

Комплексные числа

ПЛАН:

1. Основные понятия. Формы записи.
2. Действия над комплексными числами:
 - a) Сложение комплексных чисел;
 - b) Вычитание комплексных чисел;
 - c) Умножение комплексных чисел;
 - d) Деление комплексных чисел ;

Вычислите:

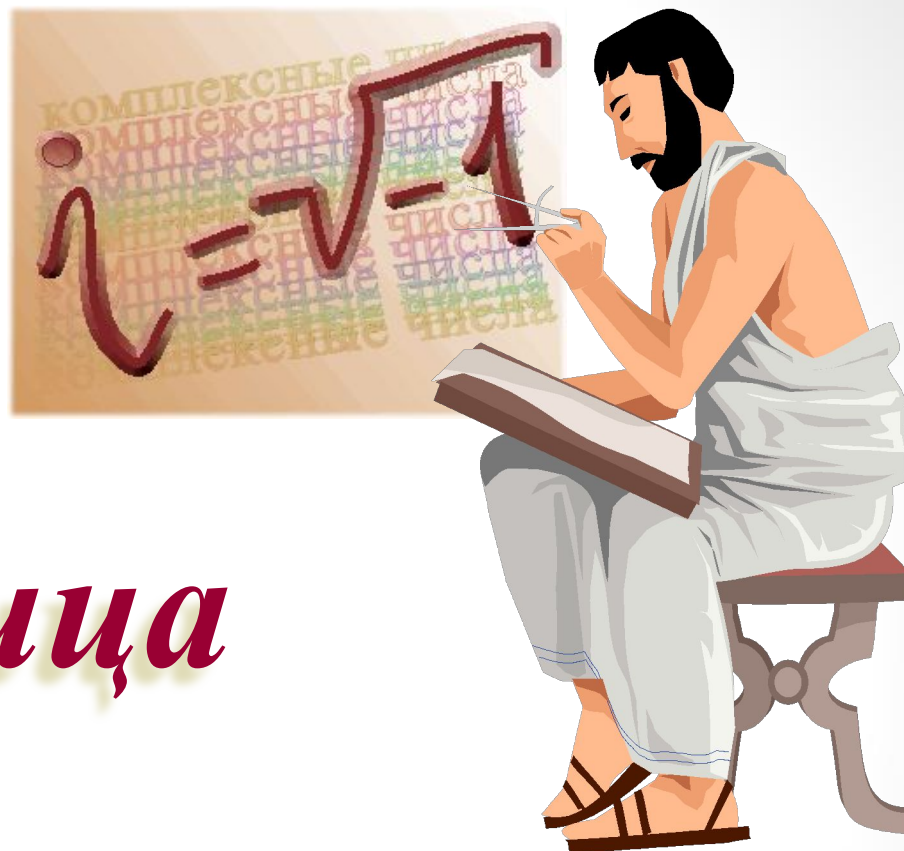
$$\sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt{6,25} = 2,5$$

$$\sqrt{\frac{64}{256}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{-900}$$

Мнимая единица



i – начальная буква французского
слова

imaginaire – «МНИМЫЙ»

Например,

$$\begin{aligned}\sqrt{-36} &= \sqrt{36 \cdot (-1)} = \\ &= \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i\end{aligned}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$i^1 = \boxed{i} \qquad i^2 = \boxed{-1}$$

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = \boxed{-i}$$

$$i^4 = i^3 i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = \boxed{1}$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = \boxed{i}$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = \boxed{-1}$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = \boxed{-i}$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = \boxed{1}$$

Комплéксные числа

Определение 1. Числа вида $a + bi$,

где a и b — действительные числа,

i — мнимая единица, $i^2 = -1$

называются **комплéксными**.

a — действительная часть комплéксного числа,

b — мнимая часть комплéксного числа

Например, $Z_1 = 6 + 2i$ или $Z_2 = 1 - 5i$.

Основные понятия.

Два комплексных числа
называются равными тогда

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i;$$

и

$$z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$$

только тогда, когда равны их

действительные и мнимые
части.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2; \beta_1 = \beta_2$$

Два комплексных числа,
отличающихся лишь знаком
мнимой части, называются
комплексно-сопряженными.

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$$

$$z_2 = \alpha_2 - \beta_2 i$$

Примеры.

Пример 1.

$$z_1 = 5 + 3i ;$$

$$z_2 = 25 / 5 + 15 / 5i$$

$$\alpha = 5 = 25 / 5$$

$$\beta = 3 = 15 / 5$$

$$\text{Вывод : } z_1 = z_2$$

Пример 2.

$$z_1 = 5 + 3i ;$$

$$z_2 = 5 - 3i$$

Вывод : z_1 и z_2

комплексно -

сопряженные числа.

Найти x и y из равенства:

$$2y + 4xi = 13 - 6i;$$

Решение.

Используя условие равенства
комплексных чисел имеем

$$2y = 13,$$

$$4x = -6, \text{ тогда}$$

$$x = -1,5; \quad y = 6,5.$$

Формы записи КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

1. Алгебраическая.
2. Тригонометрическая.
3. Показательная.

Любое комплексное число можно записать в любой форме.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение и вычитание комплексных чисел.

Суммой (разностью) комплексных чисел $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$
и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называется комплексное число,

определяемое равенством:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) + (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) - (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 - a_2) + i \cdot (b_1 - b_2)$$

Сложение

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

Вычитание

$$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

$$z_1 = 12 + 3i, z_2 = 5 - 7i.$$

Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$;

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 + z_2 &= (12 + 3i) + (5 - 7i) = \\ &= (12 + 5) + (3i - 7i) = \underline{17 - 4i}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } z_1 - z_2 &= (12 + 3i) - (5 - 7i) = \\ &= (12 - 5) + (3i + 7i) = \underline{-7 + 10i}; \end{aligned}$$

Действия над комплексными числами

Умножение комплексных чисел.

Умножением комплексных чисел $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называется число, получаемое при умножении этих чисел по правилам алгебры как двучлены.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) =$$

$$= a_1 \cdot a_2 + i \cdot b_1 \cdot a_2 + i \cdot b_2 \cdot a_1 + i^2 \cdot b_1 \cdot b_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (b_1 \cdot a_2 + b_2 \cdot a_1)$$

Умножение

$$(a+bi)(c+di) =$$

$$= ac + adi + bci + bd \overset{-1}{i^2} =$$

$$= (ac-bd) + (ad+bc) i$$

Выполните действия:

$$(2 + 3i)(5 - 7i) =$$

$$= (10 + 21) + (-14 + 15)i = 31 + i$$

$$(5 + 3i)(5 - 3i) = 25 - 9i^2 = 34$$

$$(2 - 7i)^2 = 4 - 28i + 49i^2 = -45 - 28i$$

$$\begin{aligned} 25m^2 + 16 &= 25m^2 - 16i^2 = \\ &= (5m - 4i)(5m + 4i) \end{aligned}$$

Действия над комплексными числами

Деление комплексных чисел.

Чтобы разделить $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ на $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ необходимо умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_2 + i \cdot b_2} = \frac{(a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)}{(a_2 + i \cdot b_2) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \cdot \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Деление

$$\frac{2 + 3i}{5 - 7i} = \frac{2 + 3i}{5 - 7i} \cdot \frac{5 + 7i}{5 + 7i}$$

$$= \frac{-11 + 29i}{74} = -\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i$$

Домашняя работа

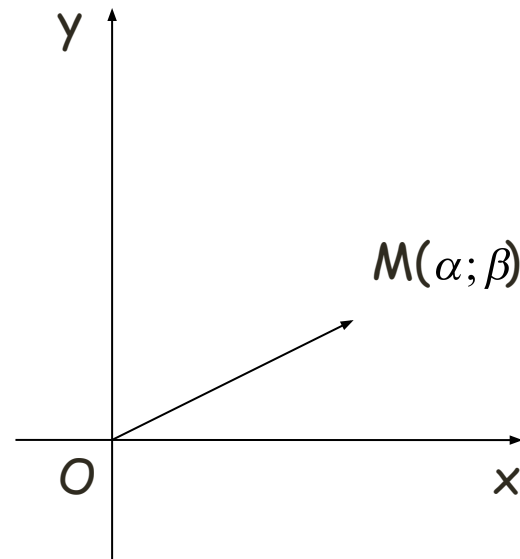
Найти сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел:

- $Z_1 = (3 + 5i)$, $Z_2 = (7 - 2i)$
- $Z_1 = (3 - 2i)$, $Z_2 = (5 + 3i)$
- $Z_1 = (4 + 2i)$, $Z_2 = (-3 + 2i)$.
- $Z_1 = (-2 + 3i)$, $Z_2 = (7 - 2i)$

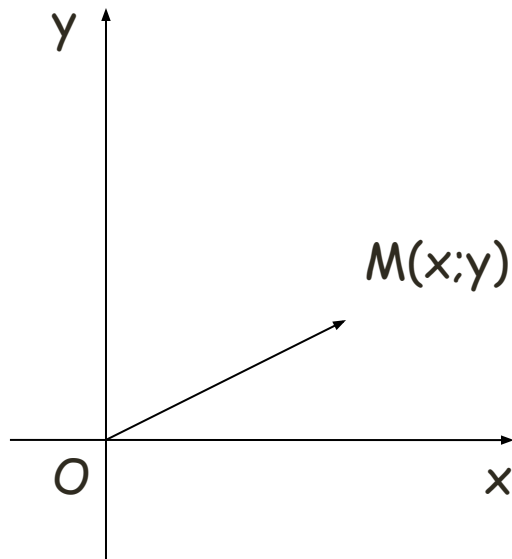
Геометрическое изображение комплексных чисел.

Всякое комплексное число
можно изобразить точкой
плоскости xOy такой,
что x - действительная часть,
 y - мнимая
И, наоборот, каждую точку
координатной плоскости
можно рассматривать как
образ комплексного числа.

$$Z = \alpha + \beta i, M(\alpha, \beta)$$

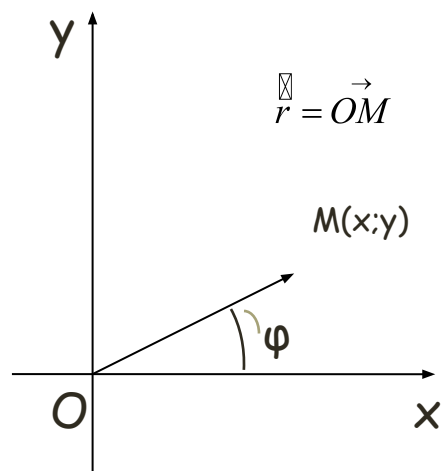


Геометрическое изображение комплексных чисел.



Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.
Ось абсцисс Ox называется *действительной осью*.
Ось ординат Oy называется *мнимой осью*.

Геометрическое изображение комплексных чисел.



Комплексное число можно
задавать с помощью радиуса
вектора $\vec{r} = \vec{OM}$.

Длина вектора называется
модулем
этого числа и обозначается
 ρ или r .

Величина угла между
положительным
направлением оси Oх и вектором
называется аргументом этого
комплексного числа и
обозначается

$\text{Arg } Z$ или φ .

Аргумент комплексного числа
определяется с точностью до