

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЛЕКЦИЯ 1

Основные понятия и геометрическое изображение функции двух переменных

До сих пор мы изучали совместное изменение двух переменных (x, y) , из которых одна зависела от другой: значение независимой переменной x уже вполне определяло значение зависимой переменной y (или функции $y = f(x)$).

На самом деле в жизни, как и в науке, нередки случаи, когда независимых переменных оказывается несколько.

Например:

- объём кругового цилиндра $V = \pi R^2 H$, где R и H – независимые переменные, или $V = \pi x^2 y$;

- объём усечённого конуса $V = \frac{\pi}{3} H (R^2 + Rr + r^2)$, где независимые переменные r, R и H , или $V = \frac{\pi}{3} z (x^2 + xy + y^2)$;

• при изучении физического состояния какого-либо тела часто приходится наблюдать изменение его свойств от точки к точке. Таковы, например, плотность, температура, электрический потенциал, т. е. это функции точки, и зависят они, очевидно, от координат x, y, z . Если физическое состояние тела меняется во времени, то к этим независимым переменным присоединяется ещё и время t .

Определение 16. Переменная z называется функцией независимых переменных x, y на множестве D , если каждой паре значений $x = x_1, y = y_1$ из D по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определённое значение z_1 из Z (Z – область изменения функции).

В этом случае z – однозначная функция своих аргументов, D – область определения (существования) функции, переменные x, y по отношению к функции z называются аргументами. Функциональная зависимость обозначается так: $z = f(x, y), z = \varphi(x, y), z = z(x, y)$ и т. д.

Пусть функция

$$z = f(x, y) \tag{5.2.1}$$

определена в некоторой области D на плоскости xOy .

Множество точек $P(x, y, f(x, y))$, определяемое уравнением (5.2.1), является геометрическим образом функции двух переменных – это поверхность, которая проектируется в область D (см. рис. 5.52).

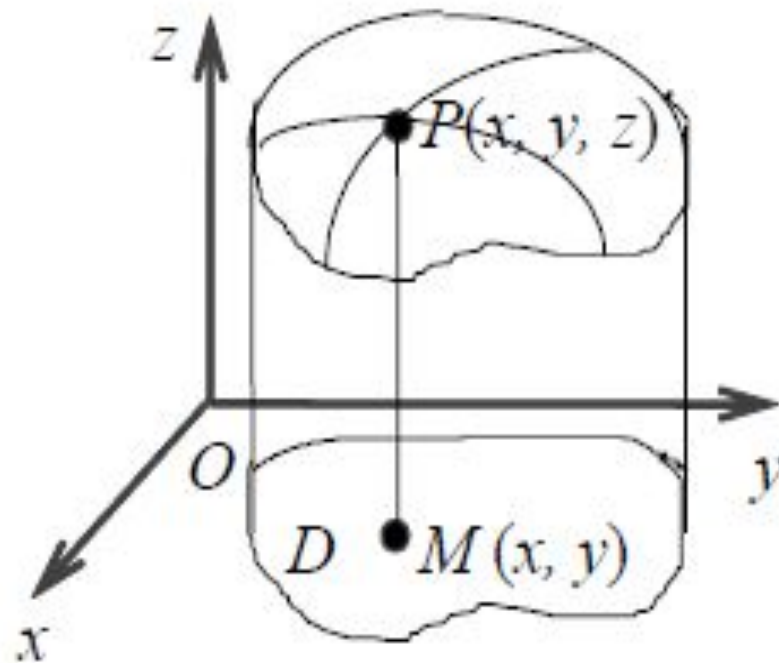


Рис. 5.52

Точка M является проекцией точки P .

Например, функция $z = x^2 + y^2 + 1$ геометрически представляет собой уравнение параболоида, смещённого относительно начала координат на единицу масштаба по оси Oz (рис. 5.53). Областью определения этой функции является вся плоскость xOy .

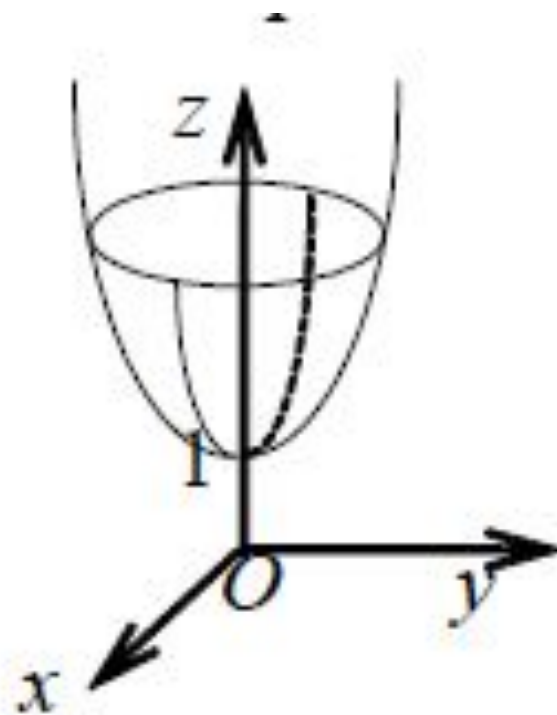


Рис. 5.53

Определение 17. Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность точек $M(x, y)$, лежащих внутри круга радиуса r , с центром в точке M_0 (рис. 5.54):

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r.$$

Если функция обладает некоторым свойством в точке M_0 , то она обладает этим свойством в окрестности точки M_0 .

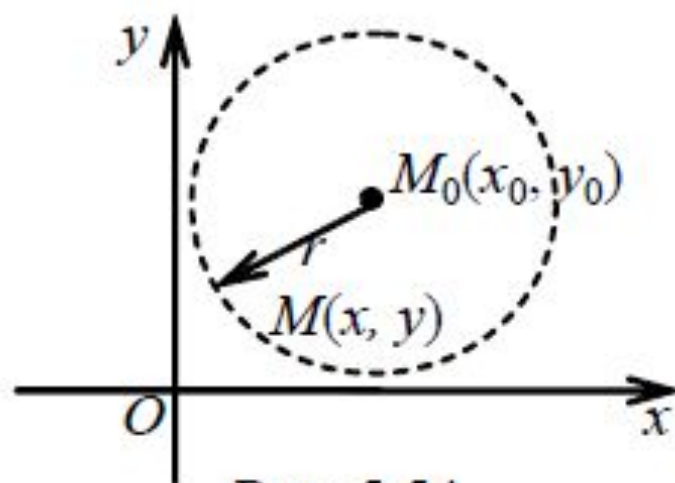


Рис. 5.54

Определение 18. Точка $C(x, y)$ называется граничной для некоторой области D , если в её окрестности есть как точки, принадлежащие области D , так и точки, не содержащиеся в области D . Всё множество граничных точек образует границу области.

На рис. 5.55 – это линия L .

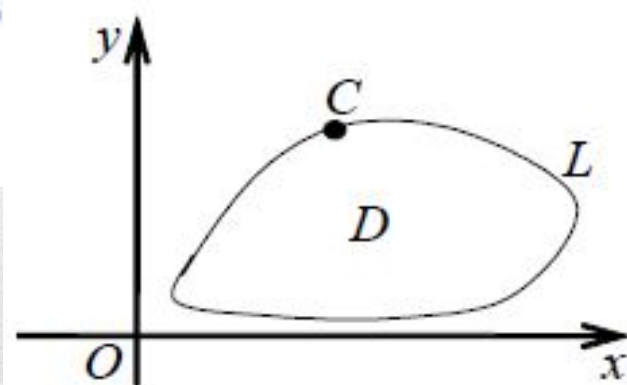


Рис. 5.55

Определение 19. Если граница (линия L) принадлежит области D , то область называют **замкнутой** и обозначают $\overline{D}$, границу при этом изображают сплошной линией. В противном случае ($L \notin D$) область D – **открытая** (не замкнутая). В этом случае границу изображают пунктирной линией.

Пример

Найти область определения функций:

$$z = \ln(x - y);$$

42.2. Логарифмическая функция определена только при положительном значении аргумента.

Значит, $D = \{(x, y) : x > y\}$ – это часть плоскости xOy справа от линии (границы области) $y = x$, сама граница не принадлежит области D (рис. 5.56).

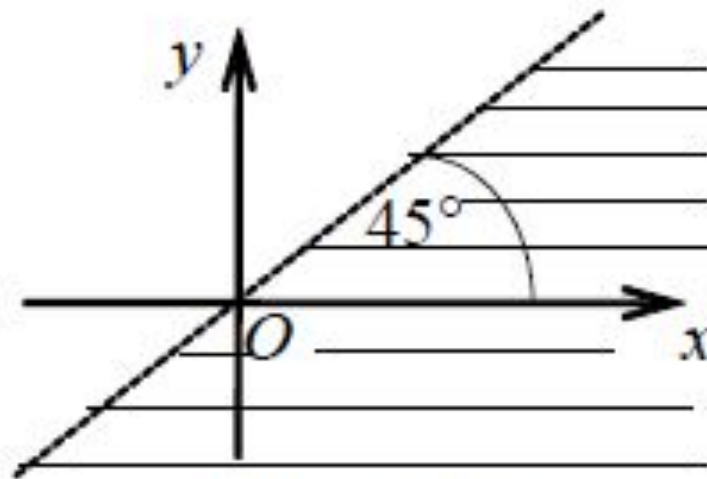


Рис. 5.56

Пример

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$$

42.3. Функция существует, если выполняется неравенство $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, т. е. область $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Это круг со всеми внутренними и граничными точками (рис. 5.57).

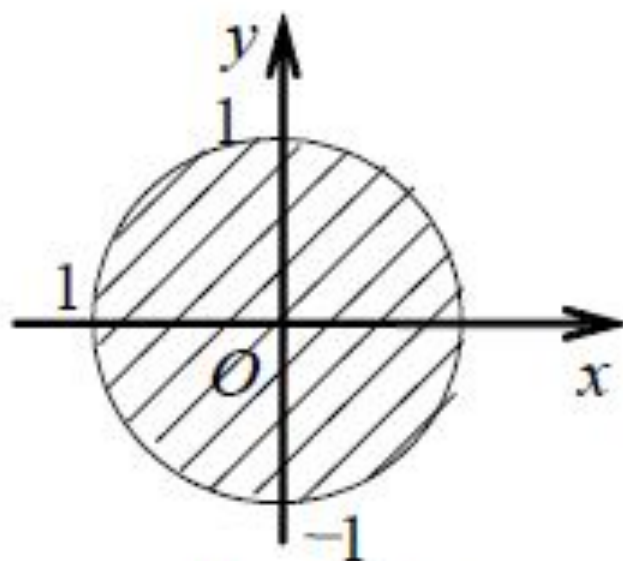


Рис. 5.57

Пример $z = \arcsin(x - y).$

42.4. Функция определена при тех значениях x и y , которые удовлетворяют неравенству $-1 \leq x - y \leq 1$. На плоскости xOy эта область представляет собой полосу, ограниченную параллельными прямыми $x - y + 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$ (рис. 5.58).

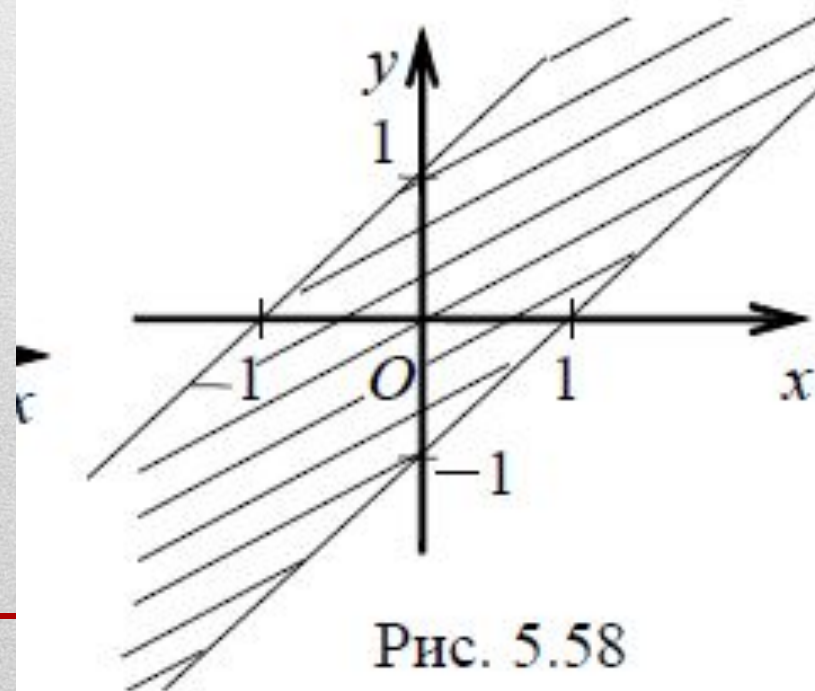


Рис. 5.58

Функция многих переменных

В случае функций трёх переменных (например, распределение температуры в некотором объёме $T = f(x, y, z)$)

можно дать геометрическое толкование $M(x, y, z)$ как точек трёхмерного пространства, а множество таких точек с координатами (x_i, y_j, z_k)

– как часть пространства, или геометрически – тело.

Но при $n > 3$ возможности непосредственной геометрической интерпретации уже нет.

При изучении функций многих переменных $n > 3$

вводят понятие n – мерного пространства.

Функции нескольких переменных

1. Определение функции нескольких переменных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функция $f: X \rightarrow U$ называется **функцией n переменных**.

Записывают: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

где f – закон, задающий соответствие между $x_1, x_2, \dots, x_n$ и u .

Значение $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, \dots, x_n = x_{0n}$

записывают в виде

$$u = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \quad \text{или} \quad u|_{x_1=x_{01}, x_2=x_{02}, \dots, x_n=x_{0n}}$$

Назовём n – мерной “точкой” систему из n вещественных чисел: $M(x_1, \dots, x_n)$.

Сами числа $x_1, \dots, x_n$ являются координатами этой точки M .

Множество всех n – мерных “точек” составляет

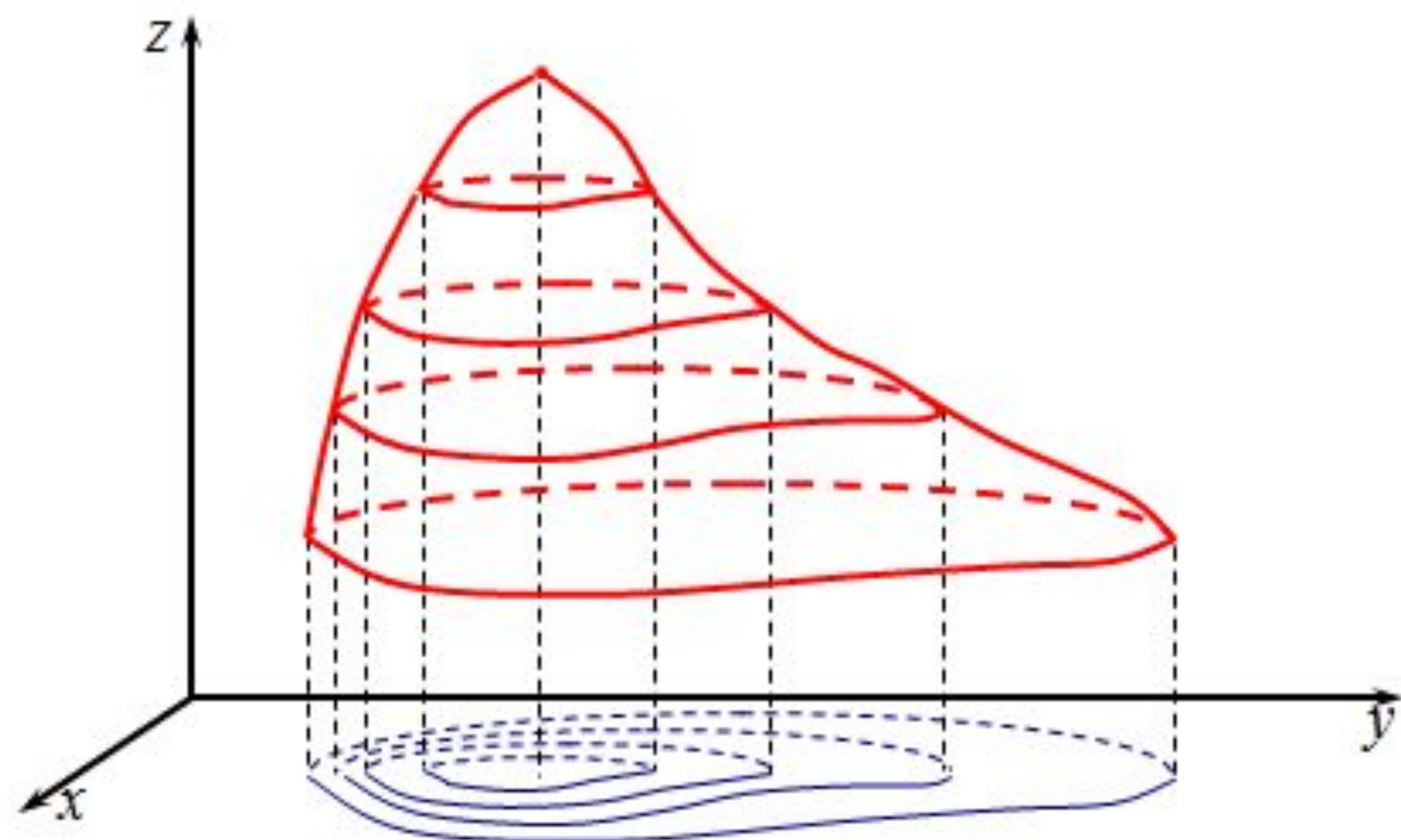
n – мерное пространство, которое иногда называют арифметическим.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называют геометрическое место точек (x, y) плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение C .

- $\Rightarrow$ 1) Линия уровня – линия в $D(z)$, которая имеет уравнение $f(x, y) = C$.
- 2) Линия уровня – проекция на плоскость xOy линии пересечения графика функции $z = f(x, y)$ и плоскости $z = C$.

Полагаем C равными $C_1, C_1 + h, C_1 + 2h, \dots, C_1 + nh$.

Получим линии уровня, по расположению которых можно судить о графике функции и, следовательно, о характере изменения функции.



Таким образом, там, где линии «гуще», функция изменяется быстрее (поверхность, изображающая функцию, идет круче).

Частное и полное приращения функции двух переменных

Рассмотрим сечения поверхности $z = f(x, y)$ (см. рис. 5.59):

1) плоскостью $x = c, c = \text{const.}$

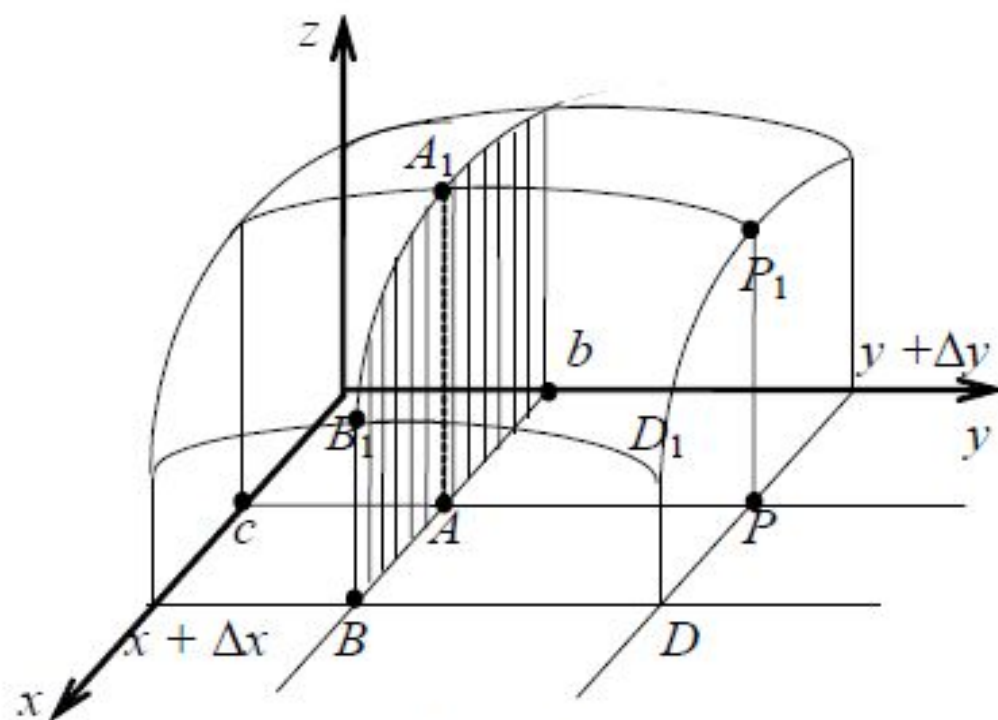


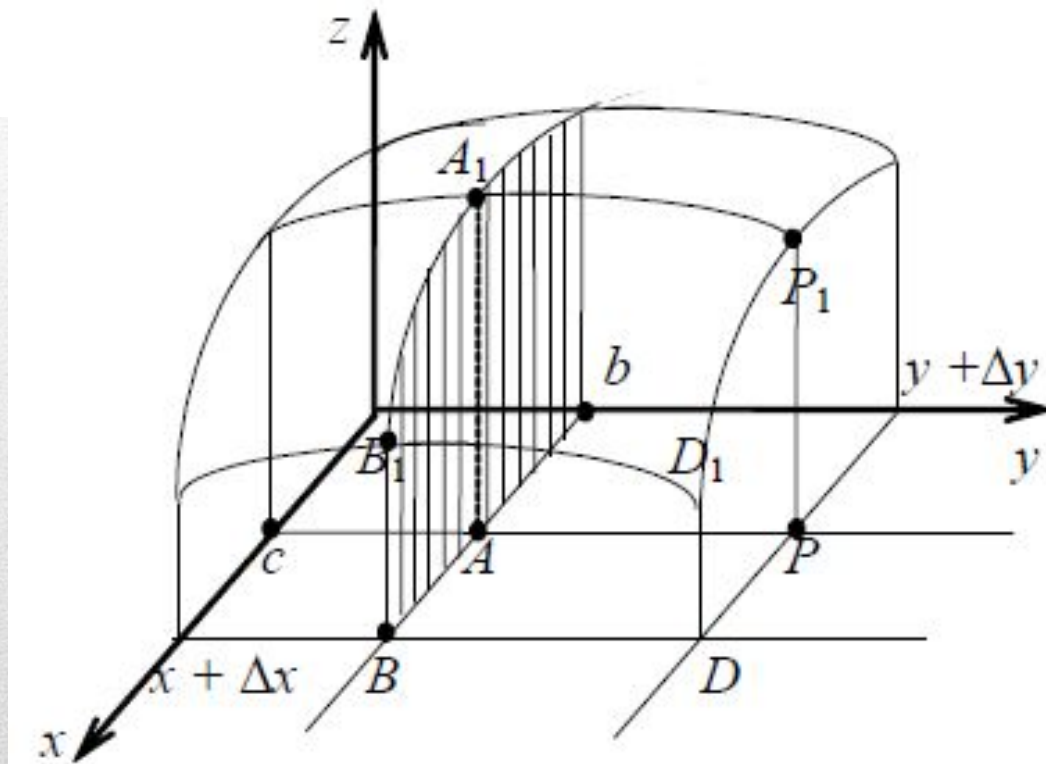
Рис. 5.59

Все точки этой плоскости, в том числе A , A_1 , P_1 , P , имеют одну и ту же абсциссу $x = c$;

2) плоскостью $y = b$ (на рис. 5.59 – заштрихована), $b = \text{const}$.

Точки B, B_1, A, A_1 этой плоскости имеют одну и ту же ординату

$$y = b;$$



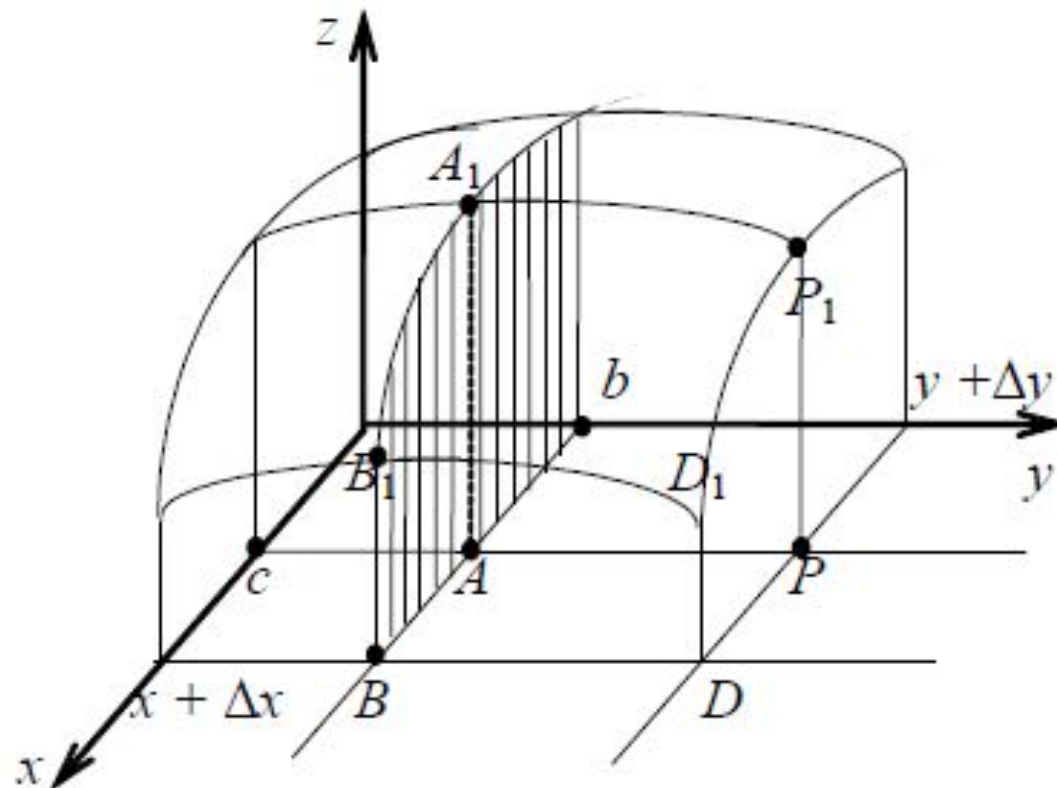
Точки B, B_1, A, A_1 этой плоскости имеют одну и ту же ординату

$$y = b;$$

3) не меняя x , дадим приращение Δy ординате и построим плоскость, параллельную $y = b$, ей будут принадлежать точки

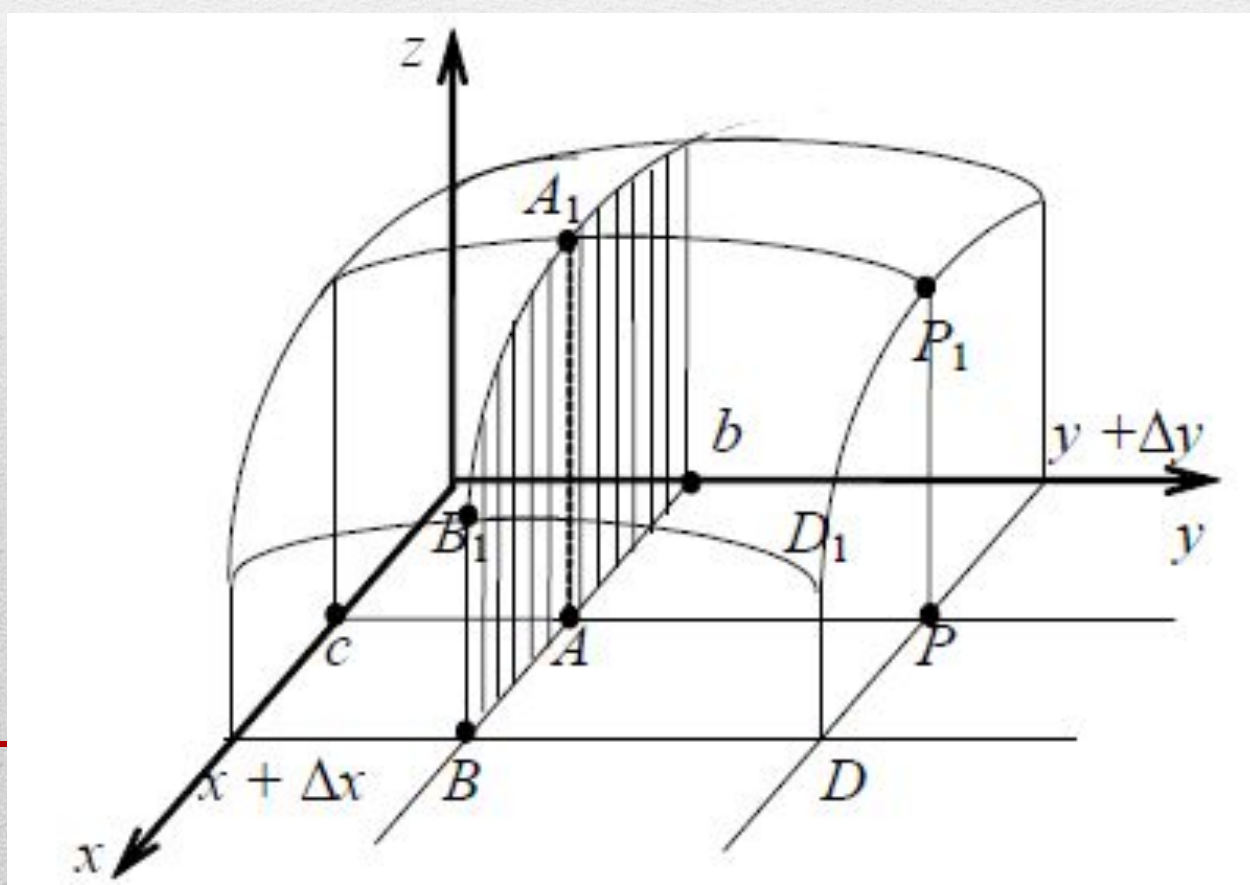
$$P(x, y + \Delta y, 0) \text{ и } P_1(x, y + \Delta y, f(x, y + \Delta y)),$$

тогда и функция $z = f(x, y)$ получит частное приращение $\Delta_y z$, зависящее только от y : $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$;



4) не меняя y (пусть $y = b$), придадим приращение Δx абсциссе и построим плоскость, параллельную $x = c$. Ей принадлежат точки $B(x + \Delta x, y, 0)$, $B_1(x + \Delta x, y, f(x + \Delta x, y))$.

Следовательно, функция получила частное приращение по переменной x : $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$;

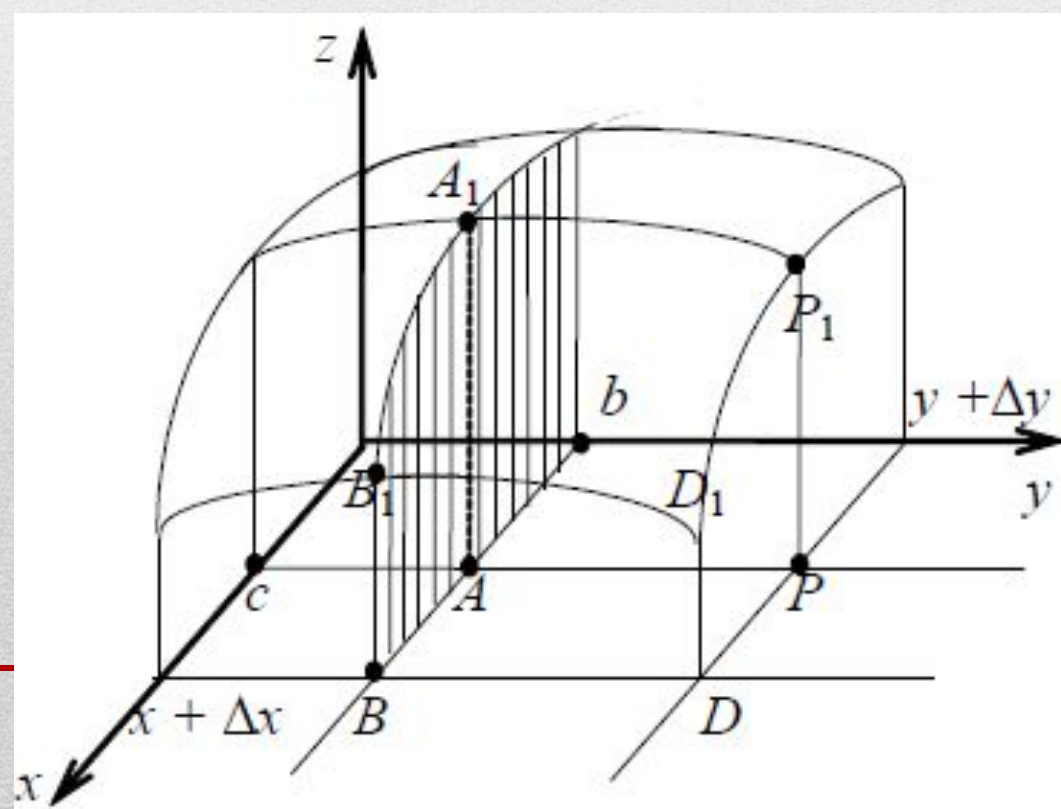


5) одновременно дадим приращение переменным x и y . Тогда функция получит приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

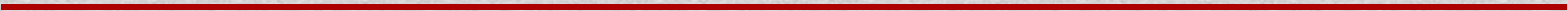
На рис. 5.59 сравните точки

$D(x + \Delta x, y + \Delta y)$ и $D_1(x + \Delta x, y + \Delta y, f(x + \Delta x, y + \Delta y))$.





ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ



Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D \in xOy$, содержащей точку M_0 .

Определение 20. Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ при стремлении $M(x, y)$ к $M_0(x_0, y_0)$, если для всякого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует (или найдётся) число $r(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех точек (x, y) , для которых выполняется неравенство $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, имеет место неравенство $|A - f(x, y)| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$, или $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$.

Геометрически можно интерпретировать это определение так: число A является пределом функции $f(x, y)$ при $M \rightarrow M_0$, если в ε -окрестность этого числа попадут все значения функции, соответствующие точкам (x, y) из r -окрестности точки M_0 .

Пример Вычислить пределы функций:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

Решение. 43.1. Условие $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ эквивалентно условию $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$.

Предварительно получим следующие неравенства:

- очевидно, $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq |2xy| \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$;

- вспомним неравенство $\sin \alpha < \alpha$, выведенное при доказательстве

первого замечательного предела: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow \sin \alpha \sim \alpha$.

$$\alpha \rightarrow 0 \quad \alpha$$

Теперь можно оценить выражения

$$|\sin xy| \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad 0 \leq \left| \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Окончательно $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$

Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y=3}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \frac{x^2}{x+y} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = A.$$

Сделаем замену переменной $x = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \frac{x^2}{x+y} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\ln(1+t)}{t(1+ty)} = \left(\begin{array}{c} \ln(1+t) \sim t \\ \text{при } t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{1}{1+ty} = 1.$$

Таким образом, $A = e$.

Определение 21. Функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она определена в точке и некоторой её окрестности и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \text{ или } \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Введём обозначения:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0, z_0 = f(x_0, y_0).$$

Определение 22. Функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0) , если

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0, \text{ или } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0.$$

Иначе говоря, функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, если бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определение 23. Функция непрерывна в области D , если она непрерывна в каждой точке этой области. Точки, в которых условия непрерывности нарушены, называются **точками разрыва** (это точки, где функция не определена).

Определение 24. Точка M_0 называется точкой разрыва функции $u = f(M)$, если функция $u = f(M)$ определена вблизи точки M_0 (т. е. её окрестности), но не определена в самой точке M_0 . Линия, все точки которой являются точками разрыва функции $u = f(M)$, называется **линией разрыва** этой функции.

Свойства непрерывных функций

Свойство 1. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа непрерывных в данной точке функций есть непрерывная функция в этой точке. Частное двух непрерывных функций в точке, при условии, что знаменатель отличен от нуля в этой точке, также есть непрерывная функция в этой точке.

Свойство 2. Непрерывность сложной функции. Пусть функции $z = \varphi_1(x, y)$ и $z = \varphi_2(x, y)$ непрерывны в некоторой точке $P_0(x_0, y_0) \in D$, и пусть функция $v = f(\varphi_1, \varphi_2) = F(x, y)$ непрерывна в точке $Q_0[\varphi_1(P_0), \varphi_2(P_0)]$ пространства $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, соответствующей точке P_0 , тогда такая функция v будет непрерывна в точке P_0 .

СВОЙСТВО 3. Если функция $z = f(x, y) = f(M)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то:

- функция z ограничена в области $\bar{D}$;
- функция z принимает в области $\bar{D}$ свои наименьшее и наибольшее значения;
- если в двух точках A и B области D функция z принимает неравные значения, то она принимает и всякое промежуточное между ними значение по крайней мере в одной точке любой кривой, соединяющей точки A и B и целиком лежащей в области D . В частности, если $f(A)$ и $f(B)$ – числа противоположных знаков, то функция $f(M)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке любой упомянутой кривой.

Свойство 4. Свойство равномерной непрерывности. При всяком $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух точек A и B области D , расстояние между которыми меньше $\delta(\varepsilon)$, будет справедливо неравенство $|f(A) - f(B)| < \varepsilon$.

функция, непрерывная по совокупности аргументов, будет непрерывна и по каждому аргументу в отдельности (при фиксированных других аргументах). Обратное же неверно!

Пример · Исследовать на непрерывность функции:

$$z = x^2 + y^2;$$

Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна на всей плоскости

Для доказательства используем определение 22. Оценим приращение функции Δz . Пусть переменные x и y получили соответственно приращения Δx и Δy . Тогда приращение функции

$$\begin{aligned}\Delta z &= z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2) = \\ &= 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.\end{aligned}$$

Переходя к пределу, получаем $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$.

Значит, данная функция непрерывна для любых значений x и y .

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} 8 + x - y & \text{при } x \neq 1, y \neq 2; \\ 6 & \text{при } x = 1, y = 2; \end{cases}$$

44.2. Функция определена в самой точке $M_0(1, 2)$ и вблизи её, но её предел при $M(x, y) \rightarrow M_0(1, 2)$ не совпадает с частным значением функции в этой точке: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (8 + x - y) = 7 \neq f(1, 2) = 6$.

Вывод: функция непрерывна всюду, кроме точки $(1, 2)$.

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - y}, & x^2 \neq y; \\ 1, & x^2 = y; \end{cases}$$

44.3. Эта функция непрерывна всюду (см. свойство 1), кроме точек, лежащих на параболе $y = x^2$, где знаменатель дроби обращается в нуль, т. е. имеется линия разрыва.

Частные производные функции нескольких переменных



Частные производные

Для наглядности, здесь и далее все определения и утверждения будем формулировать для функции 2-х (или 3-х) переменных. На случай большего числа неизвестных они обобщаются естественным образом.

Пусть $z = f(x, y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$,

Пусть $\forall M_0(x_0, y_0) \in D$.

Придадим x_0 приращение Δx , оставляя значение y_0 неизменным (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$).

При этом $z = f(x, y)$ получит приращение

$$\Delta_x z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

$\Delta_x z(M_0)$ называется **частным приращением** функции

$z = f(x, y)$ **по x в точке $M(x, y)$**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предел при $\Delta x \rightarrow 0$ отношения

(если он существует) называется **частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$.**

Обозначают:

или
$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad z'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad f'_x(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \quad z'_x(M_0), \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \quad f'_x(M_0)$$

Замечания.

1) Обозначения

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

надо понимать как целые символы, а не как частное двух величин. Отдельно взятые выражения $\partial z(x_0, y_0)$ и ∂x смысла не имеют.

2) $z'_x(M_0)$ характеризует скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ (физический смысл частной производной по x).

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0, y_0)$:

Обозначают:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad z'_y(M_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad f'_y(M_0)$$

Соответствие

(и)

является функцией, определенной на $D_1 (D_2) \subseteq D(f)$.

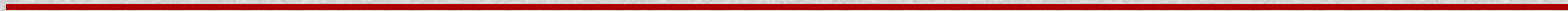
Ее называют **частной производной функции** $z = f(x, y)$ по **переменной** x (y) и обозначают

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f'_x(x, y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad f'_x(M)$$

Операция нахождения для функции $z = f(x, y)$ ее частных производных $\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, f'_y(x, y), \frac{\partial f(M)}{\partial y}, f'_y(M) \right)$.

называется **дифференцированием функции** $z = f(x, y)$ по **переменной** x и y соответственно.

$$f'_x(x, y) \text{ и } f'_y(x, y)$$



Пример

Найти частные производные функции двух переменных:

$$z = x^2 + y^3 + xy + 8;$$

$\sqrt{x}$

Решение. 48.1. Полагая $y = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной x : $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$.

Полагая $x = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной y :
 $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + x$.

Фактически, $f'_x(x, y)$ — это обыкновенная производная функции $z = f(x, y)$, рассматриваемой как функция одной переменной x (соответственно y) при постоянном значении другой переменной.

Поэтому, вычисление частных производных производится по тем же самым правилам, что и для функции одной переменной. При этом, одна из переменных считается константой.

Пример $z = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - y^2} \right);$

48.2. Считая z функцией только от x , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 - y^2} \right)'_x = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} (x^2 - y^2)'_x \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (2x - 0) \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + x}{\left(x + \sqrt{x^2 - y^2} \right) \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Аналогично, считая z функцией только от y , находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 - y^2} \right)'_y =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} (0 - 2y) \right) = \frac{-y}{\left(x + \sqrt{x^2 - y^2} \right) \cdot \sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Пример

$$z = e^{x/y};$$

48.3. Полагая $y = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)'_x = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y} \cdot x' = \frac{1}{y} e^{x/y}.$$

Полагая $x = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)'_y = e^{x/y} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{y} \right)'_y = -\frac{x}{y^2} e^{x/y}.$$

Пример $z = \sin(xy) + 5x^3y + x - y^2;$

48.4. Полагая $y = \text{const}$, находим $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy) \cdot (xy)'_x + 5y \cdot (x^3)' + 1 - 0 = y \cos(xy) + 15yx^2 + 1.$$

Полагая $x = \text{const}$, находим $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(xy) \cdot (xy)'_y + 5x^3 \cdot y' + 0 - 2y = x \cos(xy) + 5x^3 - 2y.$$

Пример

$$z = x^y;$$

48.5. Полагая, что $y = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной x :

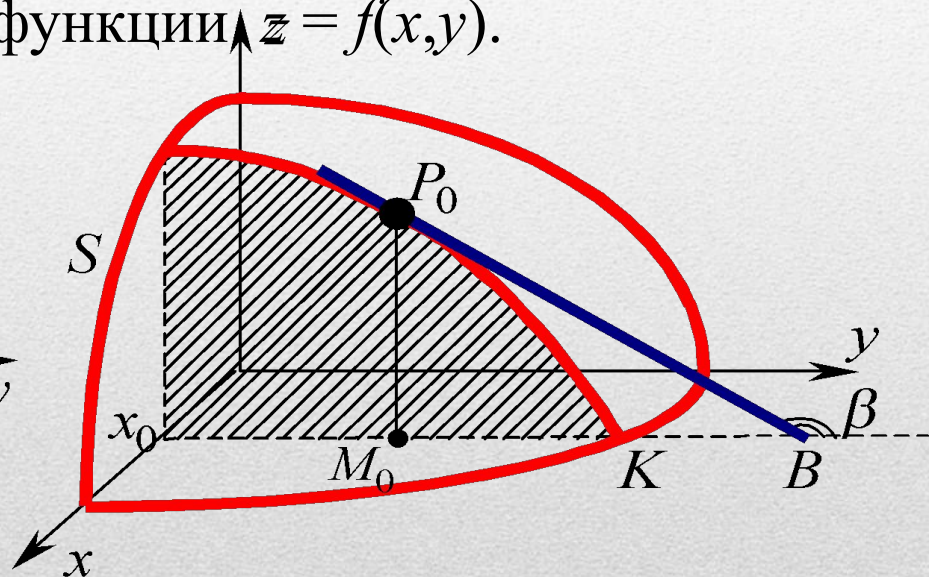
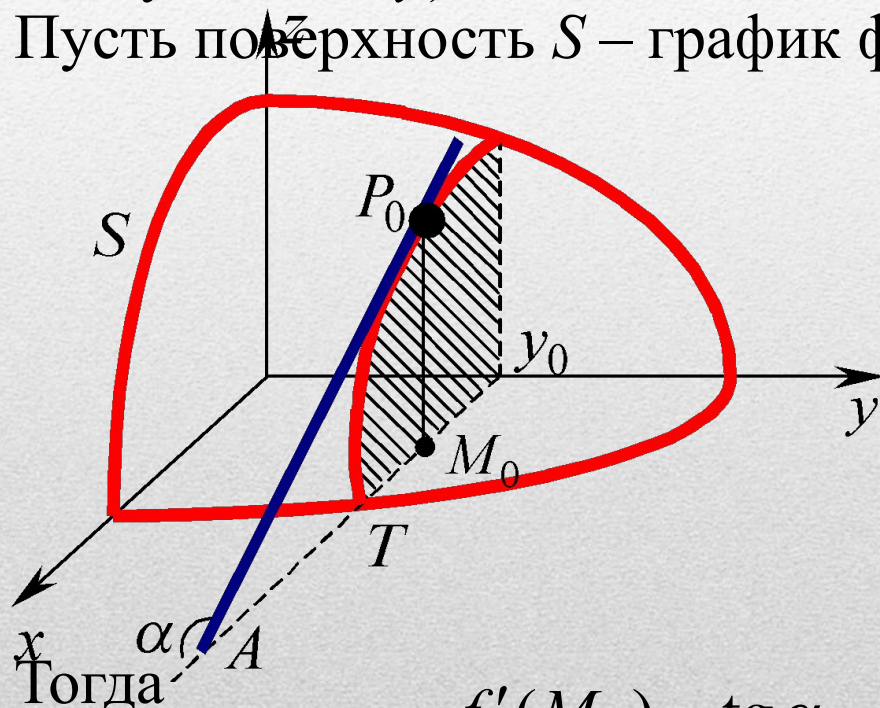
$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}.$$

Считая z функцией от y , находим $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ частных производных функции ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в $M_0(x_0, y_0)$ частную производную по x (y).

Пусть поверхность S – график функции $z = f(x, y)$.



Тогда $f'_x(M_0) = \operatorname{tg} \alpha$ ($f'_y(M_0) = \operatorname{tg} \beta$),
 где $\alpha(\beta)$ – угол наклона к оси $Ox(Oy)$ касательной, проведенной в точке $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к линии пересечения поверхности S и плоскости $y = y_0$ ($x = x_0$).