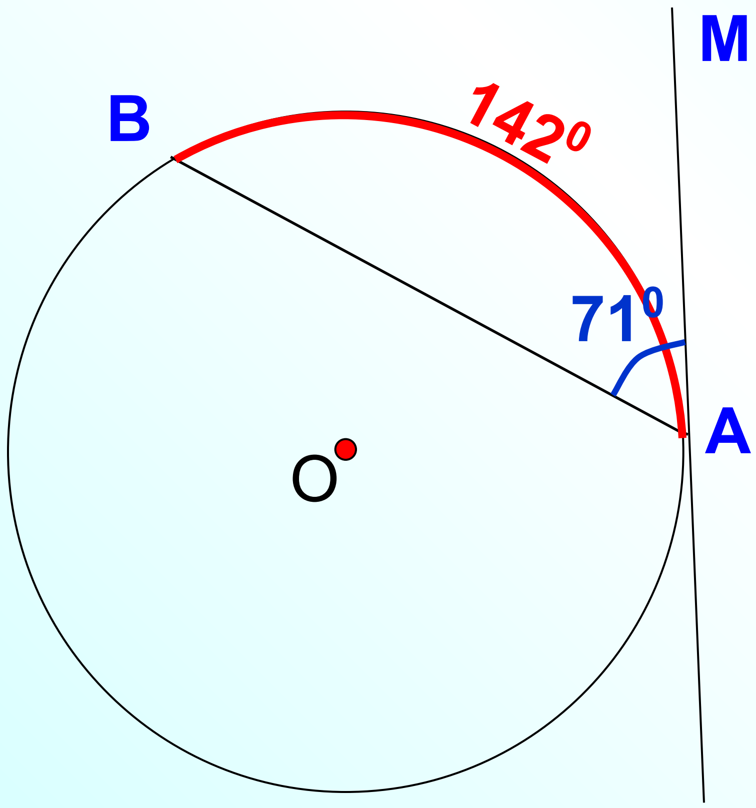
Четыре замечательные точки треугольника

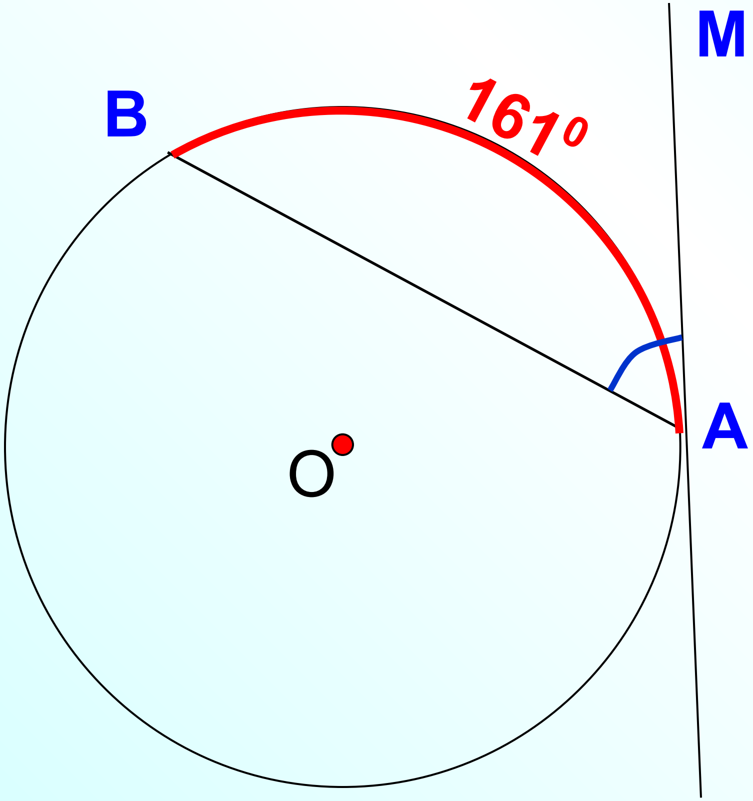
8 класс

Л.С. Атанасян Геометрия 7-9

Блиц-опрос. Найдите угол MAB.

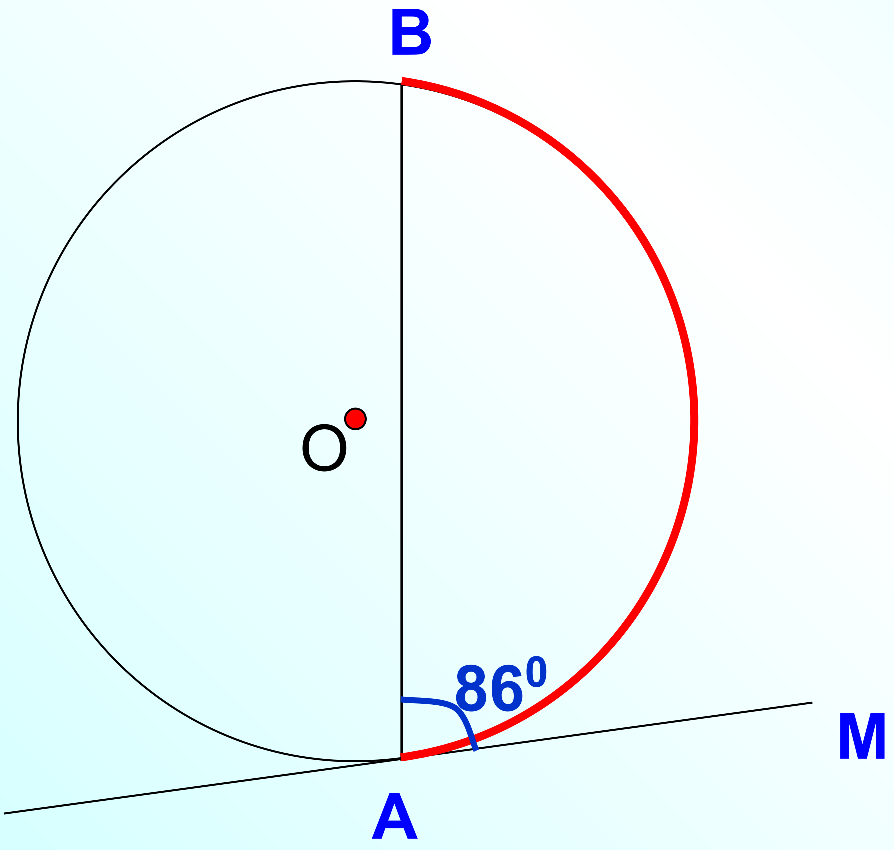


Блиц-опрос. Найдите угол MAB.



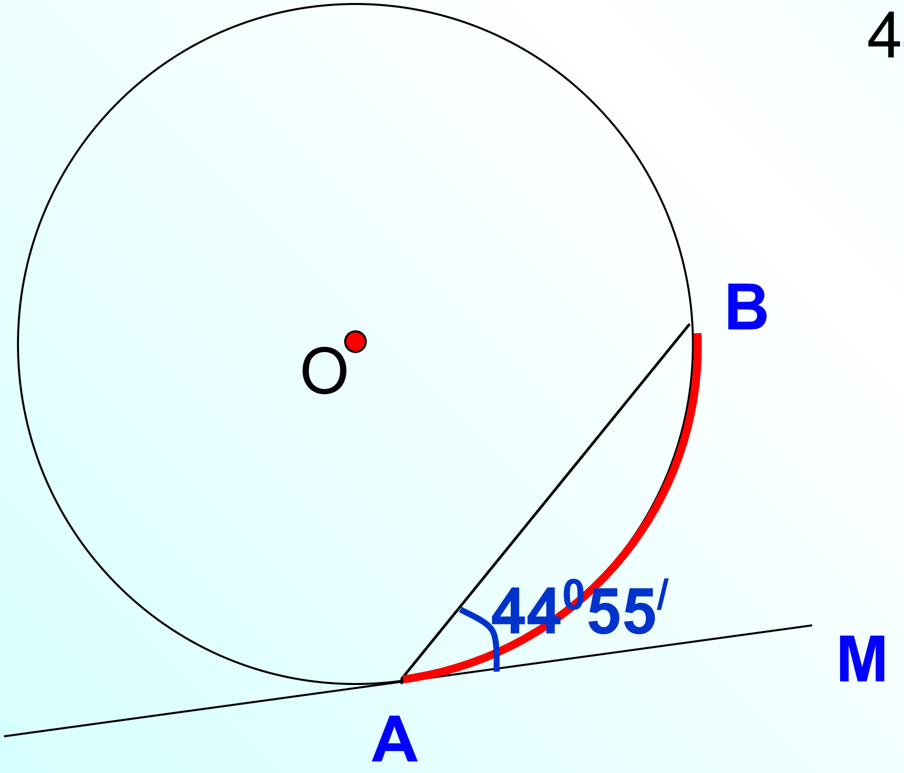
$161^0 : 2 = 160^0 60' : 2$ **$= 80^0 30'$**

Блиц-опрос. Найдите дугу АВ.



$86^0 \cdot 2 =$ **$= 172^0$**

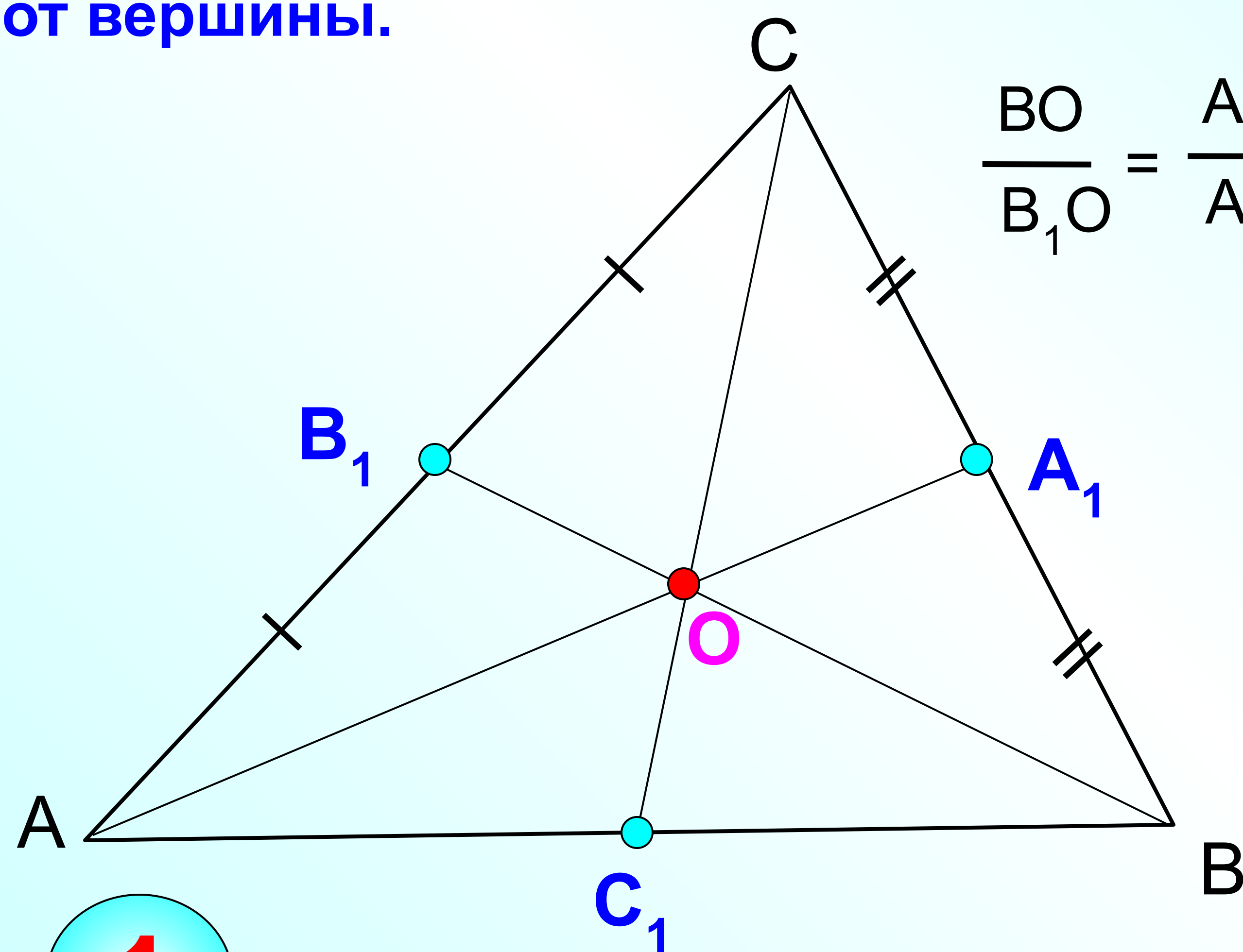
Блиц-опрос. Найдите дугу АВ.



$44^0 55^/ \cdot 2 = 88^0 110^/$ $= 89^0 50^/$

Свойство медиан треугольника.

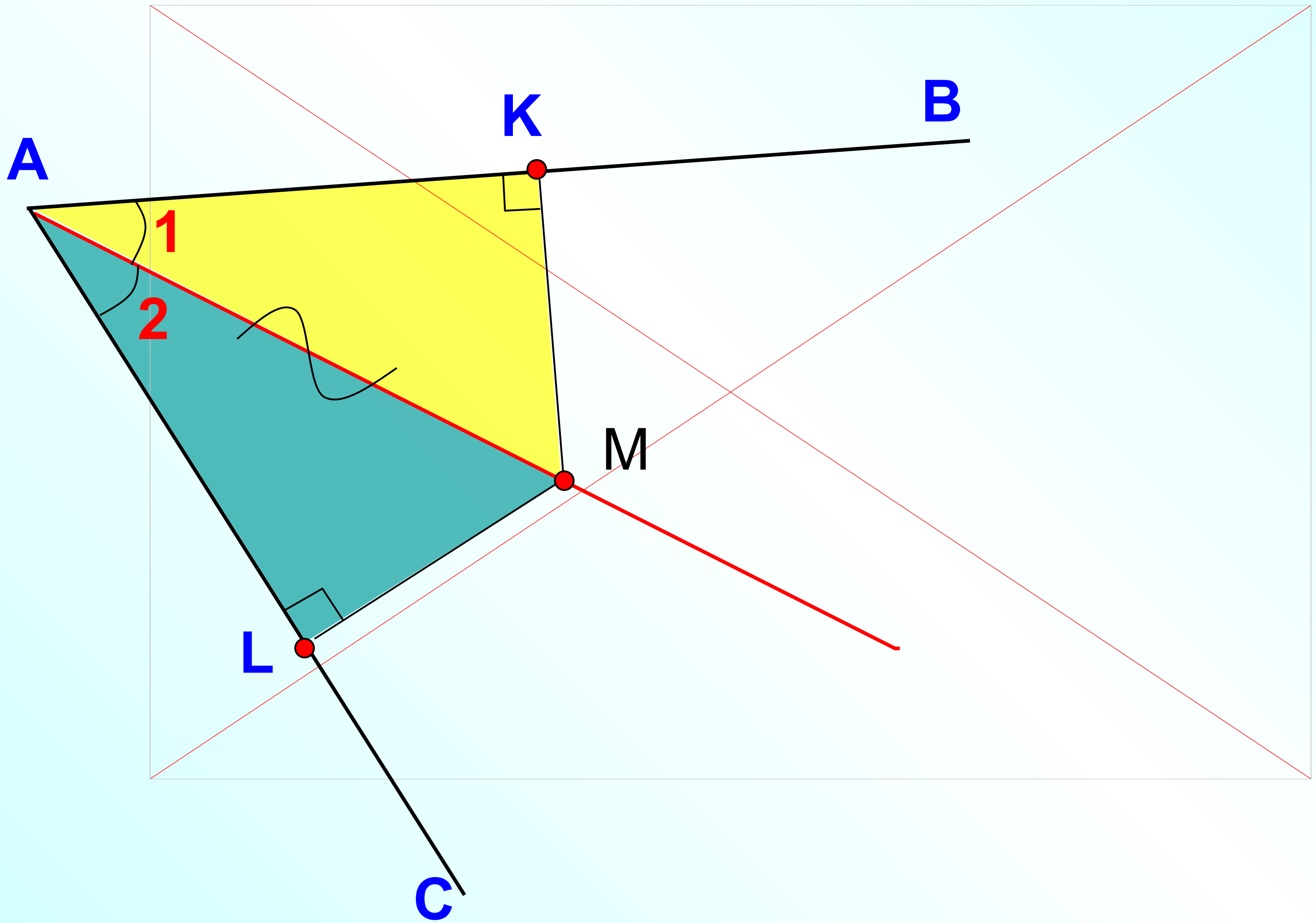
Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



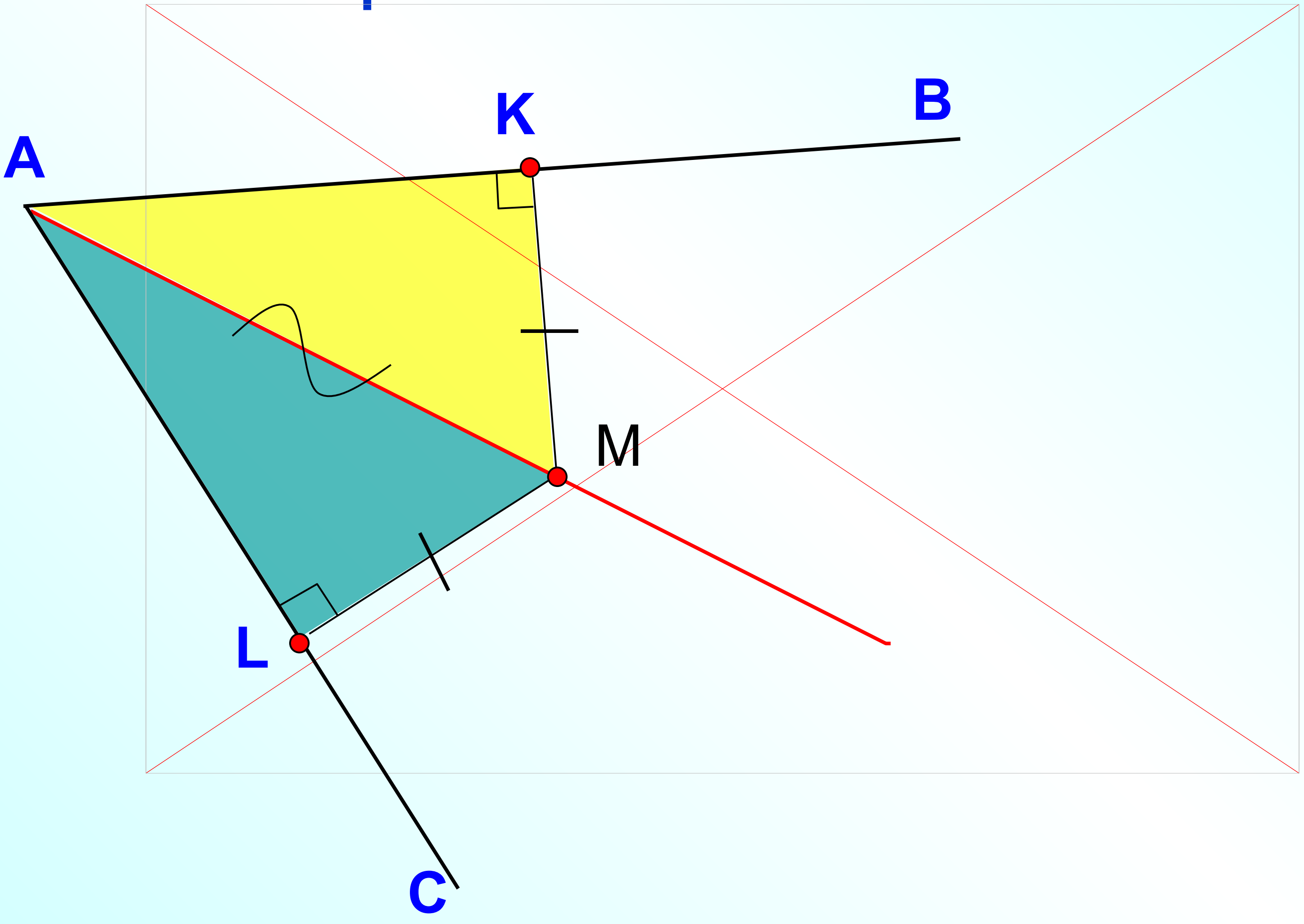
$$\frac{BO}{B_1O} = \frac{AO}{A_1O} = \frac{CO}{C_1O} = \frac{2}{1}$$

1

Теорема Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла **равноудалена** от его сторон.

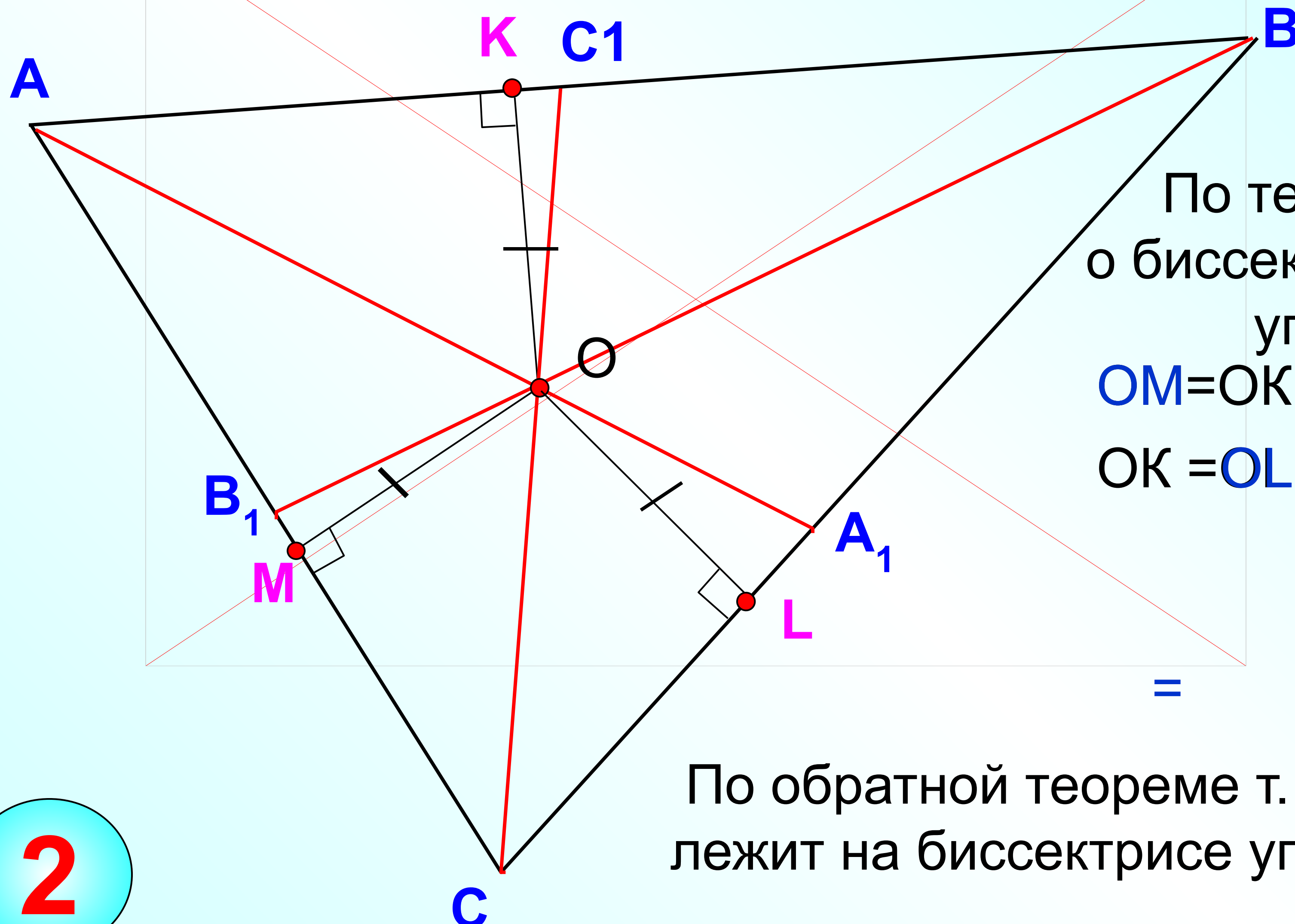


Обратная теорема Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.



Следствие

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



По теореме о биссектрисе угла

OM=OK

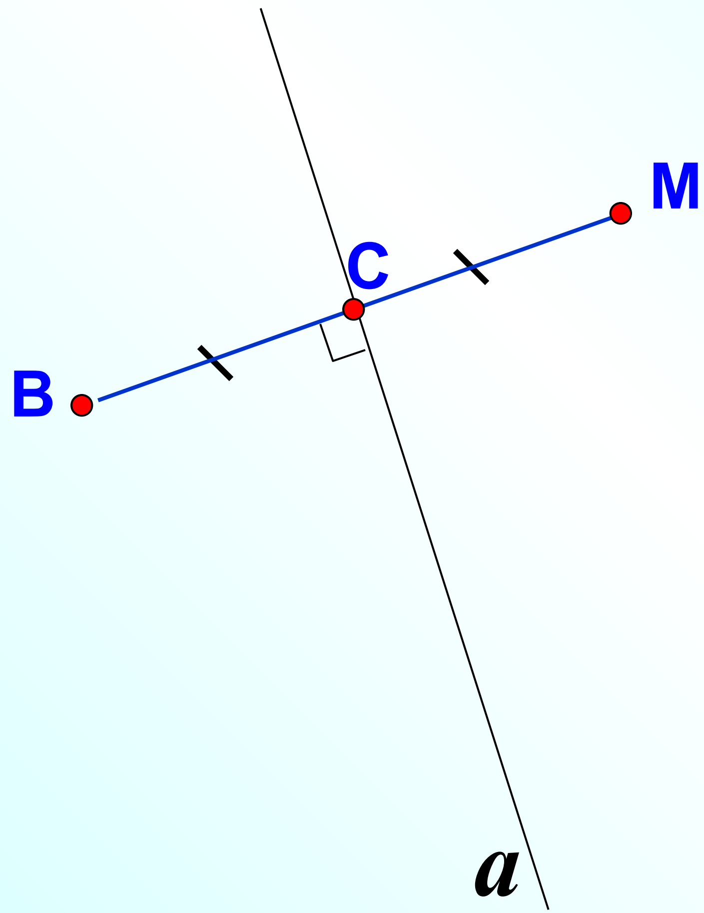
OK =OL

=

По обратной теореме т. O лежит на биссектрисе угла C

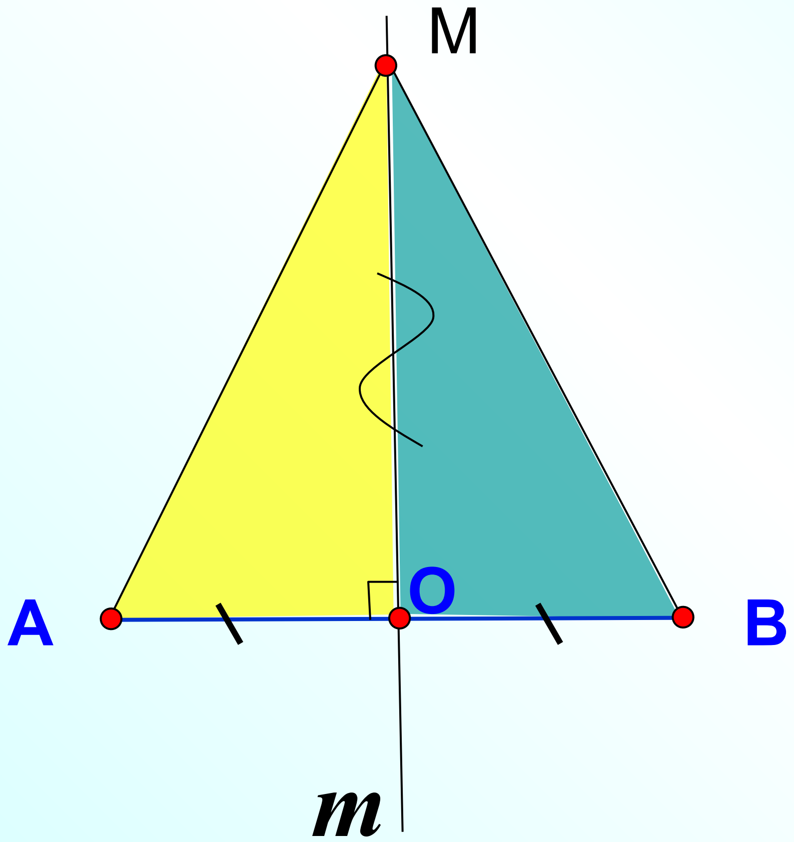
2

Определение Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярно к нему.



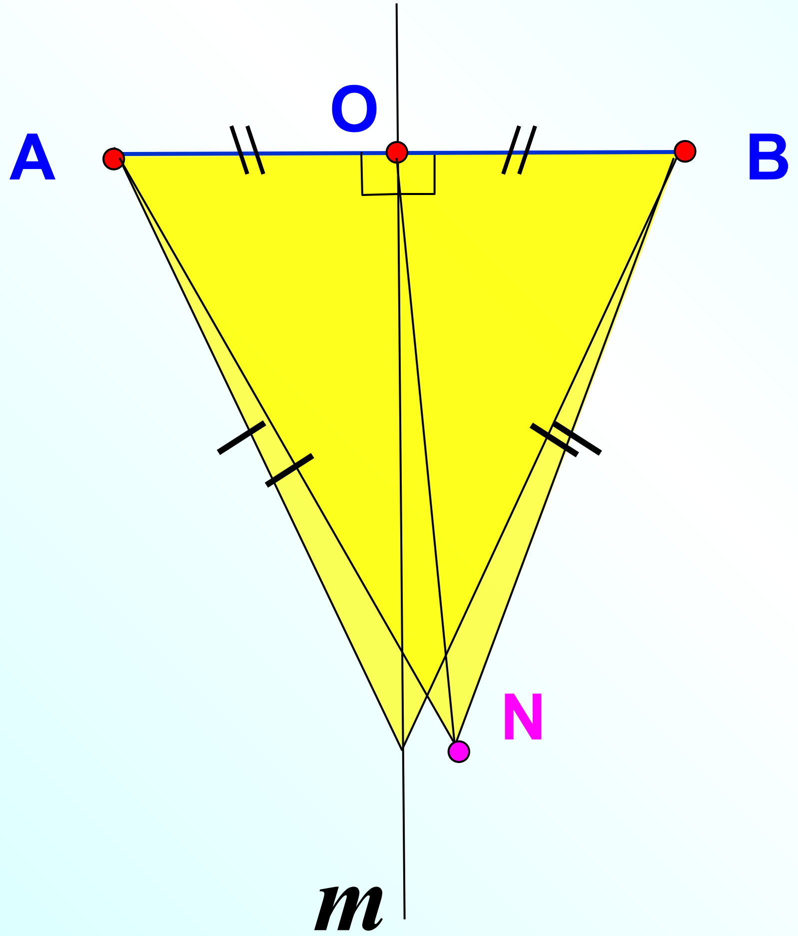
Прямая a – серединный перпендикуляр к отрезку.

Теорема Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

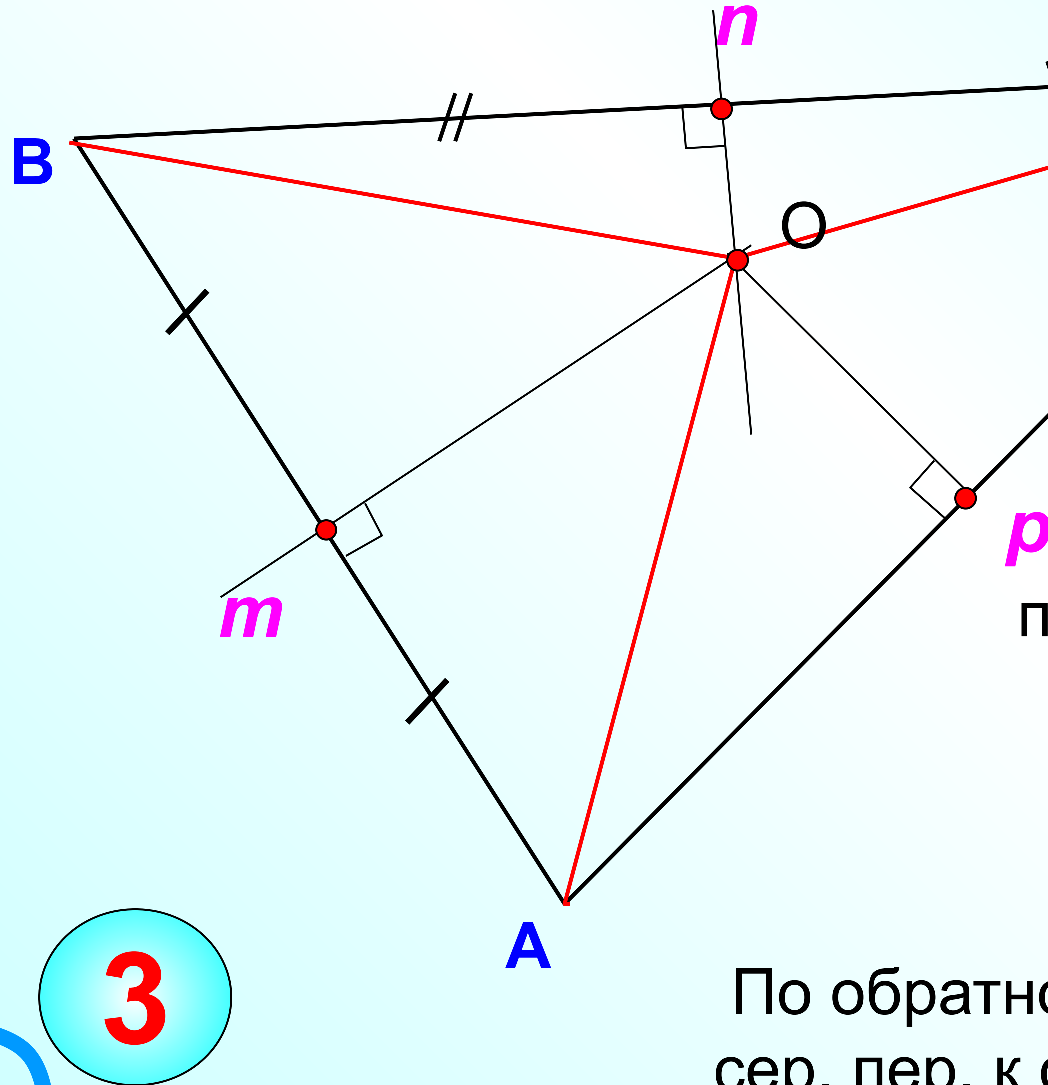


Обратная теорема

Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.



Следствие Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.



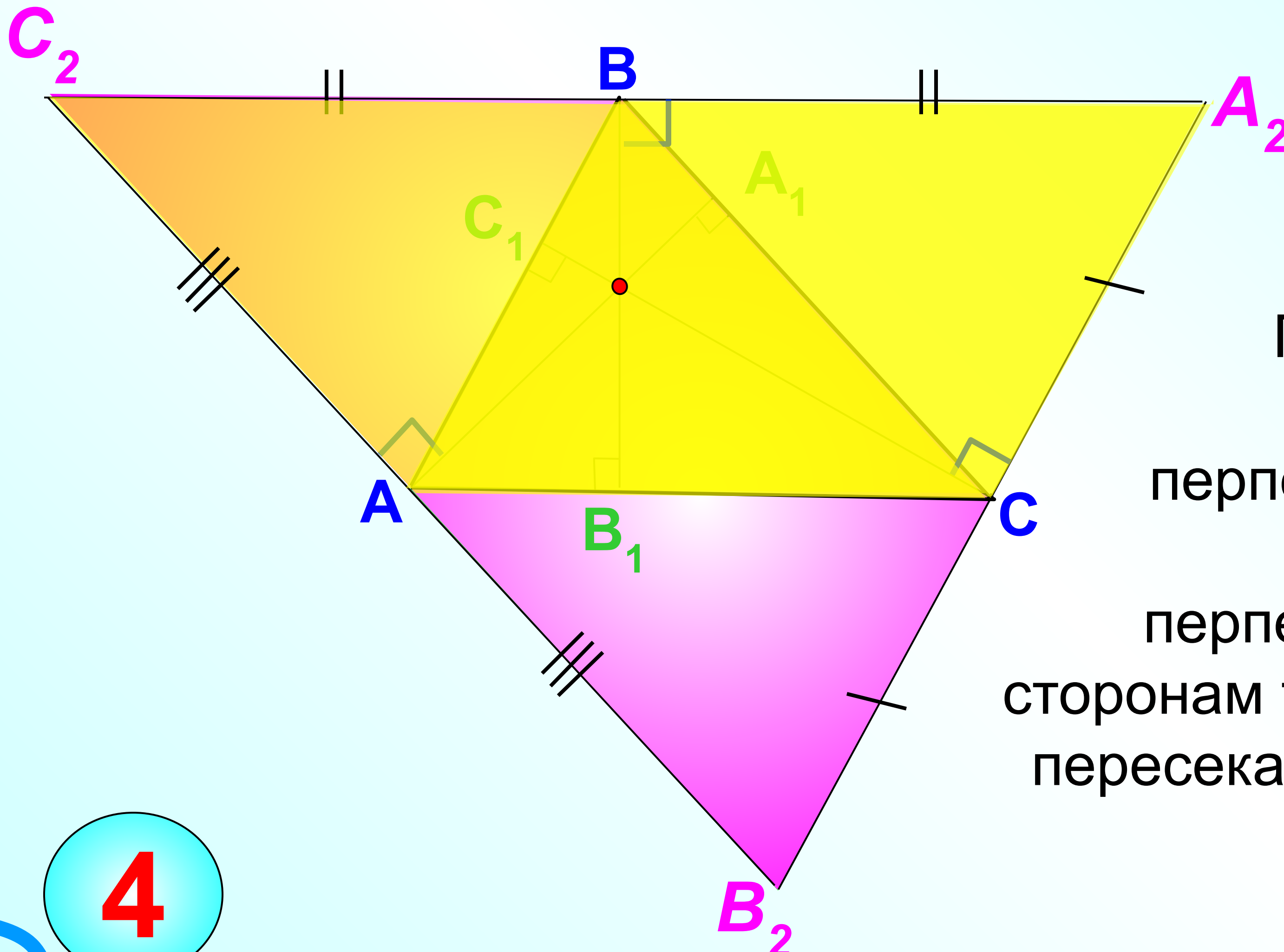
По теореме о серединном перпендикуляре к отрезку

OA=OB
OB =OC

=

По обратной теореме т. О лежит на сер. пер. к отрезку АС

Теорема Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.



По теореме о серединных перпендикулярах: серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

4

Замечательные точки треугольника.

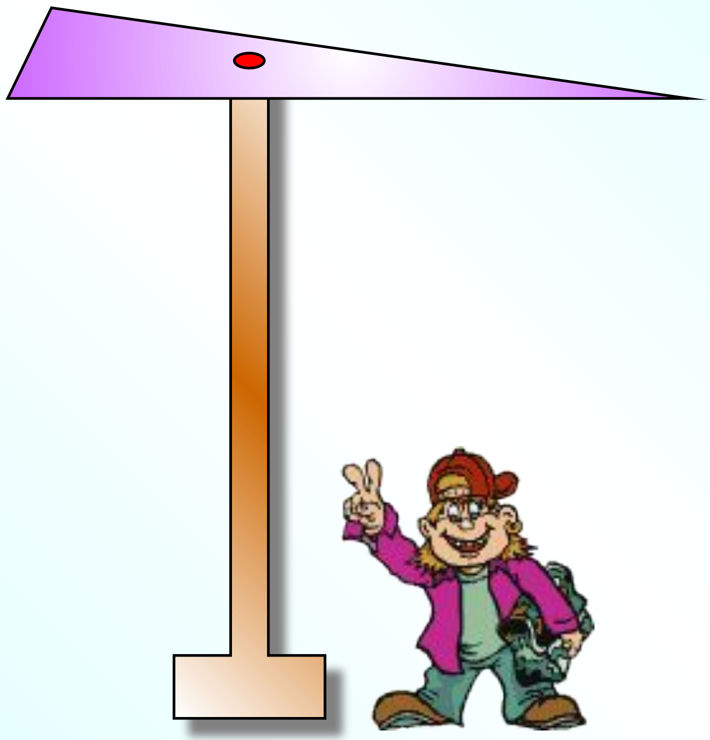
Точка пересечения медиан

Точка пересечения биссектрис

Точка пересечения высот

Точка пересечения серединных перпендикуляров

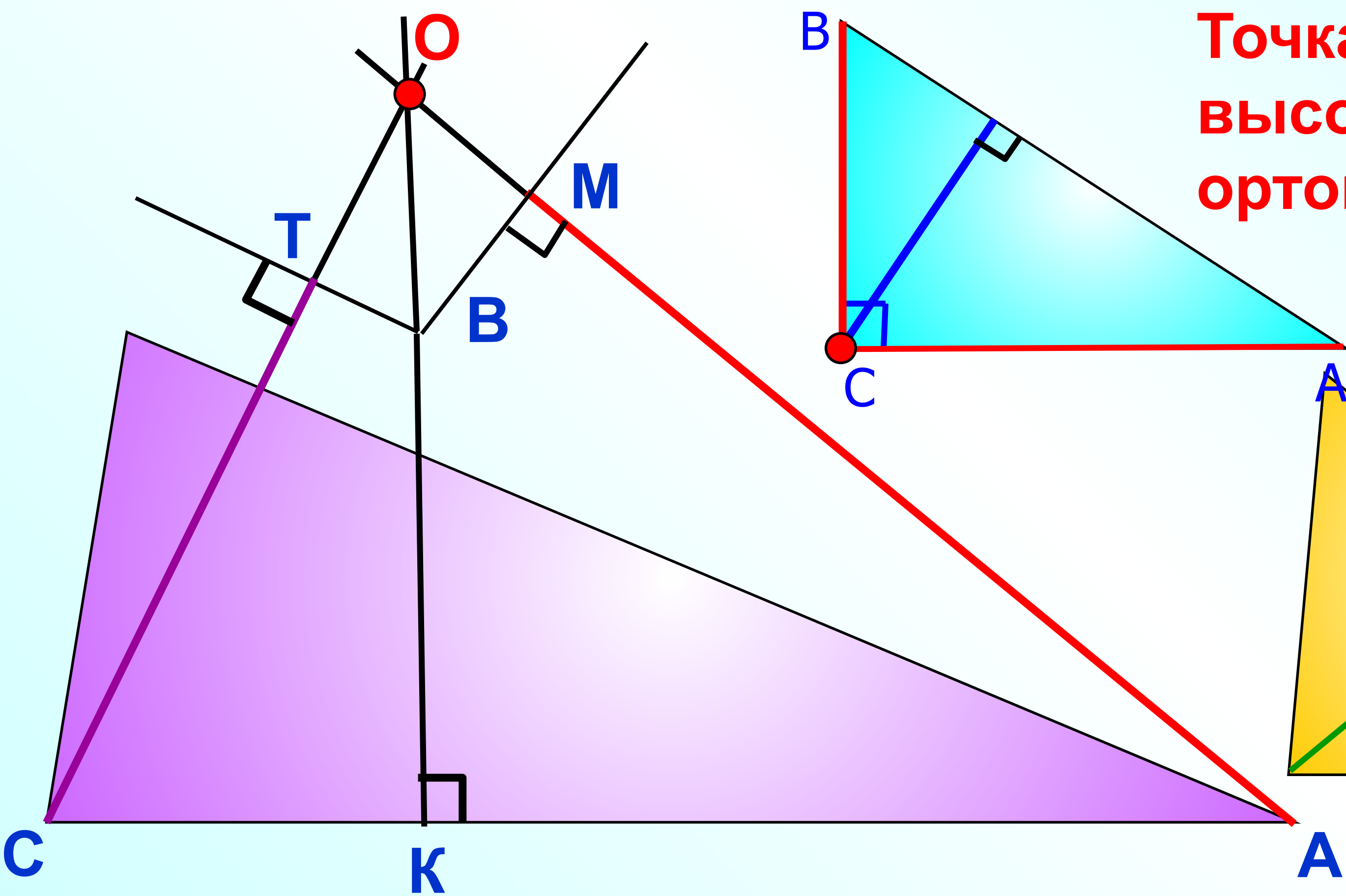
Треугольник, который опирается на острие иглы в точке пересечения медиан, находится в равновесии!



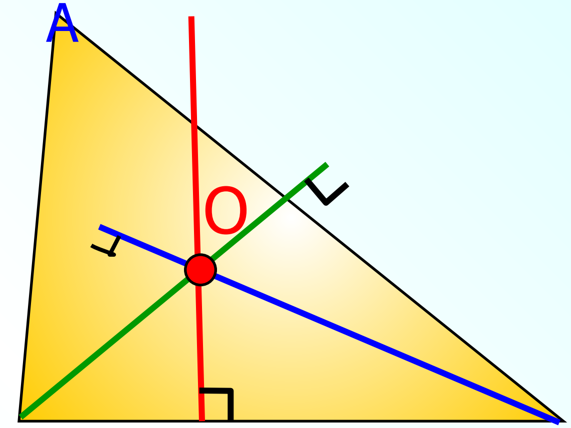
Точка, обладающая таким свойством, называется **центром тяжести треугольника.**

Высоты **прямоугольного треугольника** пересекаются в вершине С.

Высоты **остроугольного треугольника** пересекаются в точке О, которая лежит во внутренней области треугольника.

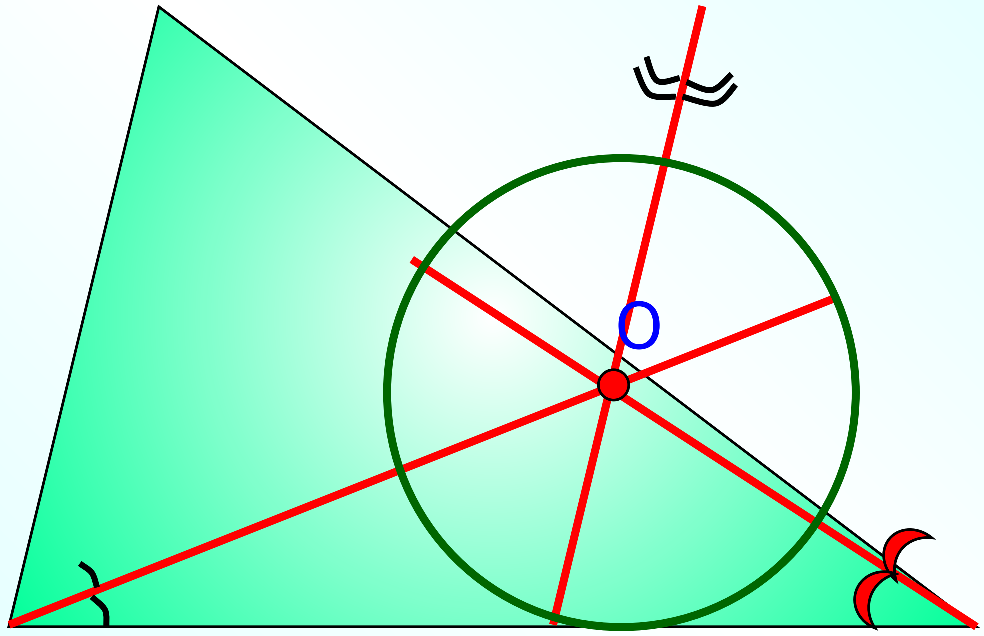


Точка пересечения высот называется ортоцентр.



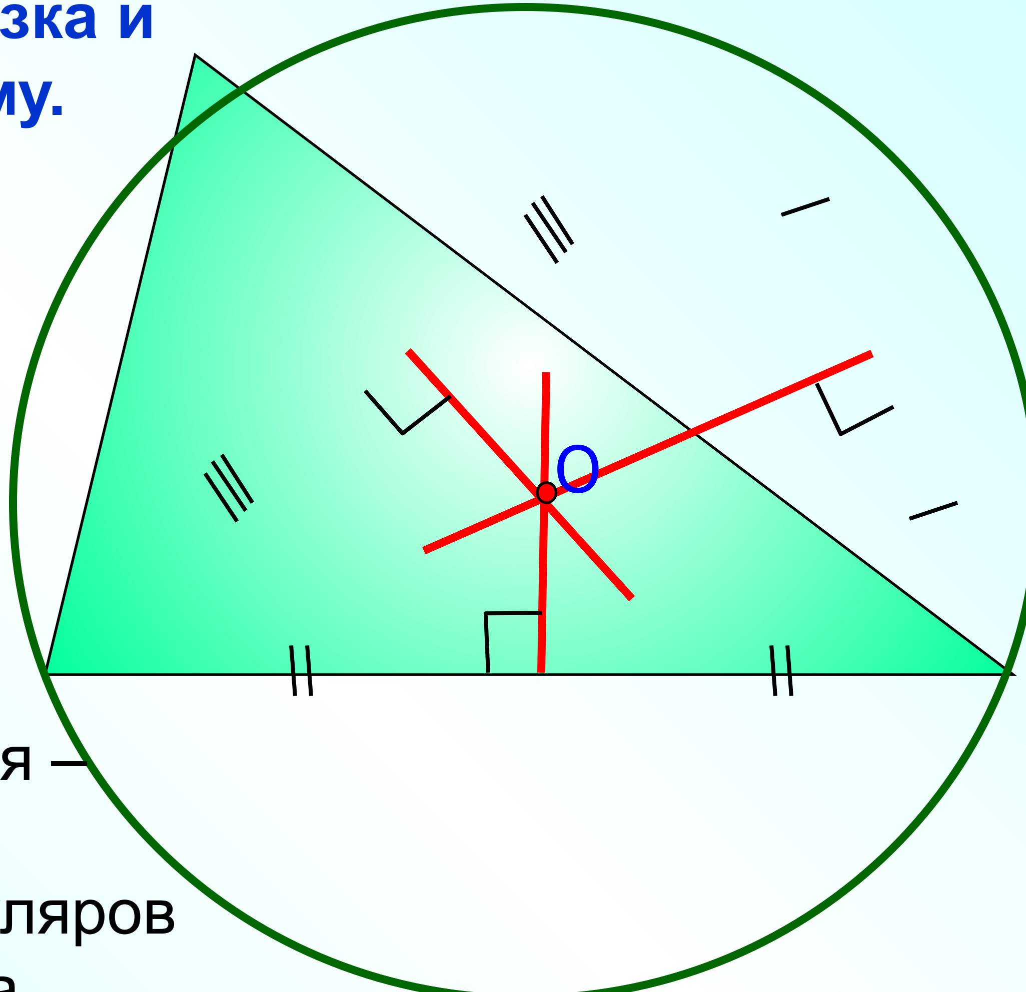
Высоты **тупоугольного треугольника** пересекаются в точке О, которая лежит во внешней области треугольника.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника.



Эта точка замечательная – точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности.

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярно к нему.

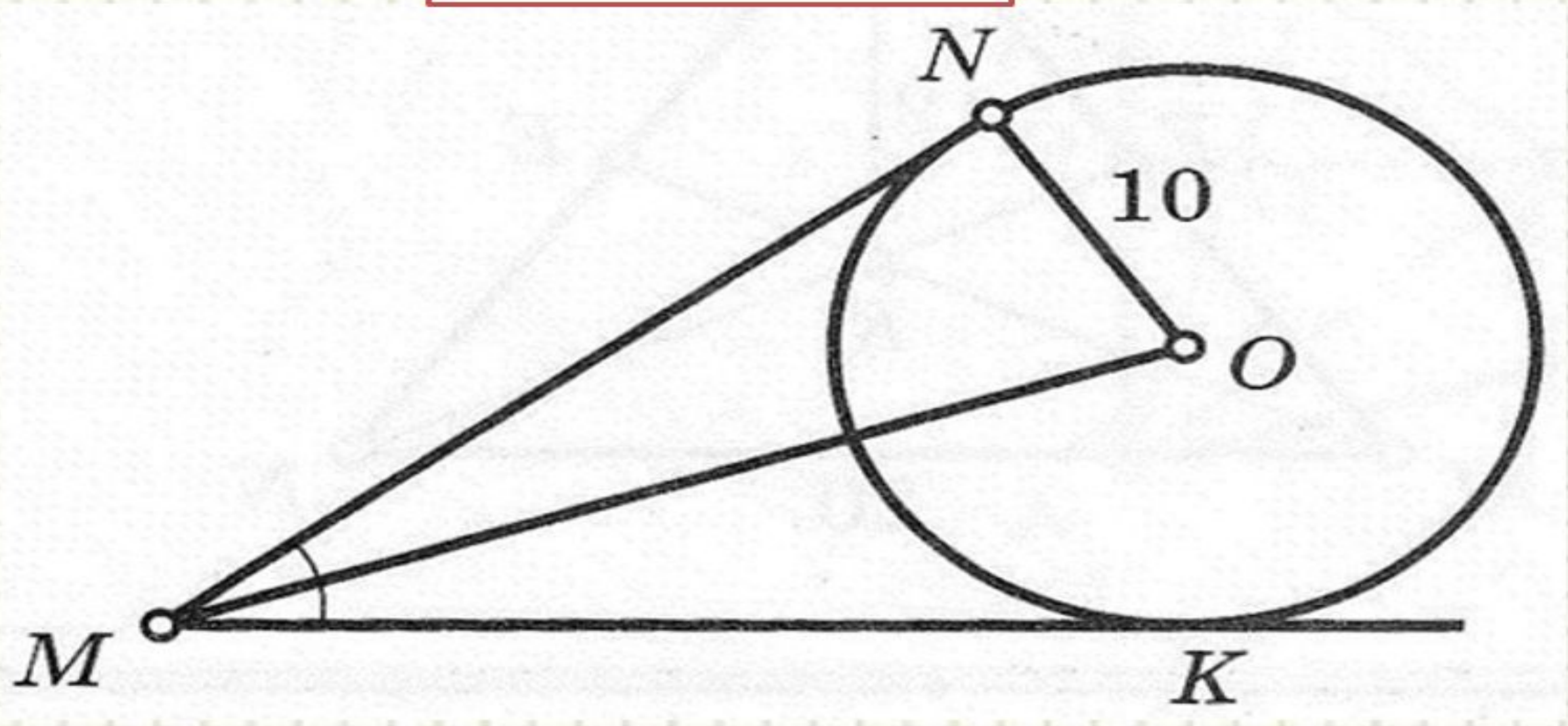


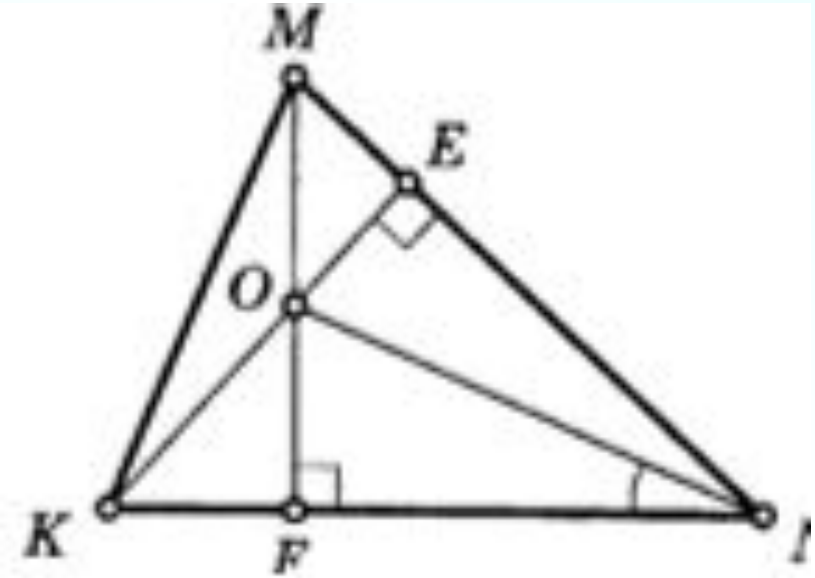
Эта точка замечательная – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника является центром описанной окружности.

1

Дано: $ON = 10$, $\angle NMK = 60°$

Найти: OM





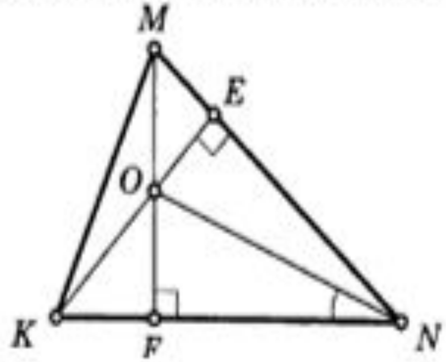
Дано: ΔKMN;
KE, MF – высоты;
$\angle MKN = 66°$.

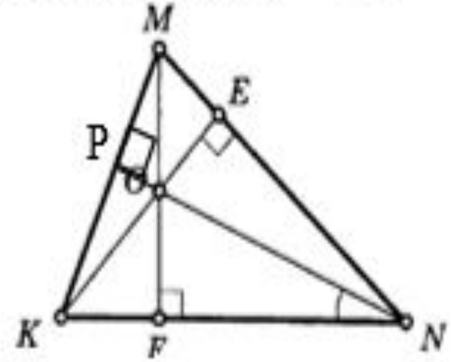
Найти: $\angle FNO$ - ?

Пример 2. По данным рисунка найдите угол FNO, если угол MKN = 66°.

Дано: ΔKMN;
KE, MF – высоты;
$\angle MKN = 66°$.

Найти: $\angle FNO$ - ?





Решение:

1) Продолжим NO до пересечения со стороной KM. $KM \cap NO = P$;

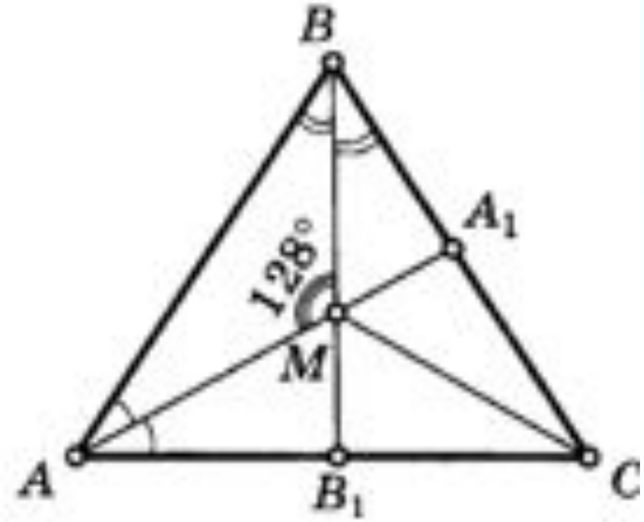
2) O – точка пересечения высот $\Rightarrow$ NP – высота ΔKMN $\Rightarrow$ $NP \perp KM$ $\Rightarrow$ ΔKPM – прямоугольный;

3) ΔKPM – прямоугольный $\Rightarrow$ $\angle PKN + \angle KNP = 90°$ (по свойству острых углов прямоугольного треугольника);

$\angle KNP = 90° - \angle PKN = 90° - 66° = 24°$;

$\angle KNP = \angle FNO = 24°$.

Ответ: $\angle FNO = 24°$.



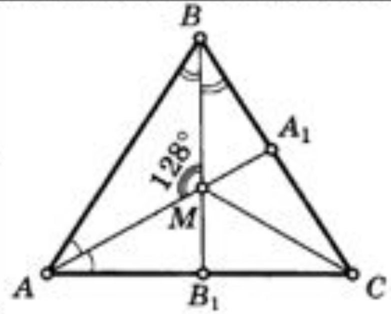
Дано: ΔABC;
AA_1, BB_1 – бис-сы;
$\angle AMB = 128°$.

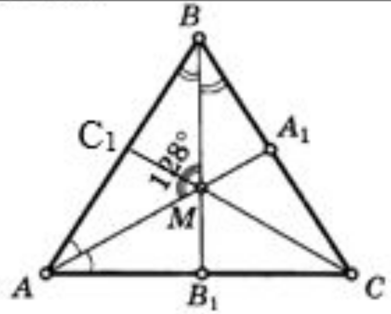
Найти: $\angle MCB_1$ - ?

Пример 4. По данным рисунка найти угол MCB_1?

Дано: ΔABC;
AA_1, BB_1 – бис-сы;
$\angle AMB = 128°$.

Найти: $\angle MCB_1$ - ?





Решение:

1) Продлим CM до пересечения с AB, $AB \cap CC_1 = C_1$,
M – точка пересечения биссектрис треугольника $\Rightarrow$ CC_1 – биссектриса треугольника ABC (по свойству биссектрис треугольника);

2) Рассмотрим ΔABM: $\angle AMB + \angle BAM + \angle ABM = 180°$ $\Rightarrow$ $\angle BAM + \angle ABM = 180° - 128° = 52°$;

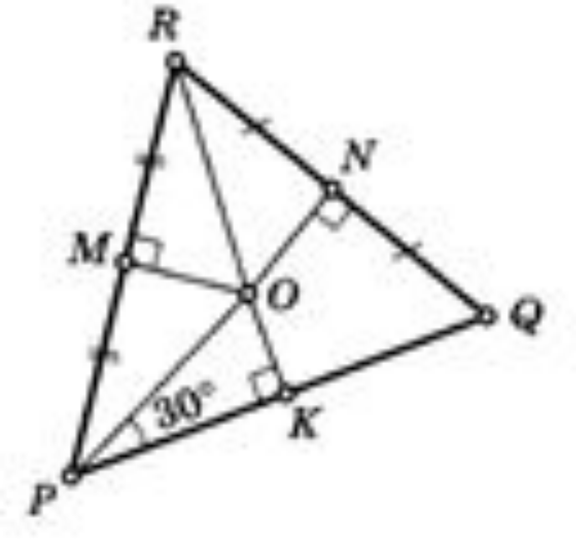
3) BB_1, AA_1 – биссектрисы ΔABC $\Rightarrow$ $\angle A = 2\angle BAM$, $\angle B = 2\angle ABM$;

4) По теореме о сумме углов треугольника: $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (2\angle BAM + 2\angle ABM) = 180° - 2(\angle BAM + \angle ABM) = 180° - 2 \cdot 52° = 76°$;

5) CC_1 – биссектриса $\angle C$ $\Rightarrow$ $\angle MCB_1 = \angle C : 2 = 38°$.

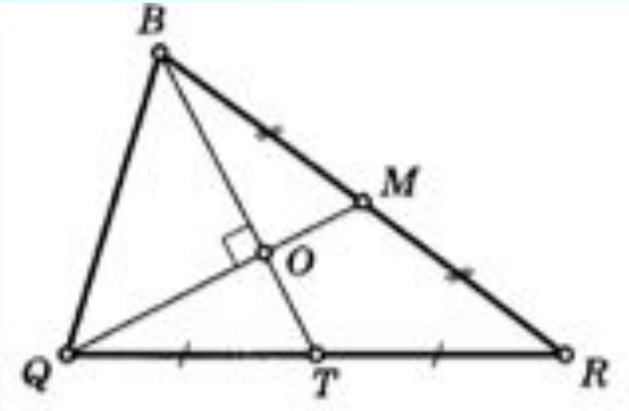
Ответ: $\angle MCB_1 = 38°$.

ДЗ



Дано: ΔPRQ;
OM, ON – серед. перп.;
$\angle OPK = 30°$;
$RO = 20$.

Найти: OK - ?

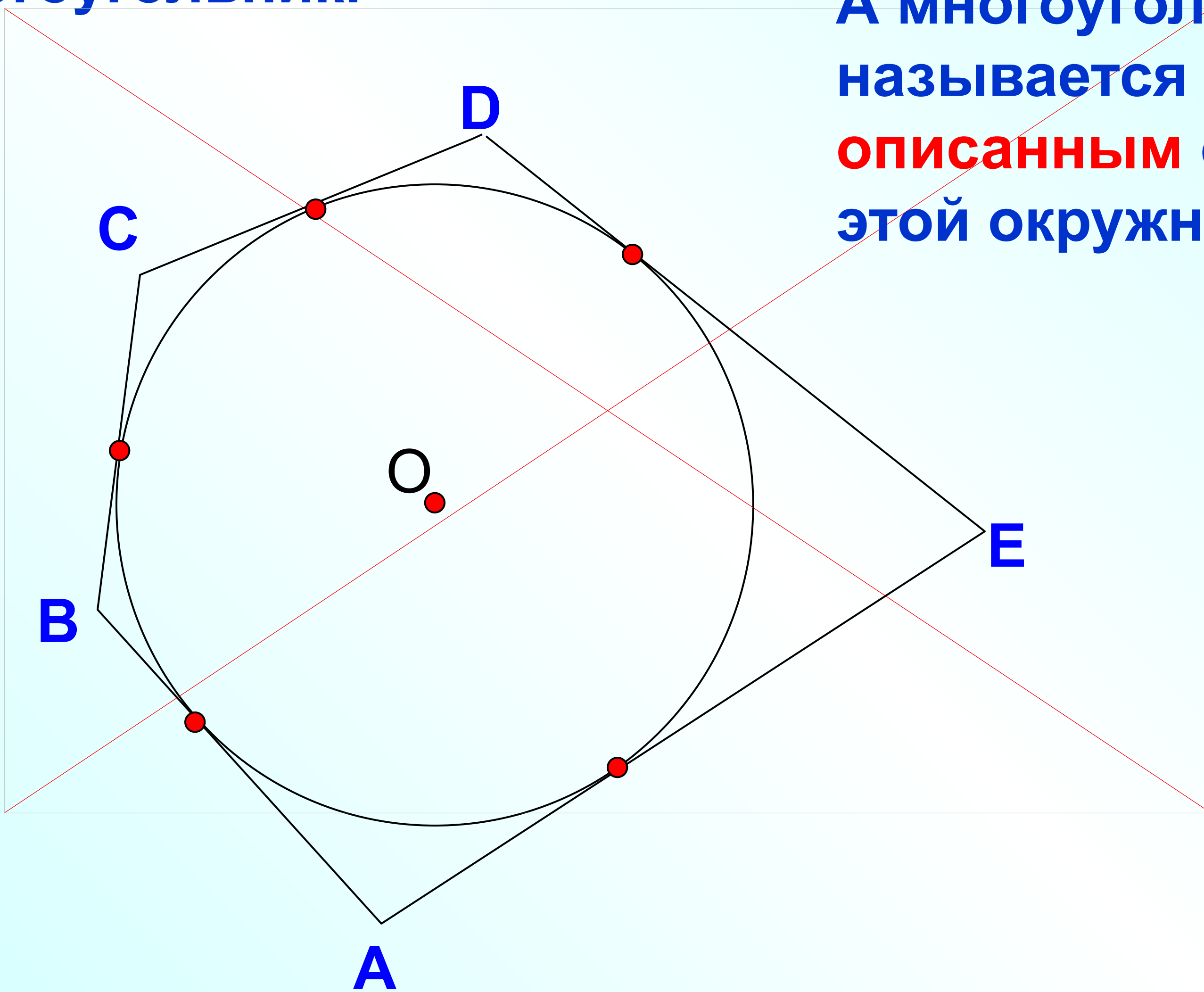


Дано: ΔBQR;
QM, BT – медианы;
$QM \perp BT$;
$QM = 9$,
$BT = 12$.

Найти: S_{BOQ} - ?

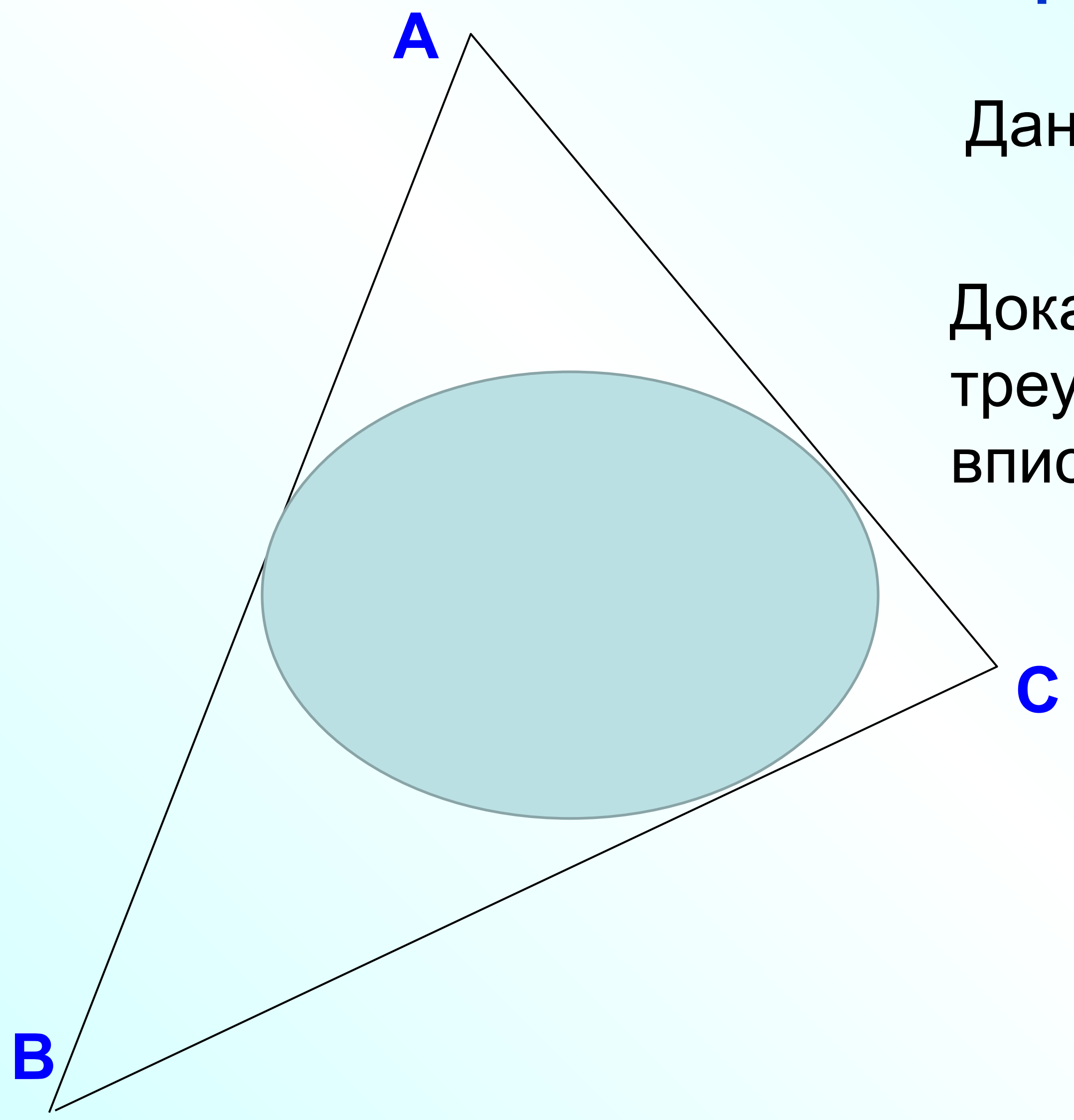
Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник.

А многоугольник называется **описанным** около этой окружности.



Теорема

В любой треугольник можно вписать окружность.

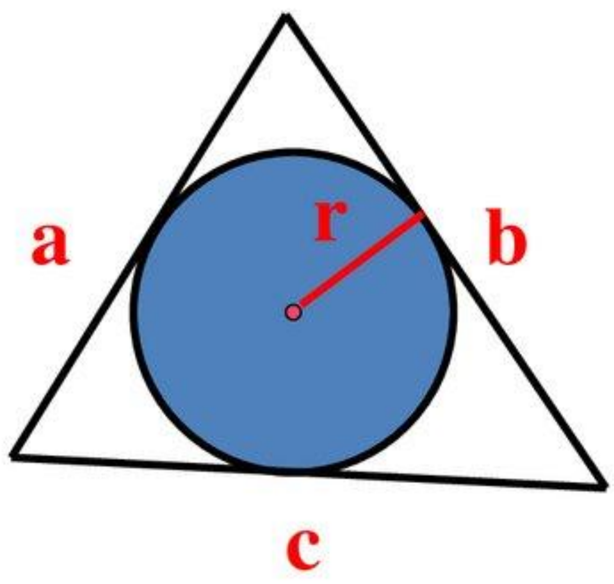


Дано: ΔABC

Доказать, что в треугольник можно вписать окружность

Площадь треугольника

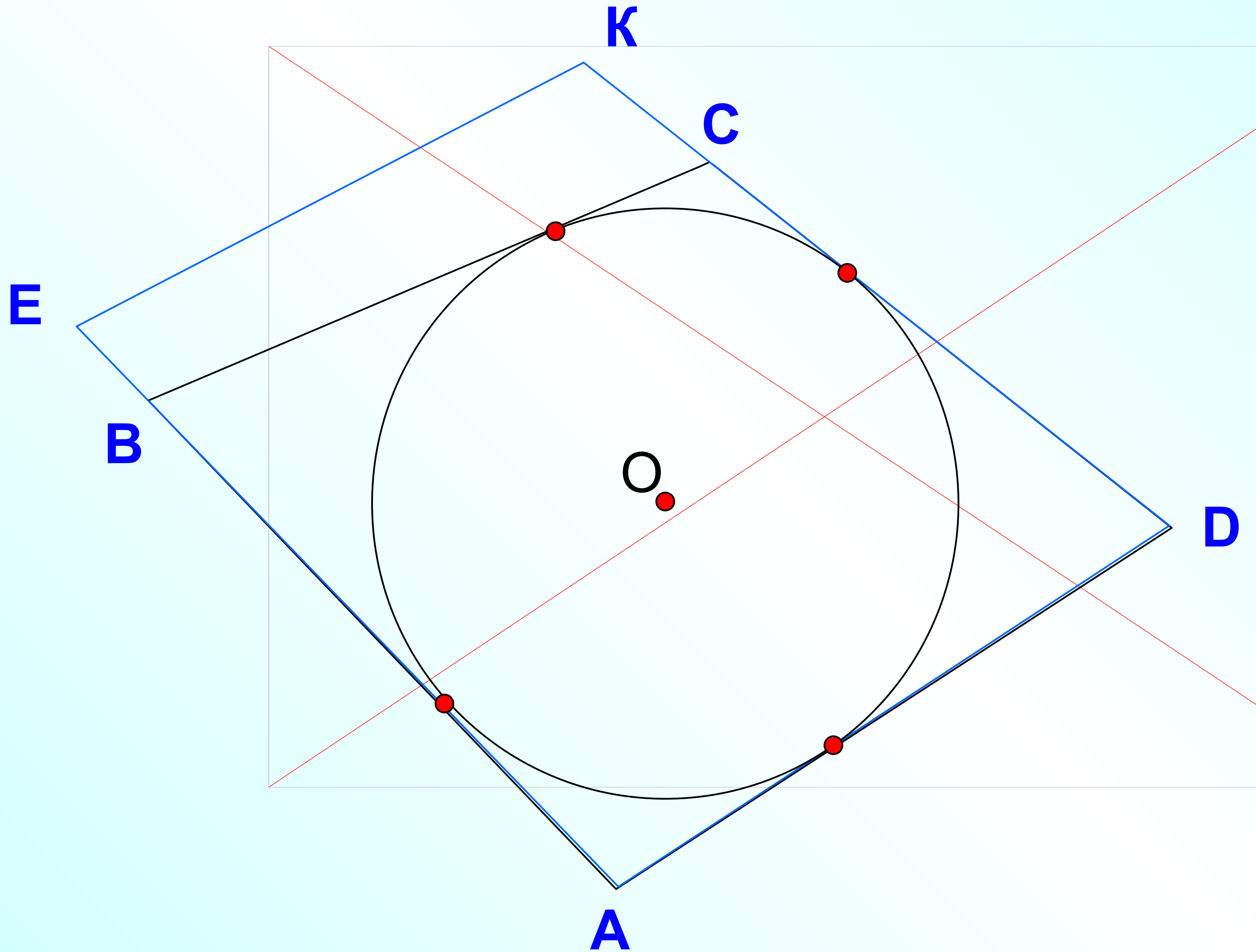
через полупериметр и радиус вписанной окружности



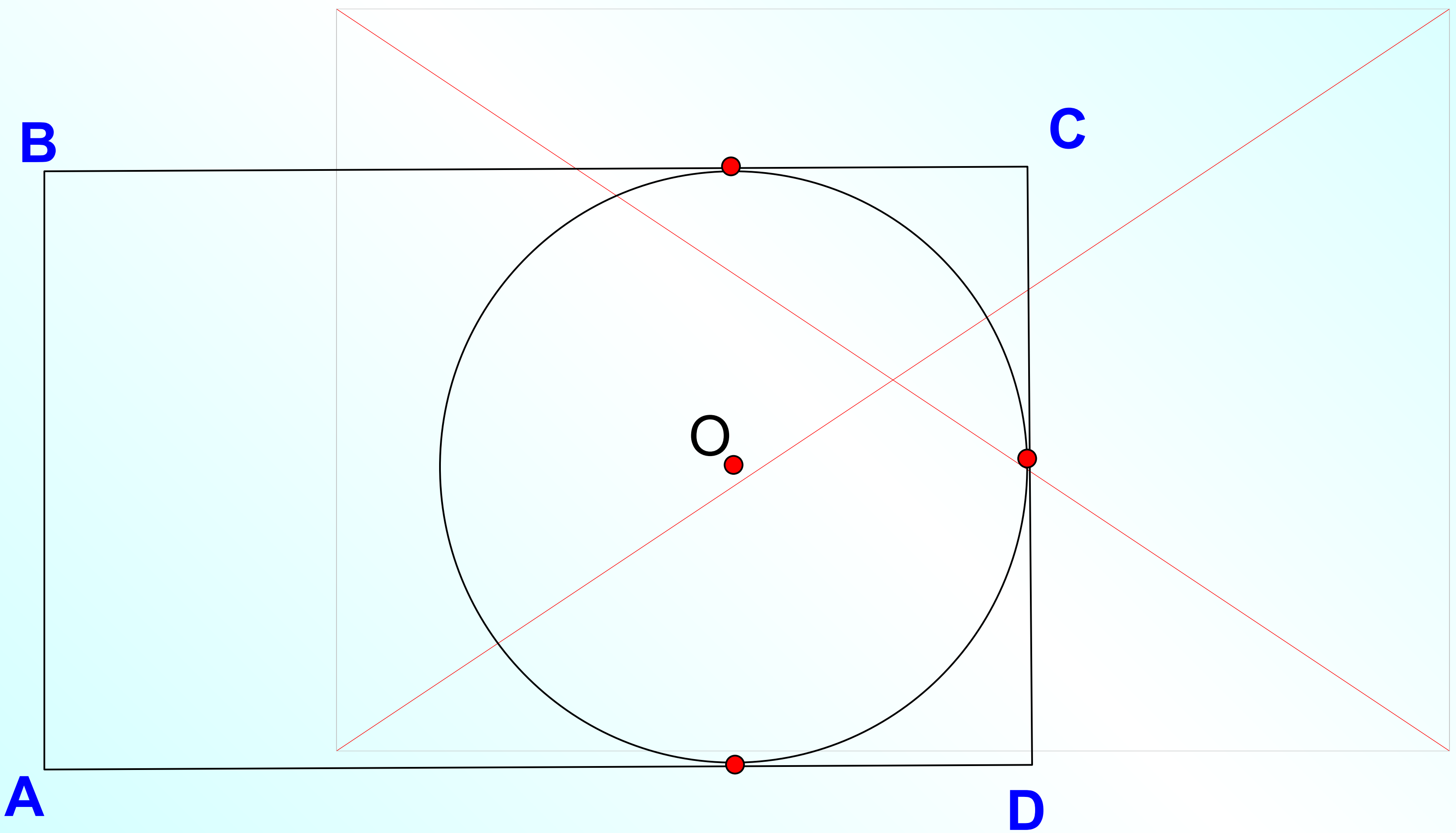
$$S = pr,$$

где $$p = \frac{a+b+c}{2}$$

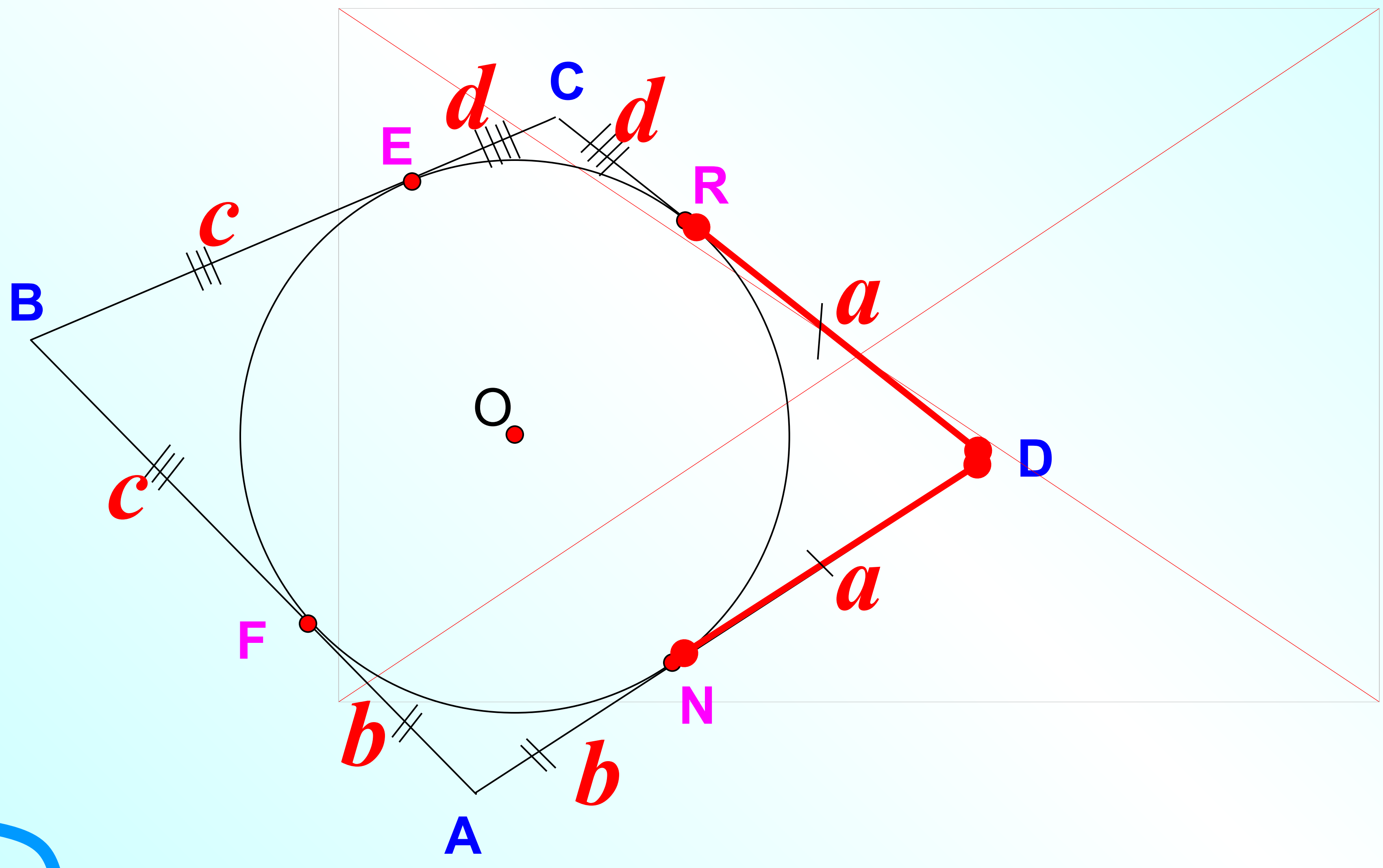
Какой из двух четырехугольников ABCD или AEКD является описанным?



В прямоугольник нельзя вписать окружность.

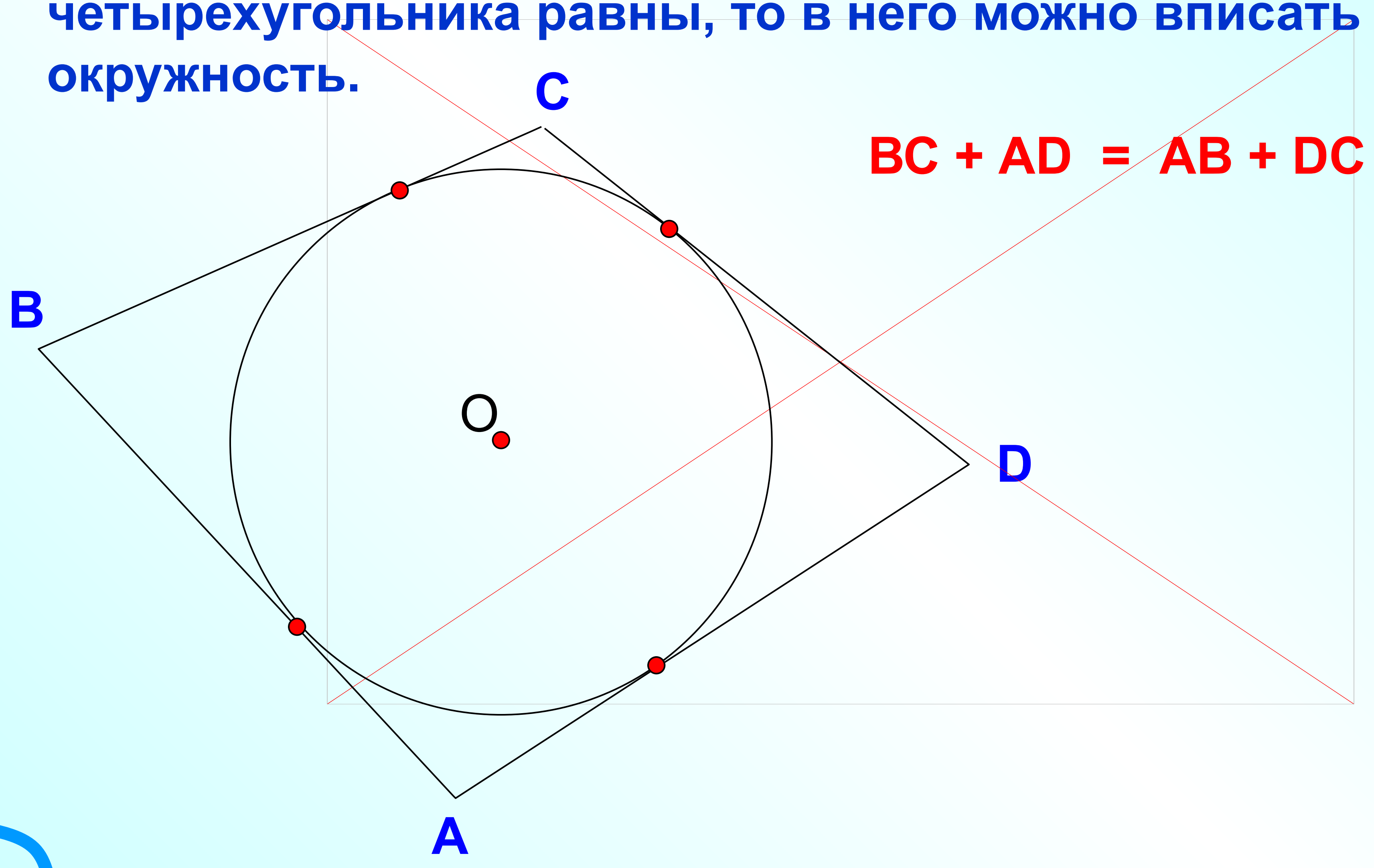


В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.



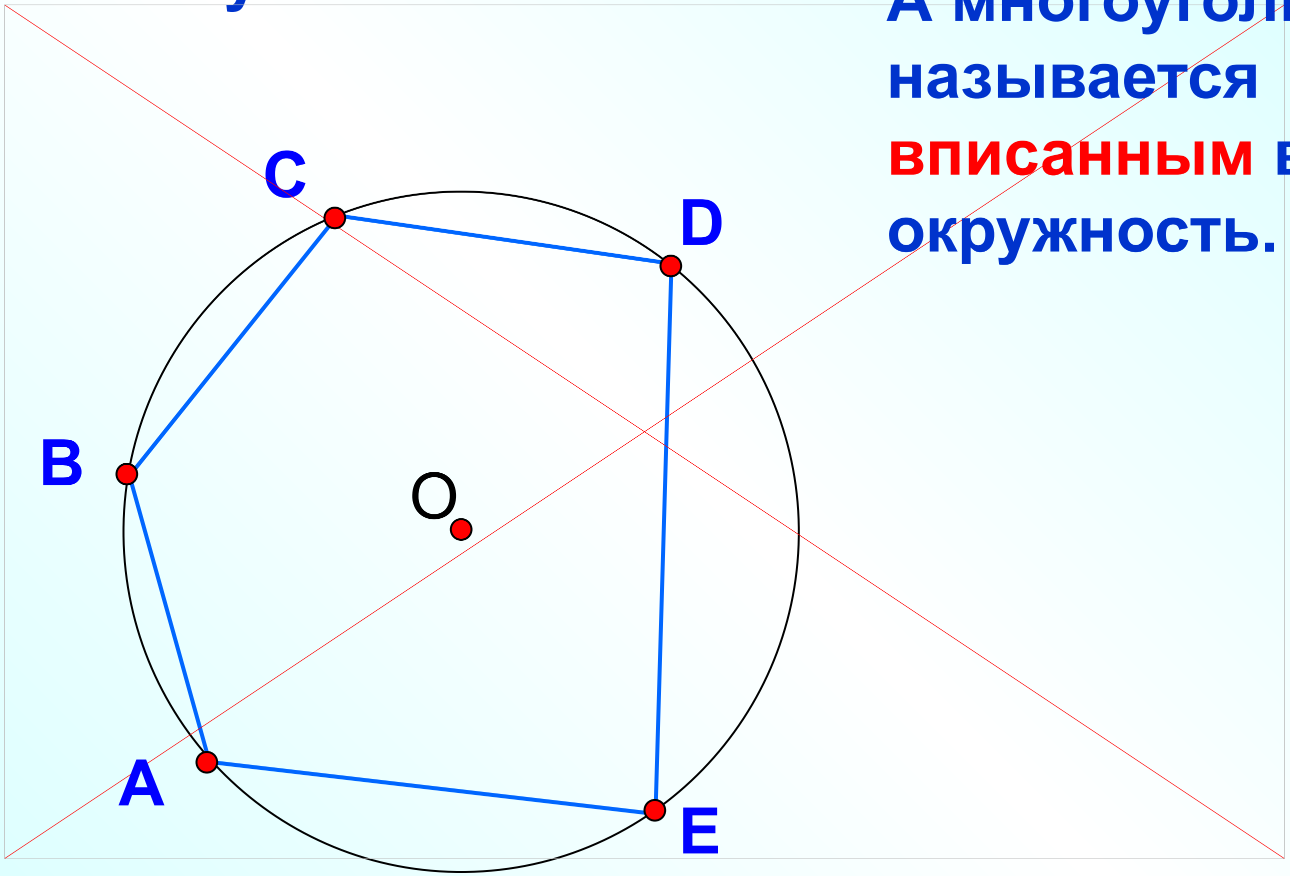
Верно и обратное утверждение.

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.



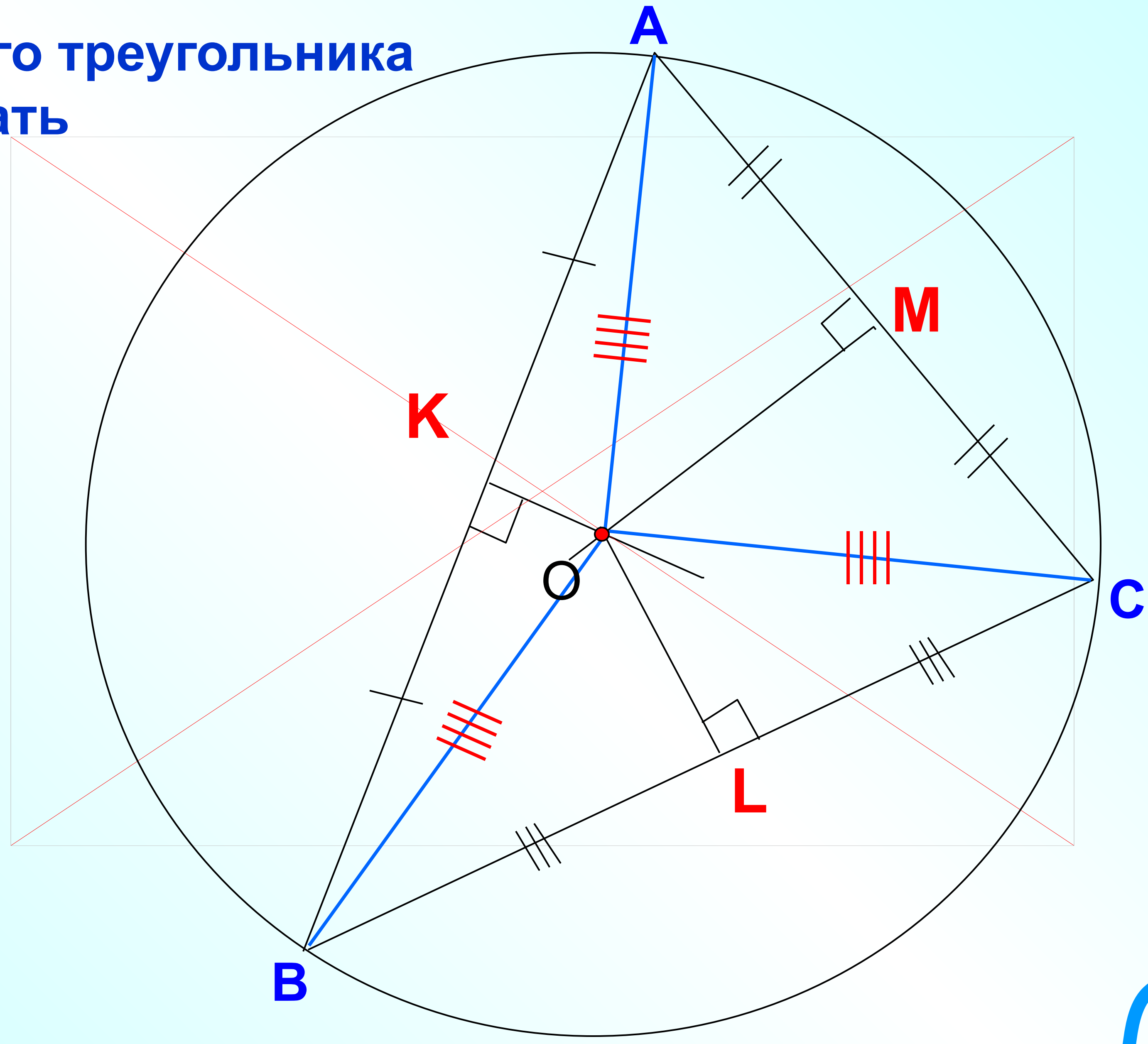
Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника.

А многоугольник называется вписанным в эту окружность.

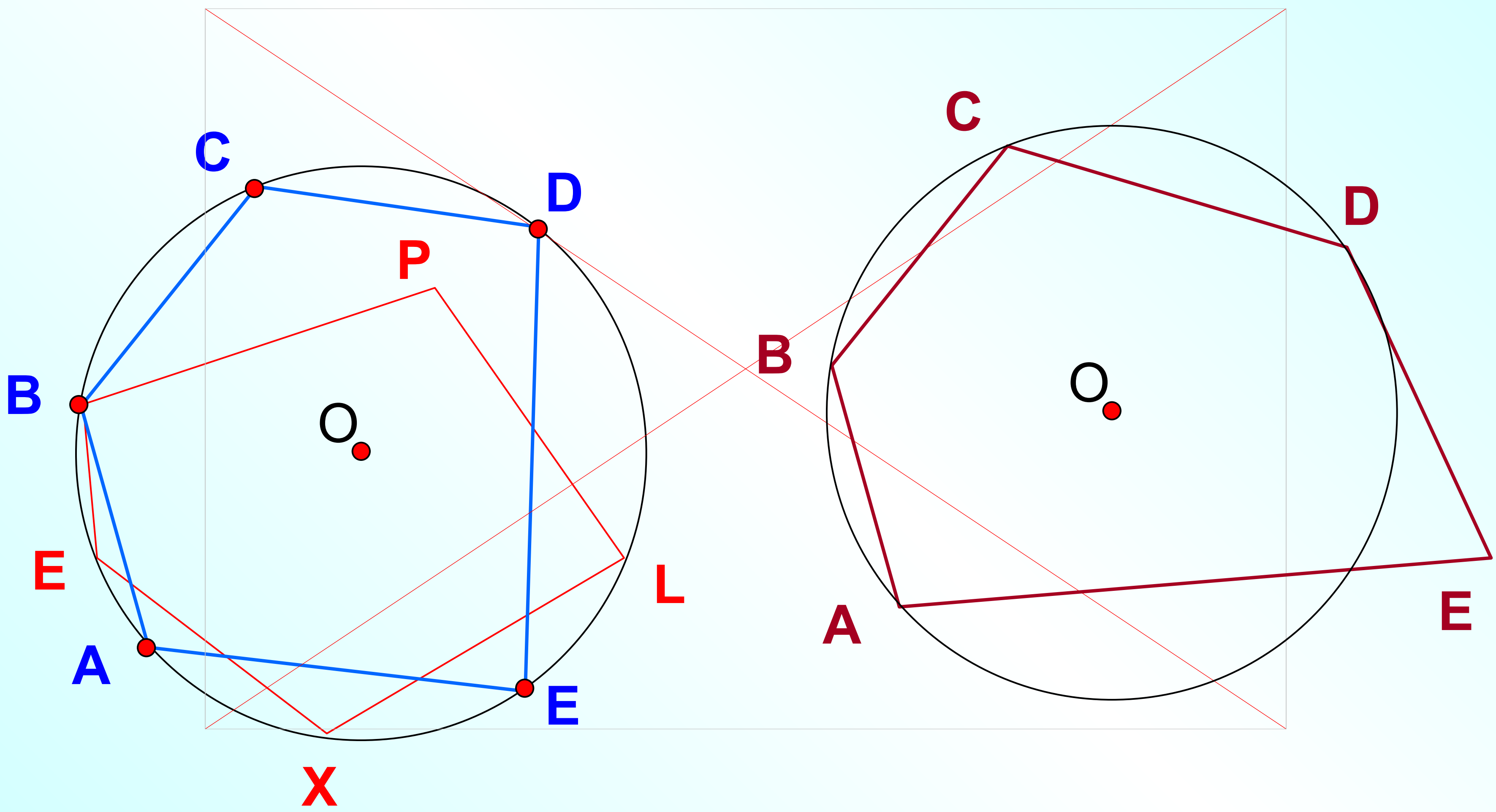


Теорема

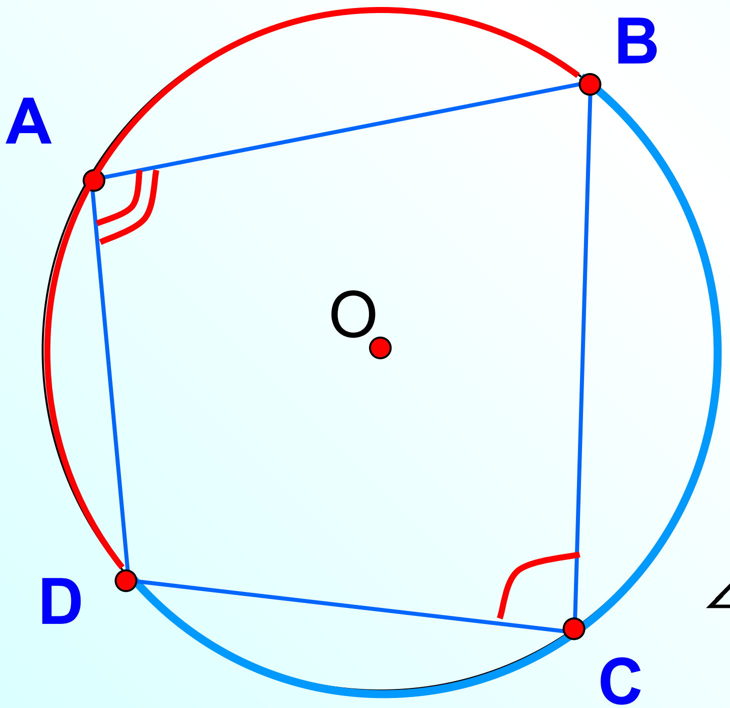
Около любого треугольника можно описать окружность.



Какой из многоугольников, изображенных на рисунке является вписанным в окружность?



В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180^0.



$$\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$$

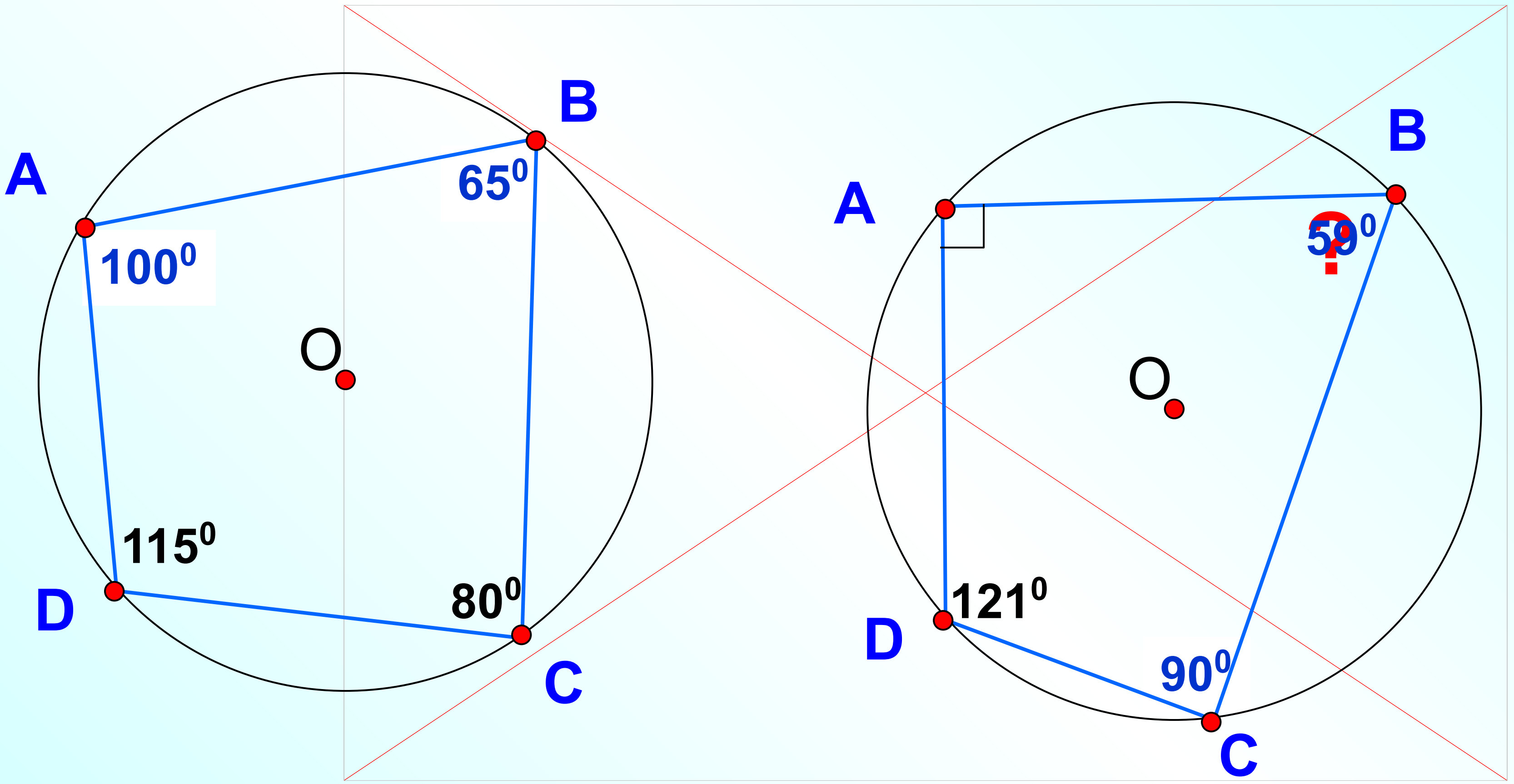
$$+$$

$$\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\underbrace{\cup BCD + \cup BAD}_{360^0})$$

$$\angle A + \angle C = 180^0$$

Найти неизвестные углы четырехугольников.



Верно и обратное утверждение.

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180^0, то около него можно вписать окружность.