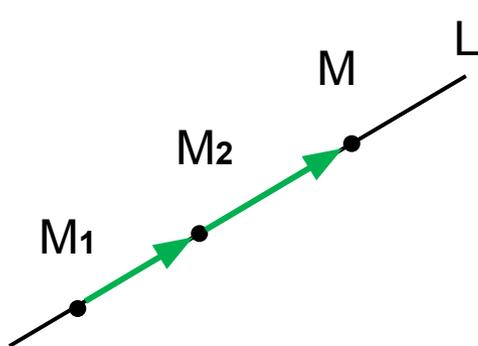


Аналитическая геометрия

Прямая на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через две точки

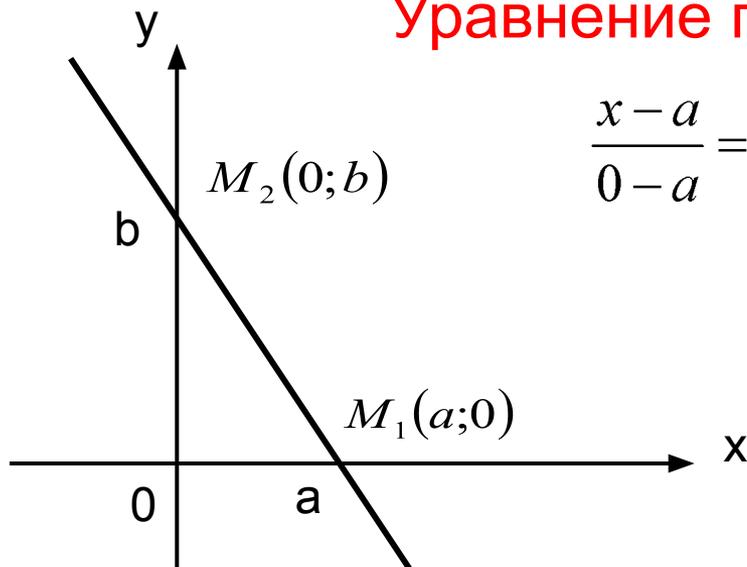


$M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ - точки на плоскости.
Проведем через них прямую L .
Возьмём на прямой точку $M(x, y)$.

$\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ - коллинеарные \Rightarrow

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

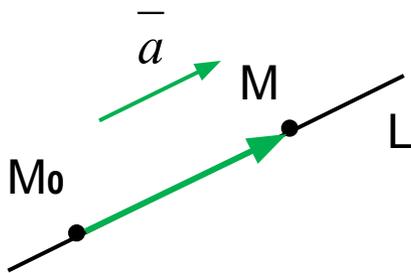
Уравнение прямой в отрезках



$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow (x - a)b = y(-a) \Rightarrow bx + ay = ab \Rightarrow$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Каноническое уравнение прямой



Прямая L однозначно может быть задана точкой $M(x_0, y_0)$ и вектором $\vec{a} = \{m; n\}$,

Возьмём на прямой точку $M(x, y)$.

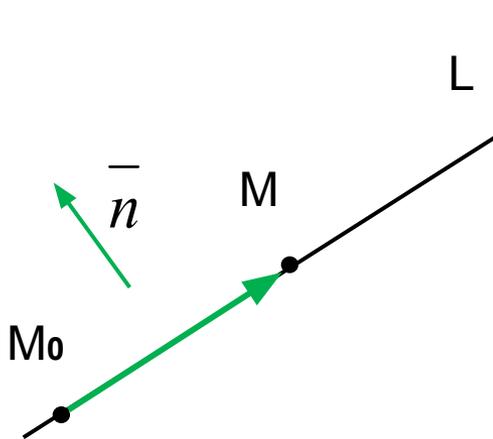
$\overline{M_0M}$, \vec{a} – коллинеарные \Rightarrow

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Параметрические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$$

Уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали



Задана точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор нормали $\vec{n} = \{A; B\}$.
 $M(x, y)$ – произвольная точка на прямой L .

$$\overline{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0 \Rightarrow$$

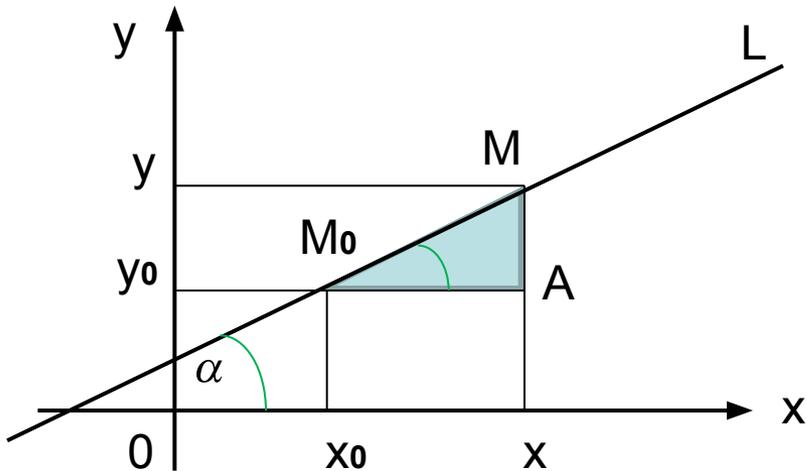
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Общее уравнение прямой

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} Ax - Ax_0 + By - By_0 &= 0, \\ Ax + By + (-Ax_0 - By_0) &= 0, \end{aligned}$$

$$Ax + By + C = 0.$$

Уравнение прямой, заданной точкой и угловым коэффициентом



Задана точка $M_0(x_0, y_0)$ и угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$.
 $M(x, y)$ – произвольная точка на прямой L.

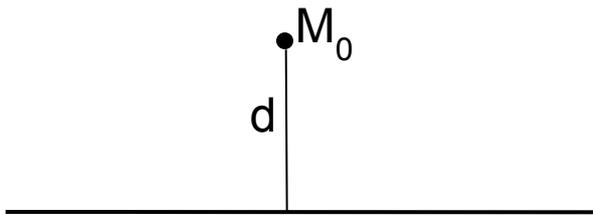
$$\text{Из } \Delta M_0MA \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0).$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \Rightarrow \begin{aligned} y - y_0 &= kx - kx_0, \\ y &= kx + (y_0 - kx_0), \end{aligned} \Rightarrow \boxed{y = kx + b}$$

Расстояние от точки до прямой



Задана точка $M_0(x_0, y_0)$ и

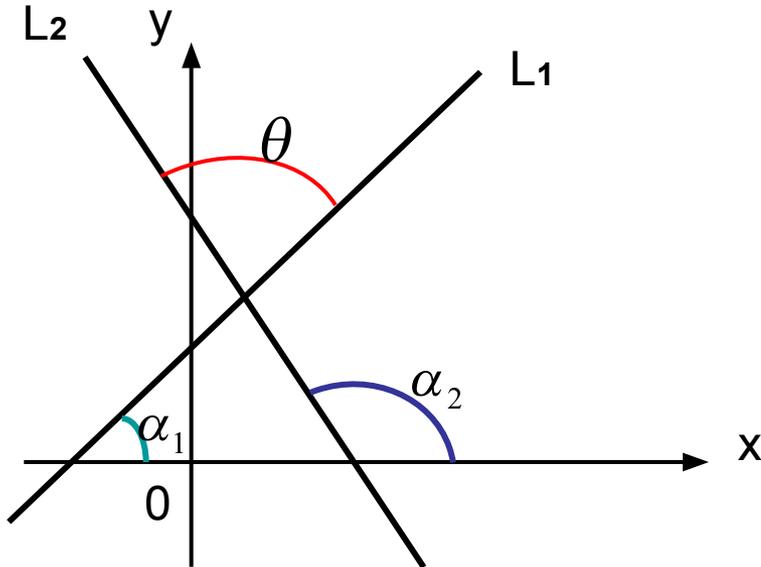
прямая $Ax + By + C = 0$.

Расстояние от точки до прямой

вычисляется по формуле:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Взаимное расположение прямых



L_1 и L_2 – пересекающиеся прямые
Найдем угол между этими прямыми

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta, \quad \theta = \alpha_2 - \alpha_1,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Если прямые **параллельны**, то $\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$

Если прямые **перпендикулярны**, то $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg} \theta = 0 \Rightarrow k_1 k_2 = -1$

Кривые второго порядка

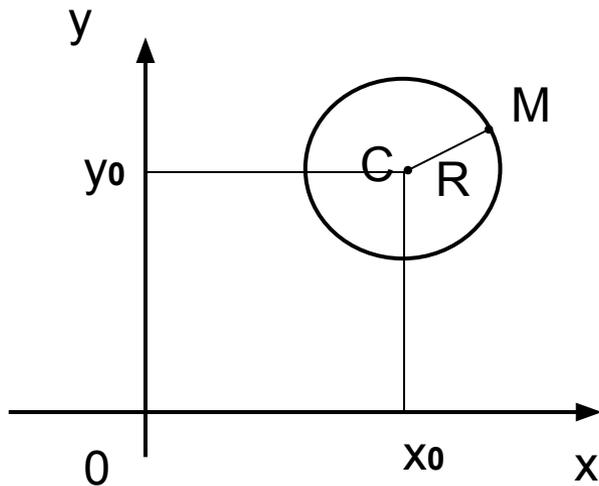
Окружность

Окружность – множество точек плоскости равноудаленных от данной точки плоскости, называемой центром окружности.

$C(x_0; y_0)$ – центр окружности,

R – радиус,

$M(x; y)$ – произвольная точка окружности.



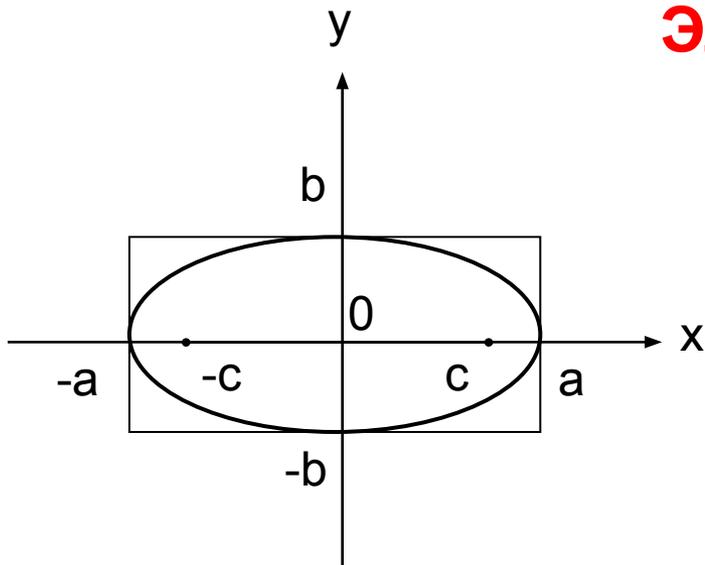
$$|CM| = R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Если центр окружности совпадает с началом координат, уравнение примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Эллипс



Каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O(0;0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

a , b – **полуоси** эллипса;

$M_1(a;0)$; $M_2(-a;0)$; $M_3(0;b)$; $M_4(0;-b)$ –
вершины эллипса;

$F_1(c;0)$; $F_2(-c;0)$ – фокусы;

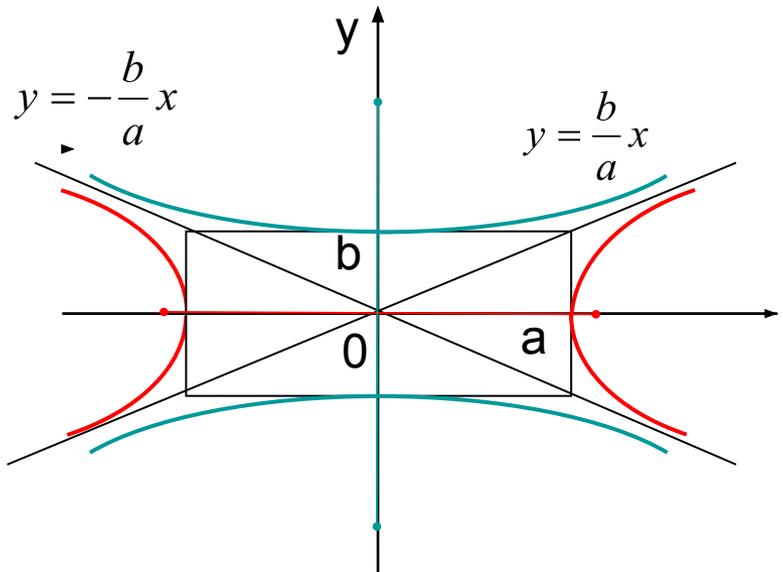
$\varepsilon = \frac{c}{\text{большая полуось}} < 1$ – эксцентриситет;

$$(\text{большая полуось})^2 = (\text{меньшая полуось})^2 + c^2.$$

Если центр эллипса находится в точке $O'(x_0; y_0)$, то уравнение имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола



Каноническое уравнение гиперболаы с центром симметрии в точке $O(0;0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Уравнение сопряженной гиперболаы:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

a – действительная полуось; b

b – мнимая полуось; a

точки пересечения с осями $M_1; M_2$ – вершины гиперболаы;

$F_1(c;0); F_2(-c;0)$ – фокусы; $c^2 = a^2 + b^2$.

$y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболаы;

$\varepsilon = \frac{c}{\text{действительная полуось}} > 1$ – эксцентриситет;

Если центр симметрии – $O'(x_0; y_0)$,

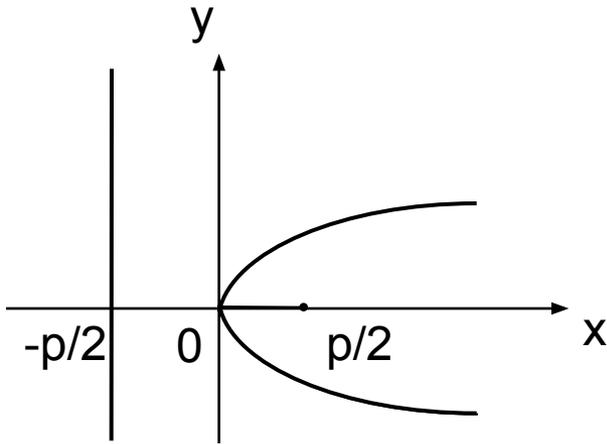
то уравнение гиперболаы имеет вид:

$$\pm \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \mp \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Уравнения асимптот: $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$.

Парабола

Множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от заданной точки, называемой фокусом и прямой, называемой директрисой.



p – параметр;

$O(0;0)$ – вершина;

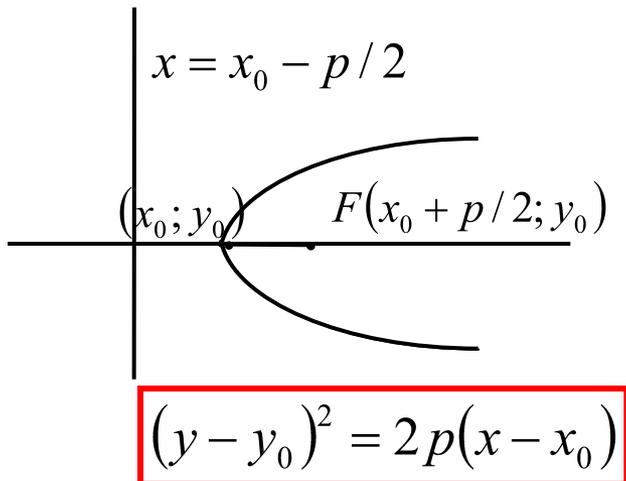
$F(p/2;0)$ – фокус;

$y = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы.

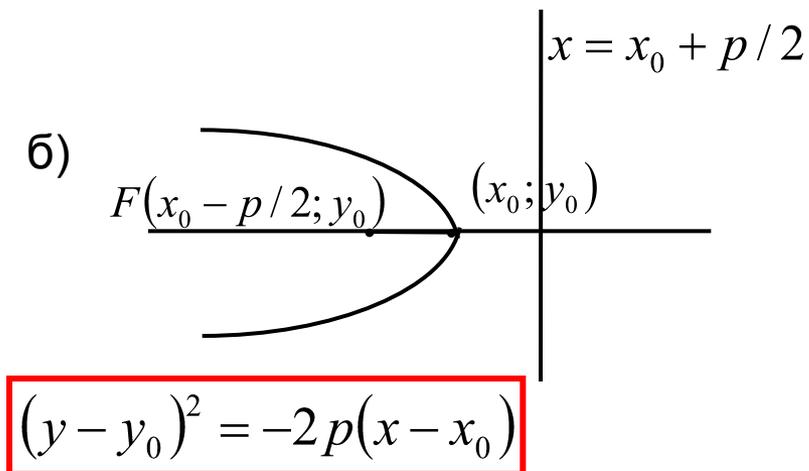
Уравнение параболы: $y^2 = 2px$

Канонические уравнение параболы с вершиной в точке $O'(x_0; y_0)$

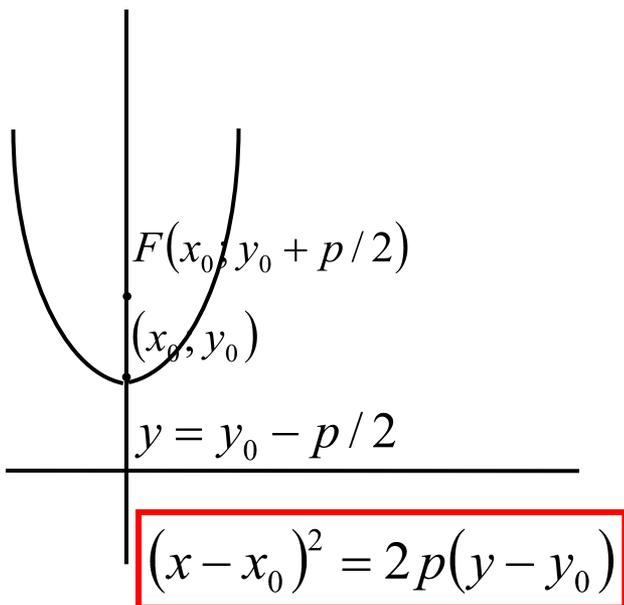
а)



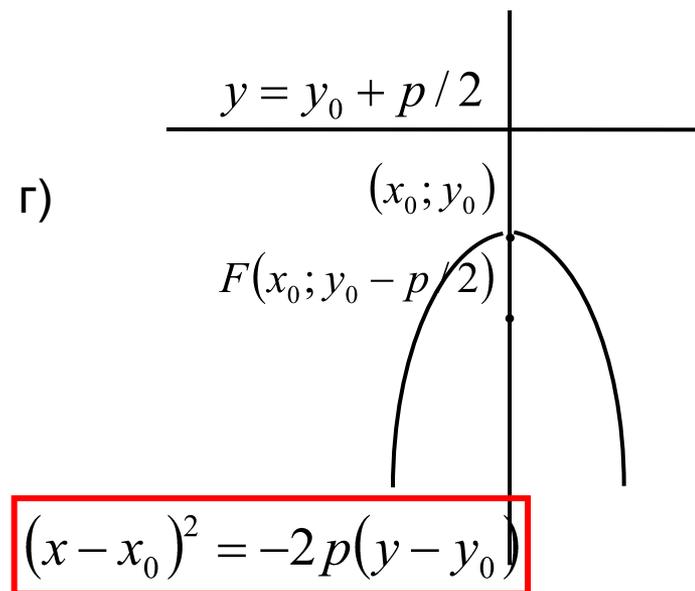
б)



в)



г)



Если уравнение кривой второго порядка записано в виде

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 ,$$

то при

$A=B$ кривая является окружностью;

$A \cdot B > 0$ кривая является эллипсом;

$A \cdot B < 0$ кривая является гиперболой;

$A=0$ и $B \neq 0$ кривая является параболой;

$A \neq 0$ и $B=0$ кривая является параболой.

Построить кривую

$$x^2 + y^2 + 16y - 17 = 0.$$

Построить кривую

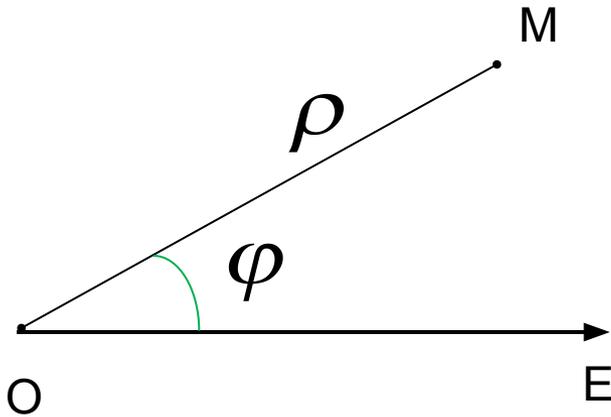
$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0.$$

Построить кривую $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

Построить кривую

$$y^2 - 2x - 2y + 5 = 0.$$

Полярная система координат



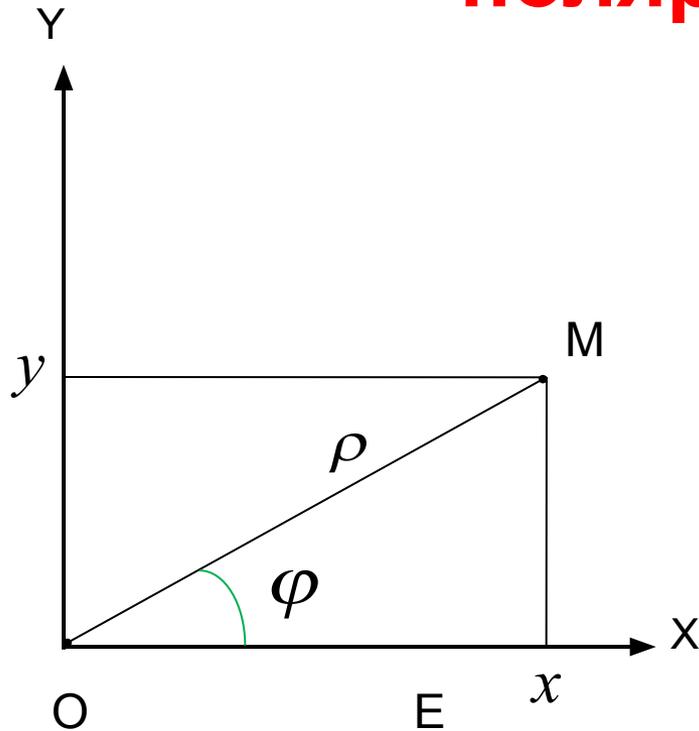
Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O , называемой **полюсом**, и исходящего из полюса луча OE , называемого **полярной осью**, а также масштабом измерения длины.

Полярными координатами точки M плоскости называются (ρ, φ) , где

$$\rho = |OM|,$$

φ – угол поворота против часовой стрелки полярной оси до совмещения с OM .

Формулы связи декартовых и полярных координат



$$\begin{aligned}x &= \rho \cdot \cos \varphi, \\y &= \rho \cdot \sin \varphi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho^2 &= x^2 + y^2, \\ \frac{y}{x} &= \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi.\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}.\end{aligned}$$

Задача. Кривая задана уравнением $\rho = 2 \cdot \cos \varphi$ в полярной системе координат. Построить кривую в декартовой системе координат.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$x = \rho \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{x}{\rho};$$

$$\rho = 2 \cdot \cos \varphi \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0;$$

$A = B = 1 \Rightarrow$ имеем уравнение окружности, приведем уравнение к каноническому виду и выполним построение.

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

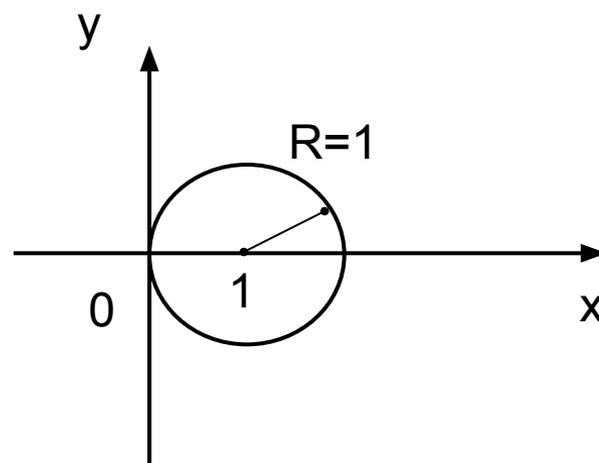
$$(x^2 - 2x) + y^2 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1$$

$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$$

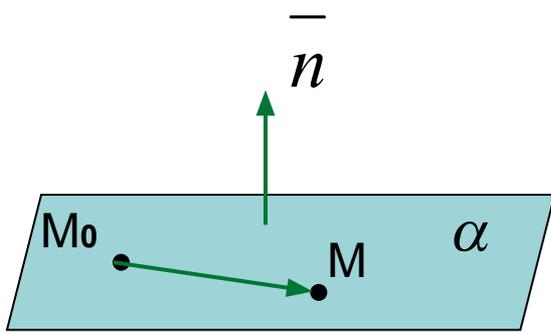
центр окружности (1;0)

$$R = 1$$



Плоскость

Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали



Задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор нормали $\vec{n} = \{A; B; C\}$,
 $M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости.

$$\vec{n} \perp \overline{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Общее уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 &= 0, \\ Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) &= 0, \end{aligned}$$

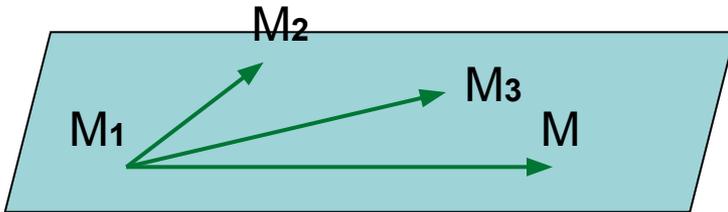
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Уравнение плоскости в «отрезках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Здесь a , b , c – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

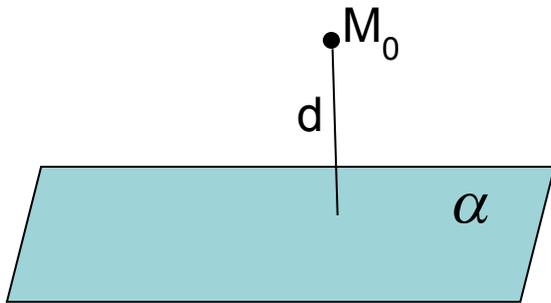


Пусть в пространстве заданы три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.
 $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости $M_1M_2M_3$.

Построим векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$,
 $\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$ (из условия компланарности)

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние от точки до плоскости



Задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и

плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.

Расстояние от точки до плоскости

вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Взаимное расположение плоскостей



Плоскости α_1 и α_2 заданы уравнениями :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad \vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

Угол между плоскостями

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности

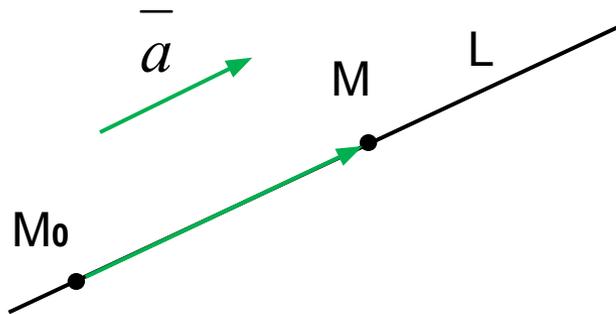
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

Условие параллельности

$$\vec{n}_1, \vec{n}_2 - \text{коллинеарные} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Прямая в пространстве

Канонические уравнения прямой



Прямая L однозначно может быть задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\vec{a} = \{m; n; p\}$, Возьмём на прямой точку $M(x, y, z)$.

$\overline{M_0M}$, \vec{a} – коллинеарные \Rightarrow

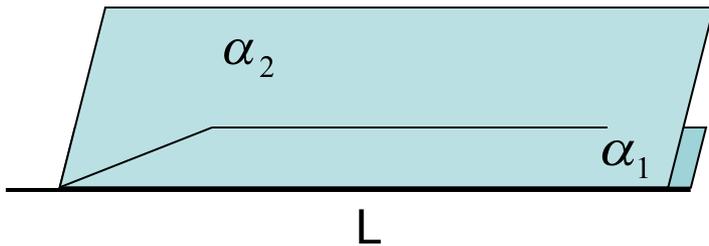
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Параметрические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Общие уравнения прямой

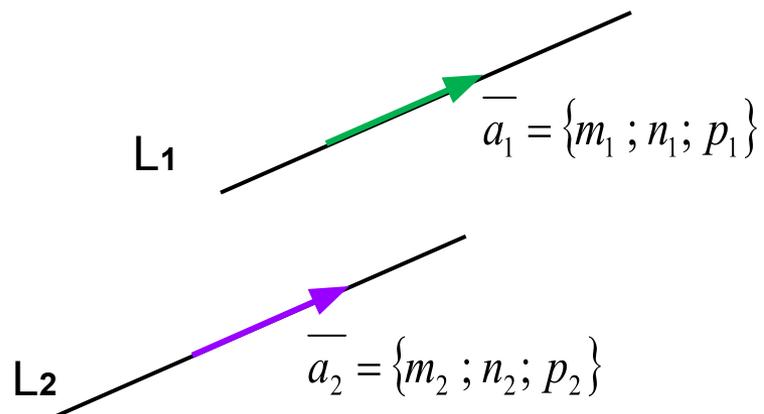
Прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей:



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

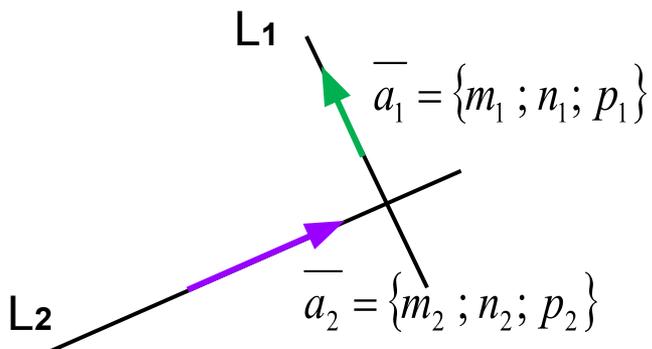
Условие параллельности двух прямых



$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$
$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

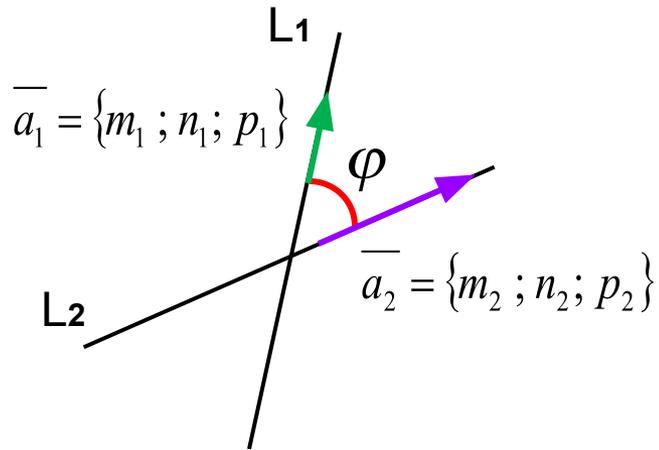
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых



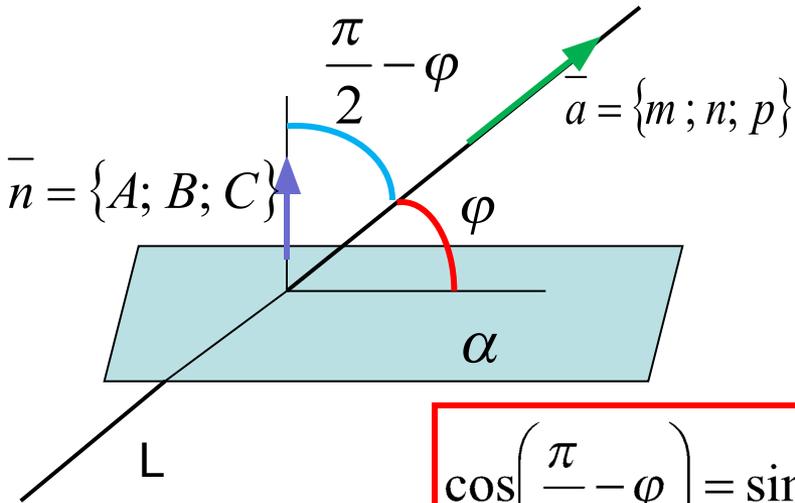
$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0.$$

Угол между двумя прямыми



$$\cos \varphi = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Взаимное расположение прямой и плоскости



Острый угол между прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

определяется из соотношения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = \frac{|A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

$$A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Примеры решения задач