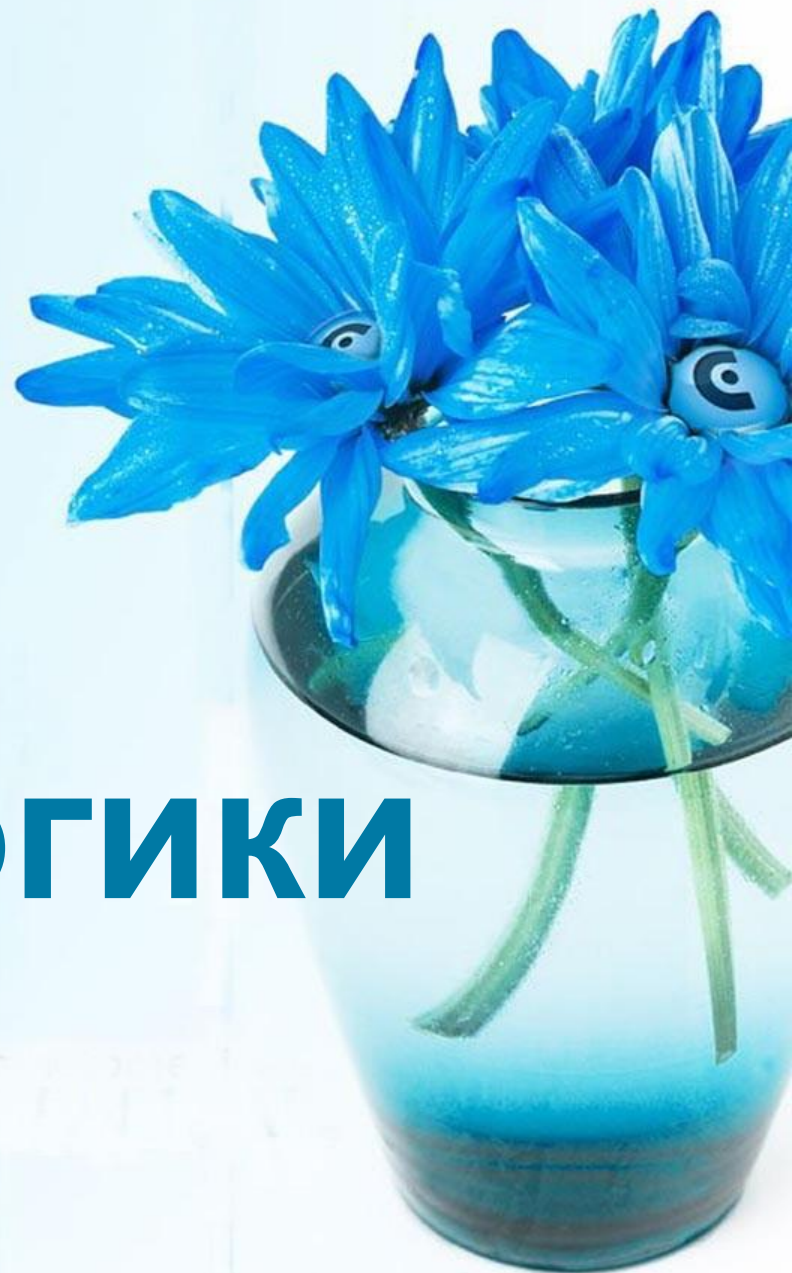


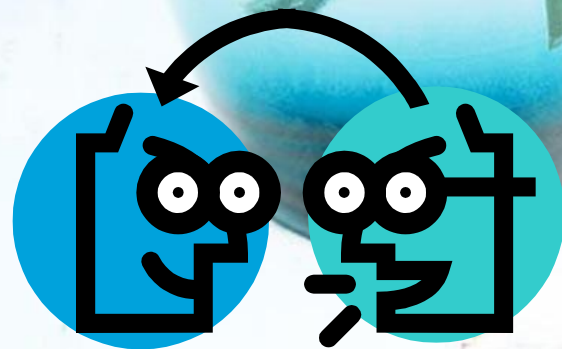
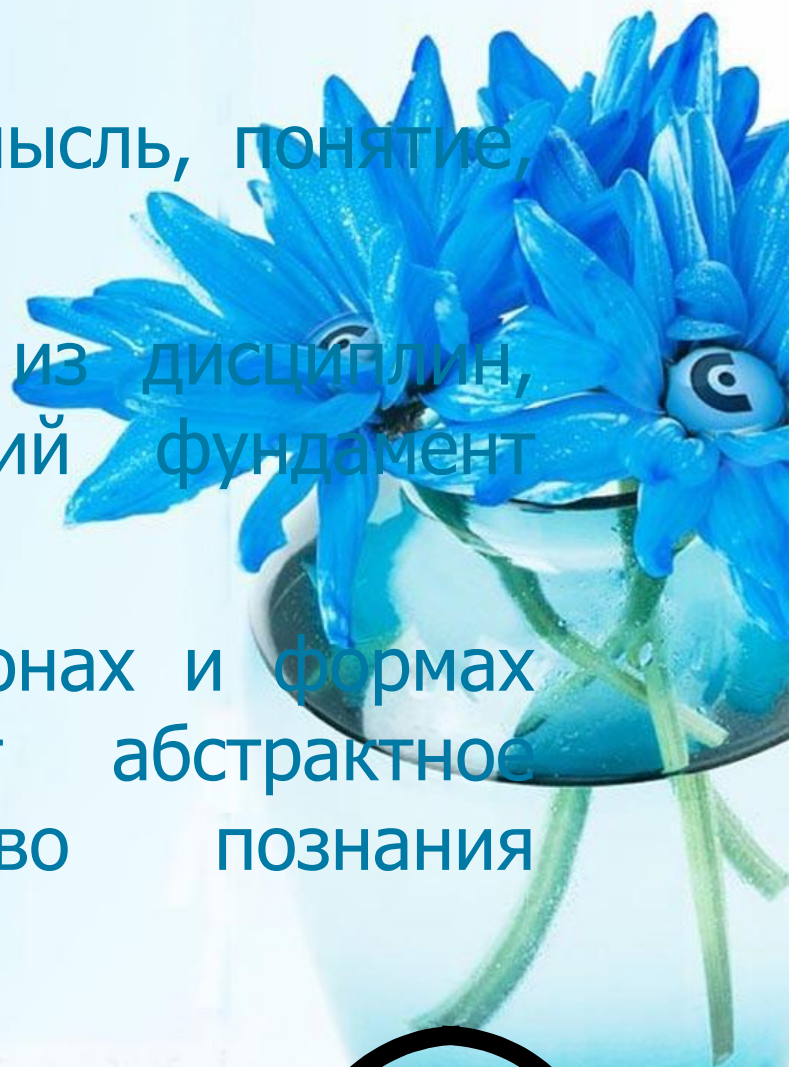
ОСНОВЫ ЛОГИКИ



Логика (logos) – «слово, мысль, понятие, рассуждение, закон».

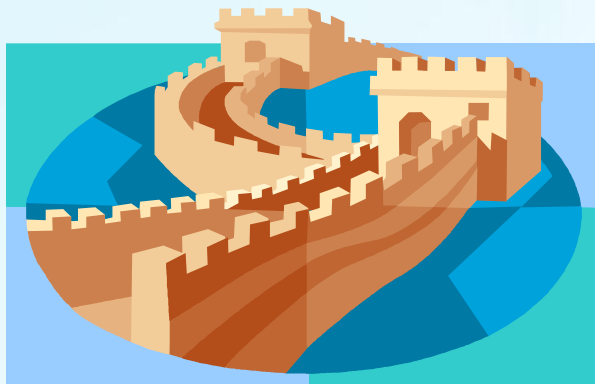
Логика является одной из дисциплин, образующих математический фундамент информатики.

Логика – это наука о законах и формах мышления. Она изучает абстрактное мышление как средство познания объективного мира.



Этапы развития логики

Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах Дальнего Востока (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения, созданные древнегреческими мыслителями. Основы формальной логики заложил Аристотель (384–322 гг. до н.э.), который впервые отделил логические формы речи от ее содержания.



A V B

В XVII веке немецкий ученый и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716) попытался построить первые логические исчисления, усовершенствовал и уточнил логические символы.

A & B

На фундаменте, заложенном Лейбницем, другой великий математик, англичанин Джордж Буль (1815-1864) воздвиг здание новой области науки – математической логики.

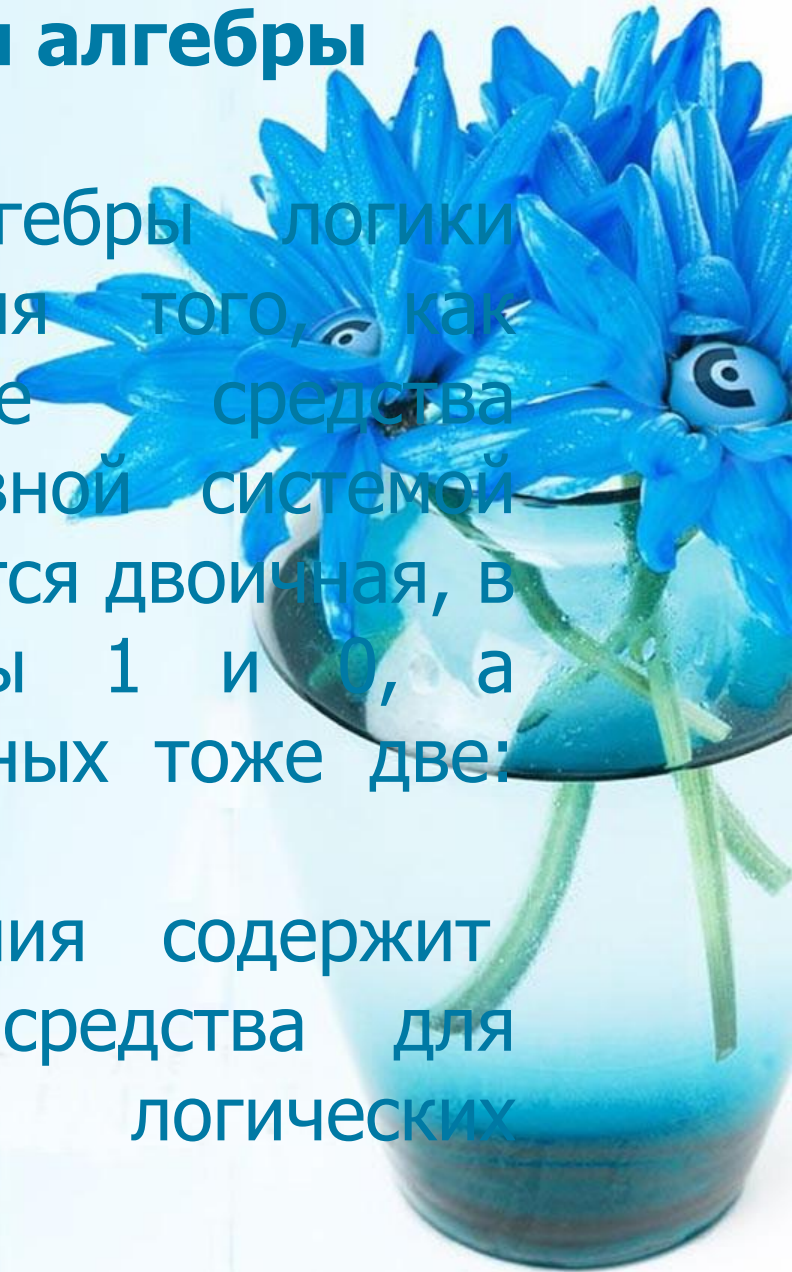
Начальный раздел математической логики называют алгеброй логики или Булевой алгеброй.



Примеры использования алгебры логики

Математический аппарат алгебры логики очень удобен для описания того, как функционируют аппаратные средства компьютера, поскольку основной системой счисления в компьютере является двоичная, в которой используются цифры 1 и 0, а значений логических переменных тоже две: "1" и "0".

Любой язык программирования содержит логические переменные и средства для описания и вычисления логических выражений.



Основные понятия логики:

Утверждение – высказывание, которое требуется доказать или опровергнуть.

Например: «Сумма внутренних углов треугольника равна 180^0 »

Умозаключение – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных высказываний получается (выводится) новое высказывание.

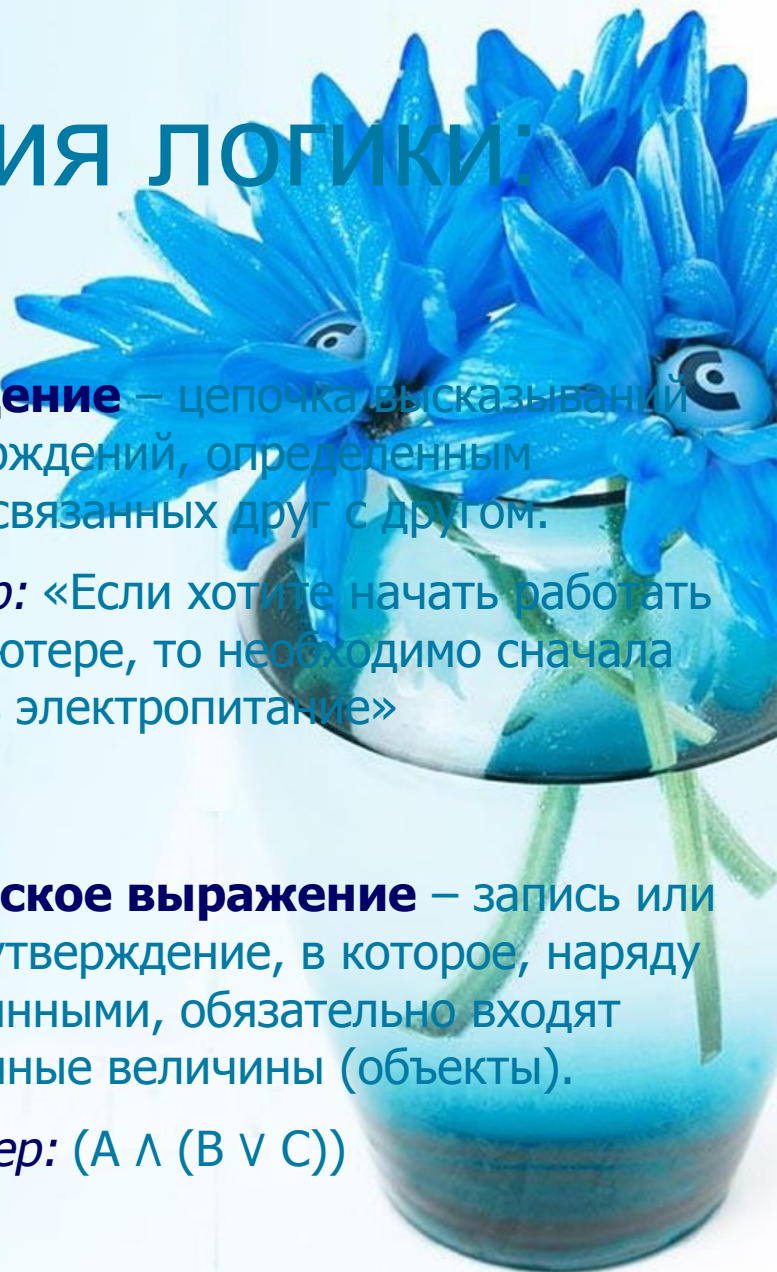
Например: «Все металлы электропроводны». «Ртуть является металлом». Путем умозаключения можно сделать вывод, что «Ртуть электропроводна».

Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом.

Например: «Если хотите начать работать на компьютере, то необходимо сначала включить электропитание»

Логическое выражение – запись или устное утверждение, в которое, наряду с постоянными, обязательно входят переменные величины (объекты).

Например: $(A \wedge (B \vee C))$



Алгебра логики

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности и ложности) и логических операций над ними.

Высказывание – это повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Простым высказыванием называют повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл говорить, **ИСТИННО** оно или **ЛОЖНО**.

Высказывание называется **составным**, если оно состоит из простых высказываний, соединенных логическими связками: И, ИЛИ, частицей НЕ

Высказываниями не являются:

- 1) восклицательные
вопросительные предложения.
- 2) определения.
- 3) предложения типа: «он сероглаз»; « $x^2 - 4x + 3 = 0$ ».



Примеры:

1. Москва – столица России
2. Студент математического факультета педагогического университета
3. Треугольник ABC подобен треугольнику A'B'C'
4. Луна есть спутник Марса
5. Кислород – газ
6. Каша – вкусное блюдо
7. Математика – интересный предмет
8. Железо тяжелее свинца
9. Сегодня плохая погода
10. Река Ангара впадает в озеро Байкал



Какие из этих предложений являются высказываниями?

Ответ: 1, 4, 5, 8, 10

Пример обозначения логических высказываний:

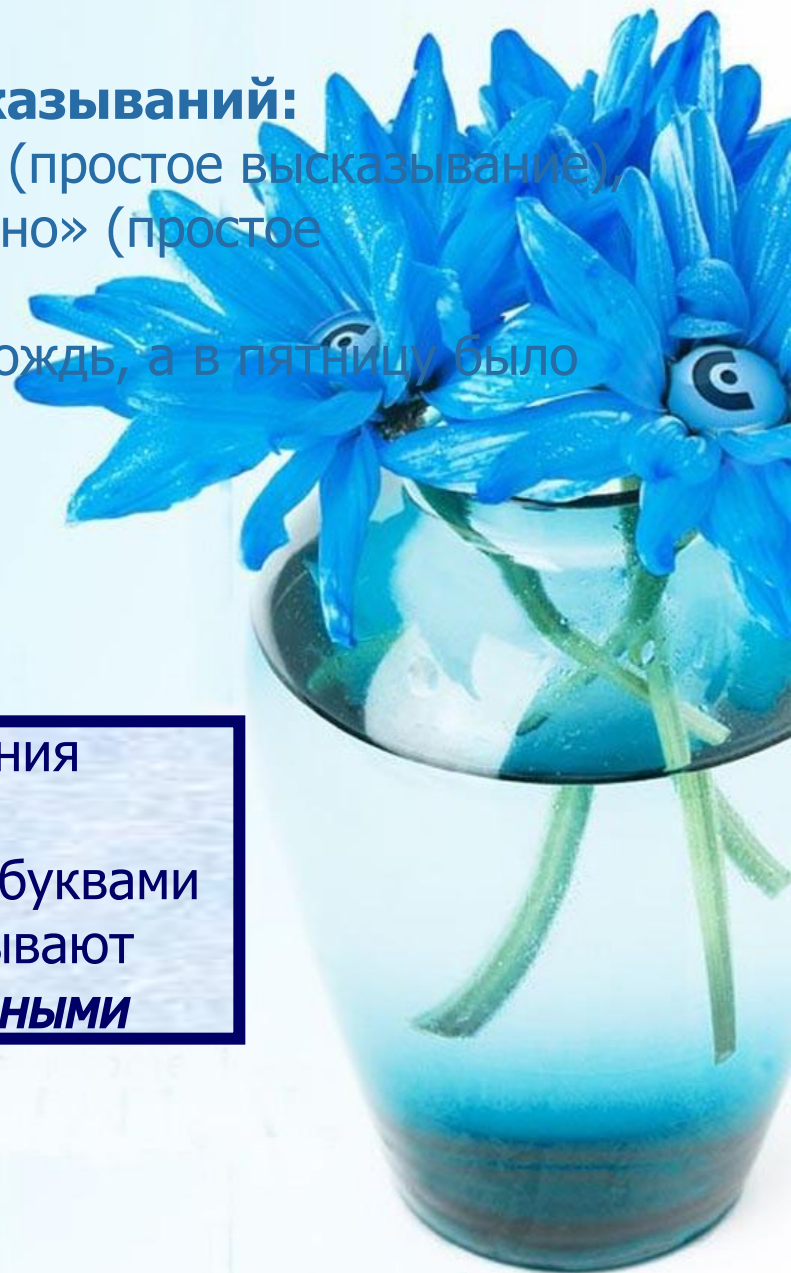
A – высказывание «В четверг был дождь» (простое высказывание),

B – высказывание «В пятницу было солнечно» (простое высказывание)

Составное высказывание «В четверг был дождь, а в пятницу было солнечно», можно записать в виде:

A и B или (союз И - логическая связка)

Простые высказывания
обозначают
заглавными латинскими буквами
A, B, C...X, Y, Z и называют
логическими переменными



Примеры:

Рассмотрим следующие высказывания:

- | | |
|---|-------------------------|
| 1. $A = (7 > 3)$ | $A = \text{ИСТИНА} = 1$ |
| 2. $B = (7 = 3)$ | $B = \text{ЛОЖЬ} = 0$ |
| 3. $C = (7 \neq 3)$ | $C = \text{ИСТИНА} = 1$ |
| 4. $D = (B \wedge C) = ((7 = 3) \wedge (7 \neq 3))$ | $D = \text{ЛОЖЬ} = 0$ |
| 5. $E = \text{Москва} - \text{столица Японии}$ | $E = \text{ЛОЖЬ} = 0$ |

Значения высказываний
ИСТИНА или ЛОЖЬ обозначают
соответственно цифрами 1 и 0
и называют **ЛОГИЧЕСКИМИ ВЕЛИЧИНАМИ**



Логические связи

Слова и словосочетания «не», «и», «или», «если...то», «тогда и только тогда» называют логическими связками и используются в составных высказываниях.

№	Логич. связка	Название	Обозначение	Высказывание	Математ.запись
1	и	конъюнкция логическое умножение	$\wedge$, & *, And	A и B	$A \wedge B$, A & B $A * B$, A And B
2	или	дизъюнкция логическое сложение	$\vee$ +, Or	A или B	$A \vee B$ $A + B$, A Or B
3	не	инверсия, логическое отрицание	$\neg$, Not	не A	$\neg A$, , Not A
4	Если...то	импликация, логическое следование	$\rightarrow$, $\Rightarrow$	Если A, то B	$A \rightarrow B$ $A \Rightarrow B$
5	Тогда и только тогда	эквивалентность, равносильность, логическое тождество	$\leftrightarrow$, $\equiv$ $\Leftrightarrow$, $\sim$	A тогда и только тогда, когда B	$A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$ $A \Leftrightarrow B$, $A \sim B$

Основные логические операции



Логическая операция **КОНЪЮНКЦИЯ**

(логическое умножение)

Составное высказывание $A \wedge B$, является истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказываний истинны.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Соответствует союзу **И**
Обозначается **&** или **$\wedge$**

Пусть есть два высказывания:

A = я сегодня пойду в школу

B = я сегодня пойду гулять

Высказывание:

A * B = я сегодня пойду в школу **и** я сегодня пойду гулять является **логическим умножением** этих двух высказываний

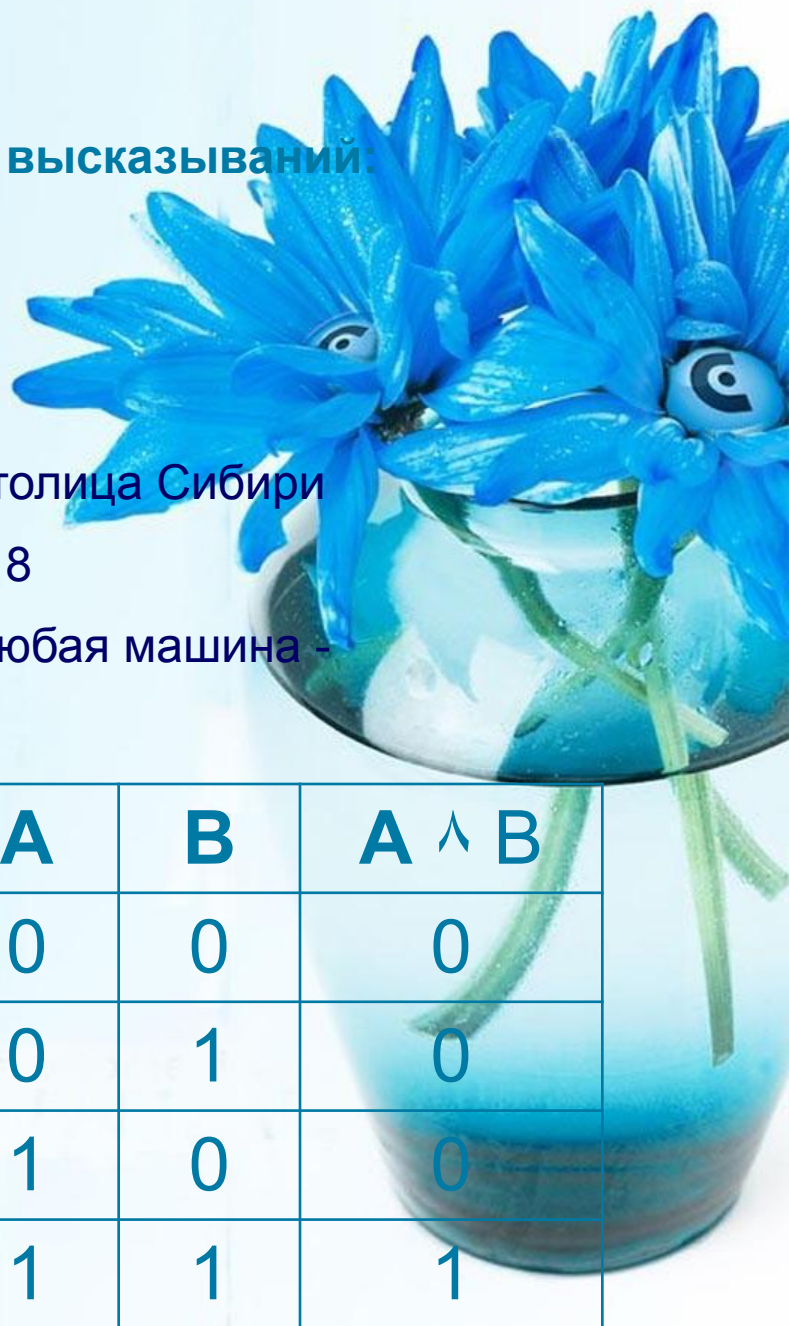


Примеры:

Определить значения истинности следующих высказываний:

1. Ленинград расположен на Неве **и** $2 + 3 = 5$
2. 7 – простое число **и** 9 – простое число
3. $2 * 2 = 4$ **и** $2 * 2 \leq 5$ **и** $2 * 2 \geq 4$
4. Москва – столица России **и** Екатеринбург – столица Сибири
5. Книга – источник информации **и** 5 не больше 8
6. Девочки обычно любят играть в куклы **и** Не любая машина – автомобиль
7. Все гуси – птицы **и** Все игрушки - машины

Ответ: истинными высказываниями являются: **1, 3, 5, 6**



A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическая операция **ДИЗЪЮНКЦИЯ**

(логическое сложение)

Составное высказывание $A \vee B$ является ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны, а истинным, когда хотя бы одно из двух исходных высказываний истинно.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Соответствует союзу **или**

Обозначается $\vee$

A = я сегодня пойду в школу

B = я сегодня пойду гулять

A + B = я сегодня пойду в школу **или**
я сегодня пойду гулять -
логическое сложение двух
высказываний



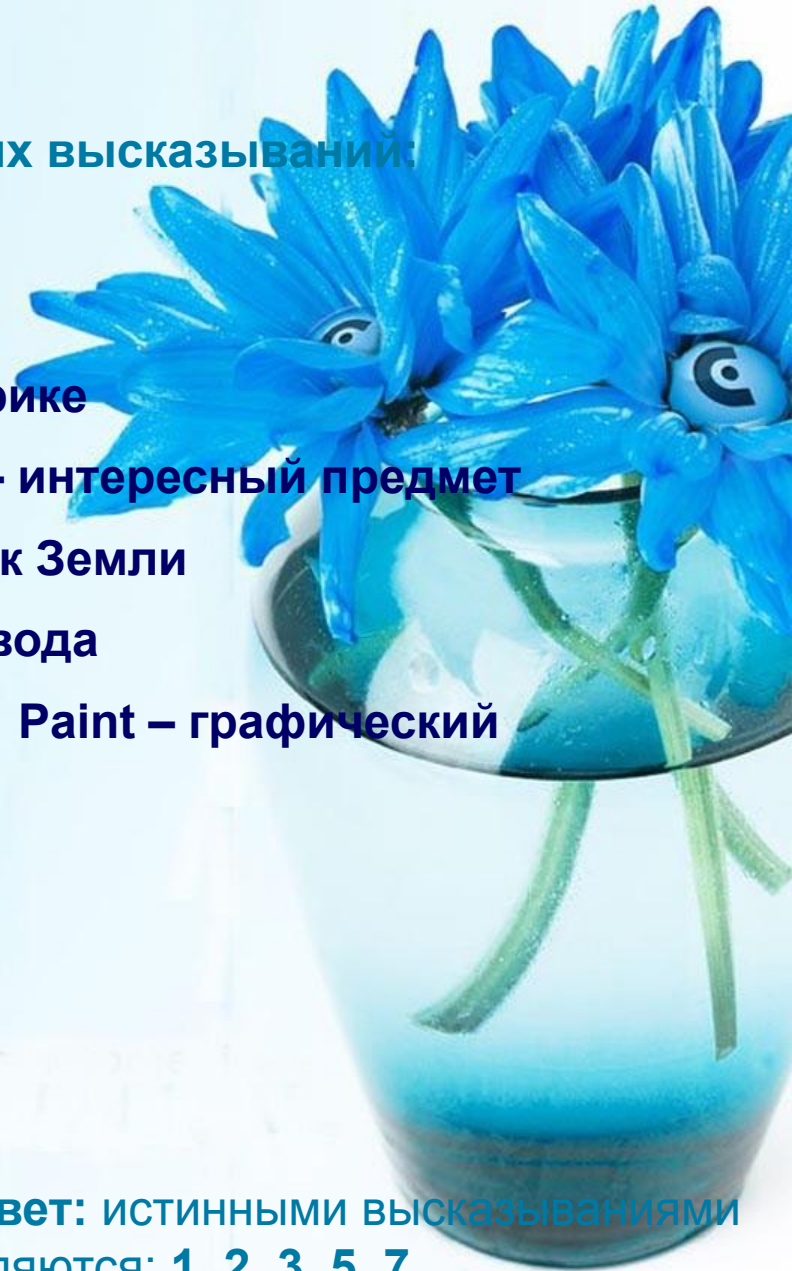
Примеры:

Определить значения истинности следующих высказываний:

1. 7 – простое число **или** 9 – простое число
2. Число 2 четное **или** Это простое число
3. $2 * 2 = 4$ **или** Белые медведи живут в Африке
4. Каша – вкусное блюдо **или** Математика – интересный предмет
5. Луна – спутник Марса **или** Луна – спутник Земли
6. Сегодня плохая погода **или** Кислород – вода
7. Microsoft Word – текстовый редактор **или** Paint – графический редактор

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ответ: истинными высказываниями являются: 1, 2, 3, 5, 7



Логическая операция **ИНВЕРСИЯ**

(отрицание)

Составное
отрицает
исходное

высказывание
высказывание

Соответствует частице **НЕ**

Обозначается $\bar{A}$

A = я сегодня пойду в школу

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

$\bar{A}$ = я сегодня **не** пойду в школу является
логическим отрицанием для высказывания **A**



Примеры:

Сформулируйте отрицания следующих высказываний и укажите значения истинности полученных отрицаний:

1. Волга впадает в Каспийское море.
2. Число 28 не делится на число 7.
3. $6 > 3$.
4. $4 \leq 5$.

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Ответ: истинными высказываниями являются: 2



Логическая операция **ИМПЛИКАЦИЯ**

(логическое следование)

Составное высказывание является ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

A	B	A $\Rightarrow$ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Соответствует обороту

ЕСЛИ..., ТО...

Обозначается **$\Rightarrow$**

A = я сегодня пойду в школу

B = я сегодня пойду гулять

A $\rightarrow$ B = *если* я сегодня пойду в школу, *то* я сегодня пойду гулять - **логическое следование**



Примеры:

Определить значения истинности
следующих высказываний:

1. Если 12 делится на 6, то 12 делится на 3.
2. Если 11 делится на 6, то 11 делится на 3.
3. Если 15 делится на 6, то 15 делится на 3.
4. Если 15 делится на 3, то 15 делится на 6.

Ответ: истинными высказываниями
являются: 1, 2, 3



A blue flower in a glass vase is positioned in the upper right corner of the slide. Overlaid on the lower right portion of the image is a truth table for the logical implication $A \rightarrow B$. The table has four rows and three columns. The first two columns are labeled 'A' and 'B', and the third column is labeled ' $A \rightarrow B$ '. The rows represent all possible combinations of truth values for A and B: (0, 0), (0, 1), (1, 0), and (1, 1). The resulting truth values for the implication are 1, 1, 0, and 1 respectively.

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

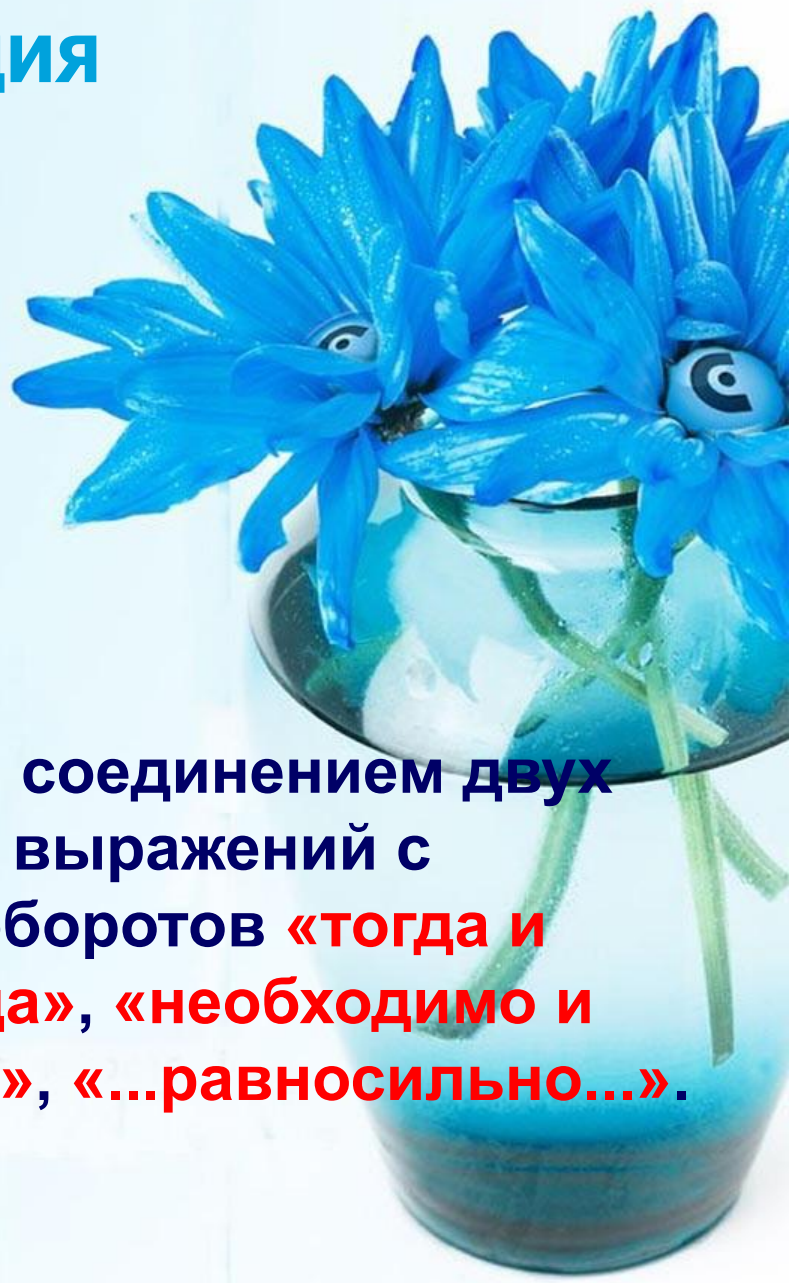
Логическая операция **ЭКВИВАЛЕНЦИЯ**

(равнозначность)

Составное высказывание является истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Образуется соединением двух логических выражений с помощью оборотов **«тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», «...равносильно...».**



Пусть есть два высказывания:

A = я завтра получу хорошую
оценку

B = я сегодня выучу уроки

Высказывание:

A $\Leftrightarrow$ **B** = для того чтобы я завтра
получил хорошую оценку,
необходимо и достаточно, чтобы я
сегодня выучил уроки является
эквивалентностью



Примеры:

Определить значения истинности
следующих высказываний:

1. 12 делится на 6 **тогда и только тогда, когда** 12 делится на 3.
2. 11 делится на 6 **тогда и только тогда, когда** 11 делится на 3.
3. 15 делится на 5 **тогда и только тогда, когда** 15 делится на 4.

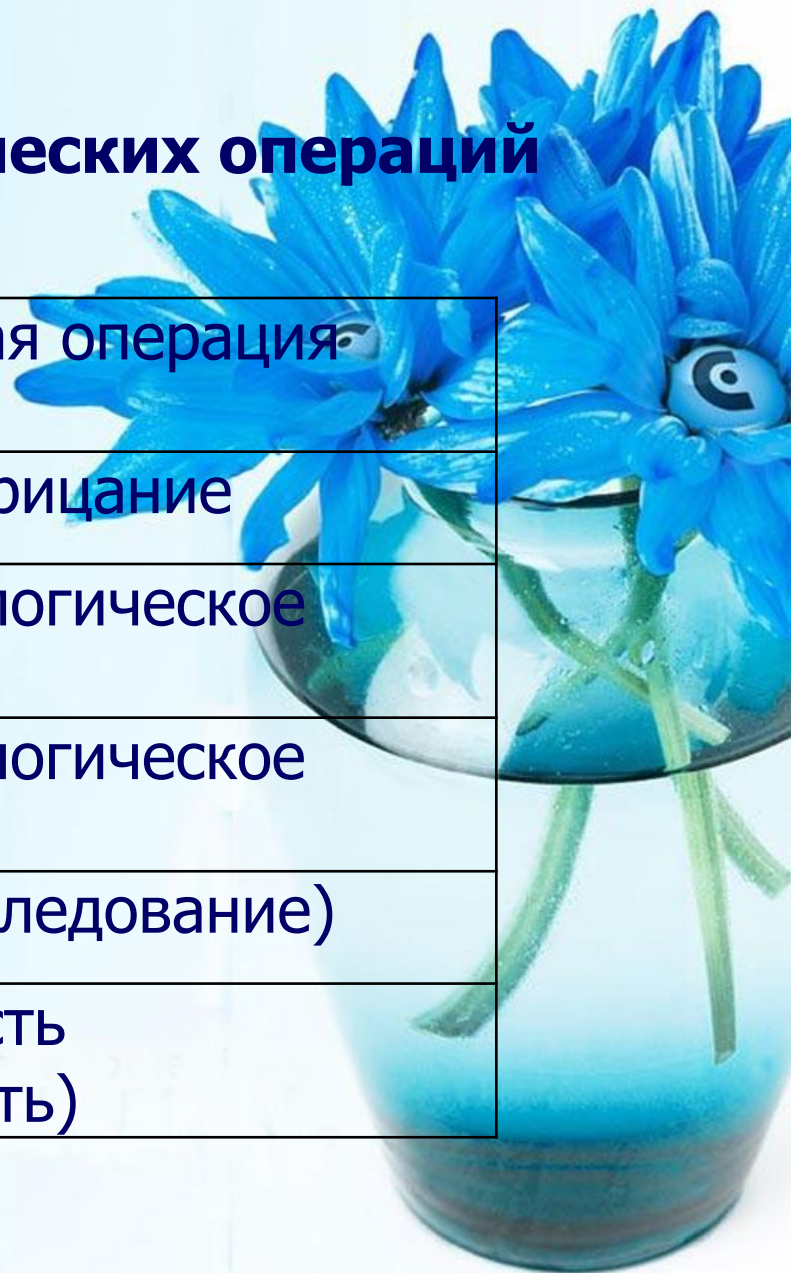
Ответ: истинными
высказываниями являются: 1, 2

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Приоритет выполнения логических операций

Приоритет операции	Логическая операция
Первый (высший)	Логическое отрицание
Второй	Конъюнкция (логическое умножение)
Третий	Дизъюнкция (логическое сложение)
Четвертый	Импликация (следование)
Пятый (низший)	Эквивалентность (равносильность)



Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении

1. инверсия
2. конъюнкция
3. дизъюнкция
4. импликация
5. эквивалентность
6. Для изменения указанного порядка выполнения операций используются скобки.

ПРИМЕРЫ.

Расставить порядок действий в следующих сложных логических выражениях.

$$A \overset{\textcircled{2}}{\vee} B \overset{\textcircled{1}}{\&} A$$

$$A \overset{\textcircled{3}}{\vee} \overset{\textcircled{1}}{\overline{B}} \overset{\textcircled{2}}{\&} A$$

$$(A \overset{\textcircled{2}}{\vee} \overset{\textcircled{1}}{\overline{B}}) \overset{\textcircled{3}}{\&} A$$

$$\frac{\overset{\textcircled{2}}{A \overset{\textcircled{1}}{\vee} B}}{\overset{\textcircled{4}}{\rightarrow} A \overset{\textcircled{3}}{\&} B}$$

$$\overset{\textcircled{1}}{\overline{A}} \overset{\textcircled{5}}{\vee} \overset{\textcircled{2}}{\overline{(B \overset{\textcircled{3}}{\rightarrow} A)}} \overset{\textcircled{4}}{\&} B$$

$$(A \overset{\textcircled{2}}{\vee} B \overset{\textcircled{1}}{\rightarrow} A) \overset{\textcircled{4}}{\&} \overset{\textcircled{3}}{\overline{B}}$$

$$\overset{\textcircled{1}}{\overline{A}} \overset{\textcircled{3}}{\vee} \overset{\textcircled{2}}{\overline{B}} \overset{\textcircled{5}}{\leftrightarrow} A \overset{\textcircled{4}}{\&} B$$

$$\frac{\overset{\textcircled{3}}{A \overset{\textcircled{2}}{\vee} (B \overset{\textcircled{1}}{\leftrightarrow} A)}}{\overset{\textcircled{4}}{\&} B}$$