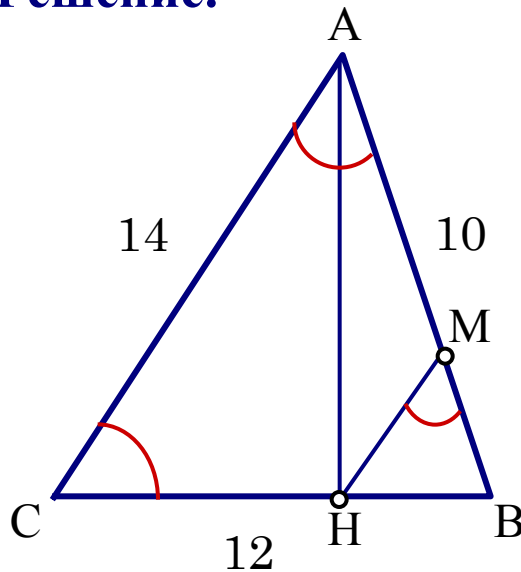
Угол MAN – искомый.

Его можно найти из прямоугольного треугольника MAN .

№
2

Точка H – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M . Найдите HM .

Решение.



Пусть $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 14$.

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{100 + 144 - 196}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{1}{5}.$$

$\triangle ABH$ – прямоугольный, $BH = AB \cdot \cos B = 2$.

По условию $\triangle ABC \sim \triangle HBM$, и имеют общий угол B , значит возможны два случая.

1 случай. $\angle BMH = \angle BAC$; $k = \frac{BH}{BC} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$,

значит, $HM = \frac{1}{6} \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot 14 = \frac{7}{3}$.

$k = \frac{BH}{AB} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, значит, $HM = \frac{1}{5} \cdot AC = \frac{1}{5} \cdot 14 = \frac{14}{5}$.

2 случай. $\angle BMH = \angle ACB$;

Ответ: $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$.

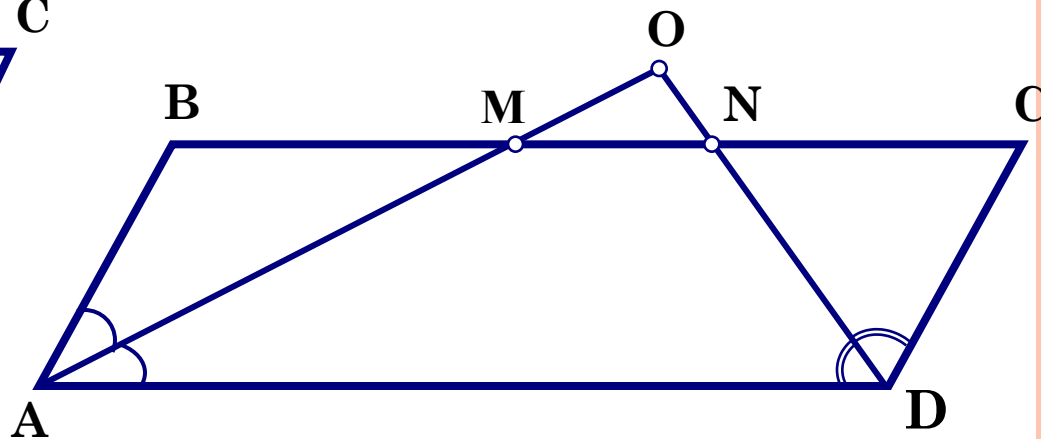
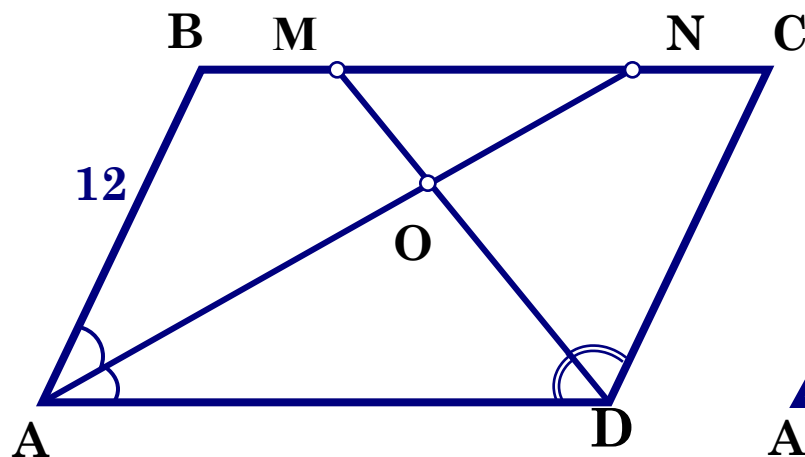


№
4

В параллелограмме $ABCD$ $AB=12$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N , так что $BM:MN=1:7$. Найдите BC .

Решение. Пусть O – точка пересечения биссектрис.

По условию $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$, значит M лежит между точками B и N .



Возможны два случая.

- 1) точка O – лежит внутри параллелограмма;
- 2) точка O – лежит вне параллелограмма.

Рассмотрим первый случай.

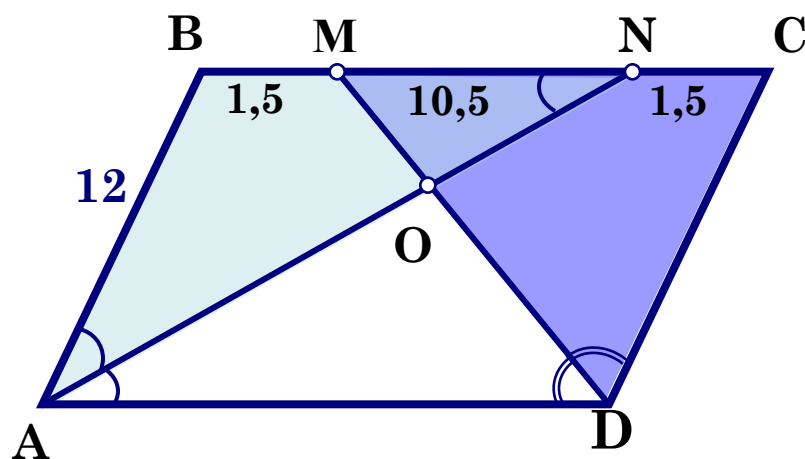


№
4

В параллелограмме $ABCD$ $AB=12$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N , так что $BM:MN=1:7$. Найдите BC .

Решение. Пусть O – точка пересечения биссектрис.

По условию $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$, значит M лежит между точками B и N .



1) $\triangle ABN$ – равнобедренный, т.к.
 $\angle BNA = \angle NAD$ – накрест лежащие;

AN – биссектриса $\angle A$,

значит $\angle BNA = \angle BAN$ и

$AB = BN = 12$,
 тогда $BM = \frac{1}{8} BN = \frac{1}{8} \cdot 12 = 1,5$.

Найдем $MN = BN - BM = 12 - 1,5 = 10,5$.

2) Аналогично, $\triangle DMC$ – равнобедренный, $MC = DC = 12$.

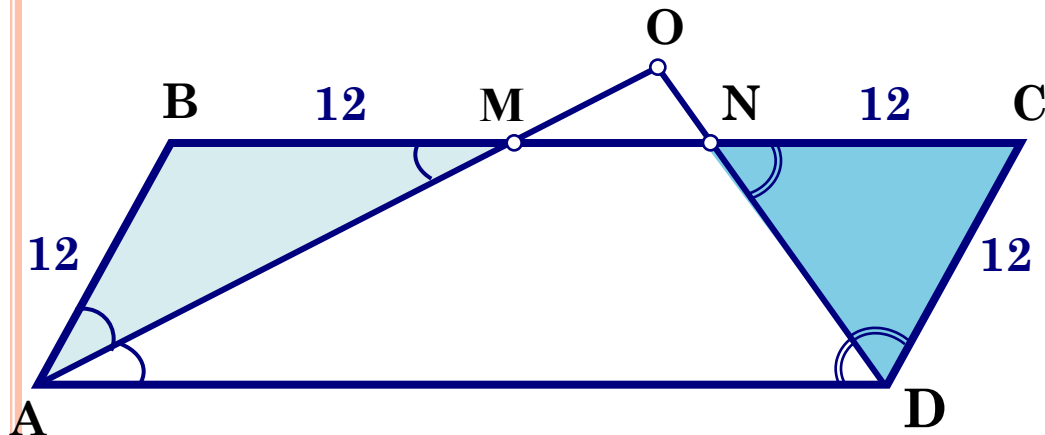
Тогда $NC = MC - MN = 12 - 10,5 = 1,5$.

3) Итого, $BC = BM + MN + NC = 13,5$.

№
4

В параллелограмме $ABCD$ $AB=12$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N , так что $BM:MN=1:7$. Найдите BC .

Решение. Рассмотрим второй случай:
точка O — лежит вне параллелограмма.



1) $\triangle ABM$ — равнобедренный, т.к.

$\angle BMA = \angle MAD$ — накрест лежащие;

AM — биссектриса $\angle A$,

значит $\angle BMA = \angle BAM$.

Тогда $AB = BM = 12$.

По условию $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7}$, значит $BM = \frac{1}{8}BN, \Rightarrow BN = 8 \cdot 12 = 96$.

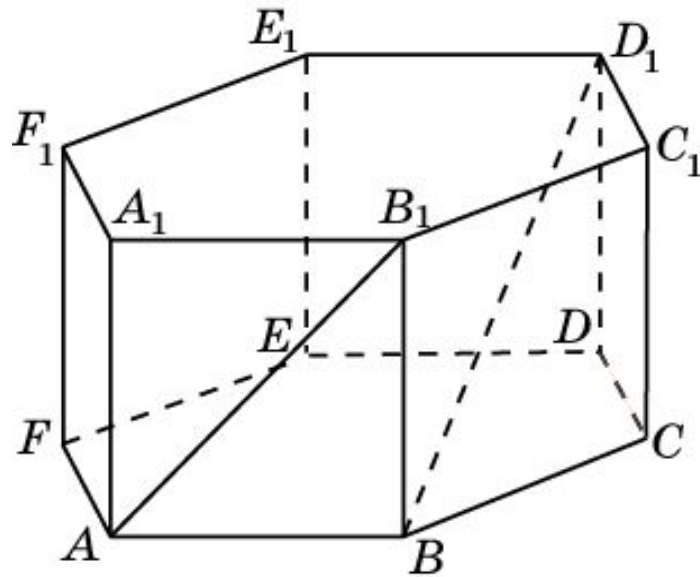
2) Аналогично $\triangle DNC$ — равнобедренный, тогда $NC = DC = 12$.

3) Значит, $BC = BN + NC = 96 + 12 = 108$.

Ответ: 13,5 или 108.



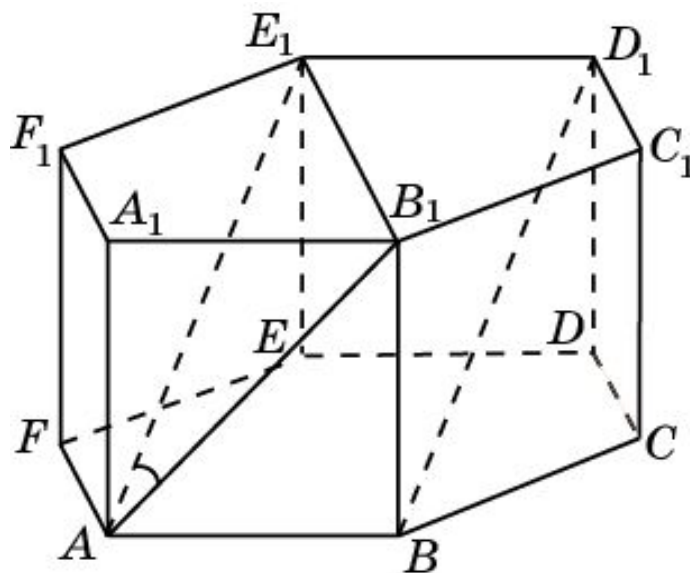
Задача 1. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1 .



Решение 1. Прямая AE_1 параллельна прямой BD_1 . Угол между прямыми AB_1 и BD_1 равен углу B_1AE_1 . В треугольнике B_1AE_1 имеем: $AB_1 = \sqrt{3}$, $AE_1 = \sqrt{2}$, $B_1E_1 = 2$.

Применяя теорему косинусов, получим

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



имеет координаты $(0, \frac{1}{2})$. Воспользуемся формулой

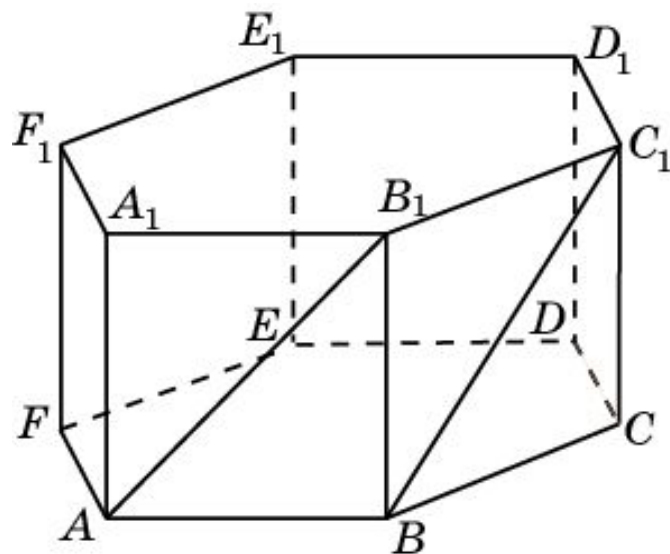
$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$AB_1 \cdot BC_1 = 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$



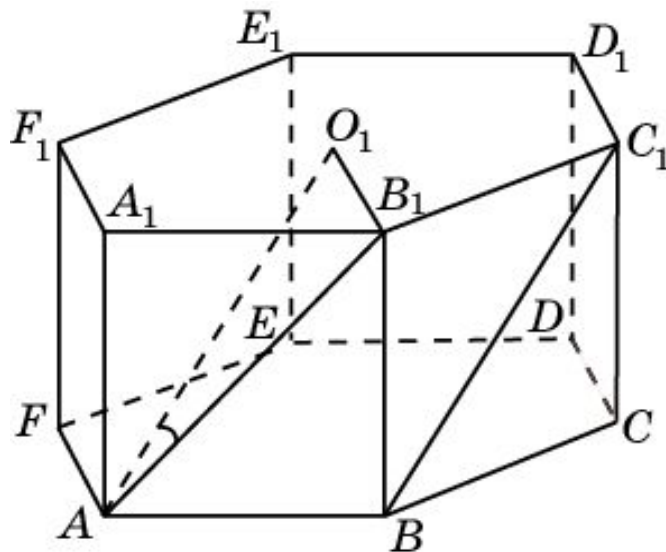
Задача 1. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .



Решение 1. Пусть O_1 – центр правильного шестиугольника $A_1 \dots F_1$. Тогда прямая AO_1 параллельна прямой BC_1 , и искомый угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен углу B_1AO_1 . В равнобедренном треугольнике B_1AO_1 имеем: $O_1B_1 = 1$; $AB_1 = AO_1 =$

$\sqrt{3}$. Применяя теорему косинусов, получим

$$\cos \varphi = \frac{3}{4}$$



В 1.

- 1. С.А. купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 42 мили в час? Ответ округлите до целого числа.**
- 2. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 08 копеек. 1 ноября счётчик показывал 32544 к/час, а 1 декабря 32726 к/час. Сколько надо заплатить за ноябрь?**



- 3. В обменном пункте 1 украинская гривна стоит 3 рубля 70 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на гривны и купили 3 кг помидоров по цене 4 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.**
- 4. Клиент взял в банке кредит 48000 рублей под 14% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?**



5. Среди 40000 жителей города 60% не интересуются футболом. Среди футбольных болельщиков 80% смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч?

6. В июне 1 кг помидоров стоил 80 рублей. В июле цена понизилась на 40%, а в августе ещё на 50%. Сколько рублей стоил 1 кг в августе?



7. Чтобы связать свитер нужно 800 гр шерсти синего цвета. Можно купить синюю пряжу по 60 рублей за 100 гр, а можно купить неокрашенную по цене 50 рублей за 100 гр и окрасить её. Один пакетик краски стоит 50 рублей и рассчитан на 400 гр пряжи. Какой вариант дешевле? В ответе сколько рублей.



- 1. В детском саду на каждого ребёнка полагается 40 гр сахара в день. В саду 121 ребёнок. Сколько килограммовых упаковок сахара понадобится на 7 дней?**
- 2. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 14 дней. В одной упаковке 20 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок надо?**
- 3. Даша отправила SMS- сообщения своим 16 друзьям. Стоимость 1 сообщения 1 рубль 30 копеек. Перед отправкой на счёте оставалось 30 рублей. Ск рублей останется...?**



- 4. Магазин закупает учебники по оптовой цене 110 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30%.
Какое наибольшее число таких учебников можно купить на 1200 рублей?**
- 5. Рубашка стоила 440 рублей. После снижения цены она стала стоить 396 рублей. На сколько процентов была снижена цена?**
- 6. Пирожок стоит 12 рублей. При покупке более 30 пирожков скидка 5% от стоимости всей покупки. Купили 40 пирожков. Сколько заплатили за покупку?**



В - 13

- ❏ 1. Зависимость температуры от времени для нагревательного элемента была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур даётся выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 520 \text{ К}$, $a = 22 \text{ К/мин}$, $b = -0,2 \text{ К/мин}$. Известно, что при нагревании выше 1000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор.



2. При вращении ведёрка с водой на верёвке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила давления на дно будет положительной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления равна $P = m(\frac{v^2}{L} - g)$, где m – масса воды в кг, v – скорость движения ведёрка в м/с, L – длина верёвки в метрах, $g = 10 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась из него, если длина верёвки равна 0,4 м?



3. Мяч бросили под острым углом α к плоскости горизонта. Время полёта мяча(в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (градусах) время полёта будет не меньше 1,7 с, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 17$ м/с? $g=10$ м/с².



- ❏ 4. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ – постоянная. $T = 300$ К – температура воздуха, p_1 – начальное давление, а p_2 – конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе. Если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 6900 Дж?



5. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = 5 - 1,6t + 0,128t^2$, где t – время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

