



Лекция 3. Обработка результатов измерений

Проблемы и задачи обработки результатов измерений. Некоторые сведения по теории вероятностей и мат статистики

● Случайный характер результатов измерений

- На результаты измерений оказывают влияние большое число различных факторов, многие из которых носят случайный характер. Вследствие этого в общем случае результаты измерений являются случайными величинами и для их обработки требуется применение аппарата математической статистики и теории вероятностей



Пример 1

Прочность и надежность

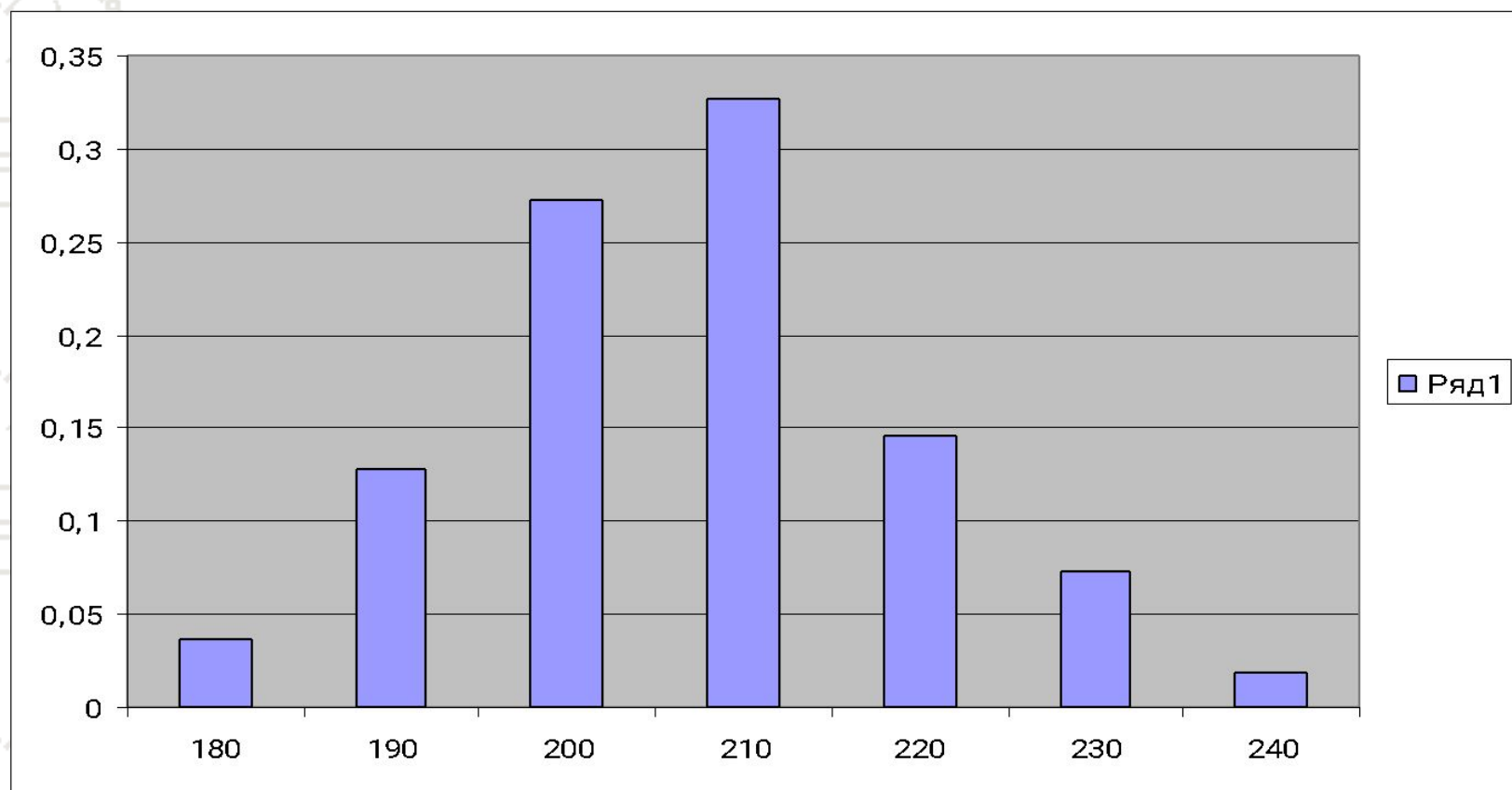
Результаты измерений пределов прочности материала

$\sigma_{\text{п}}$	m_i	p_i
170-180	2	0,036
180-190	7	0,127
190-200	15	0,273
200-210	18	0,327
210-220	8	0,145
220-230	4	0,073
230-240	1	0,018

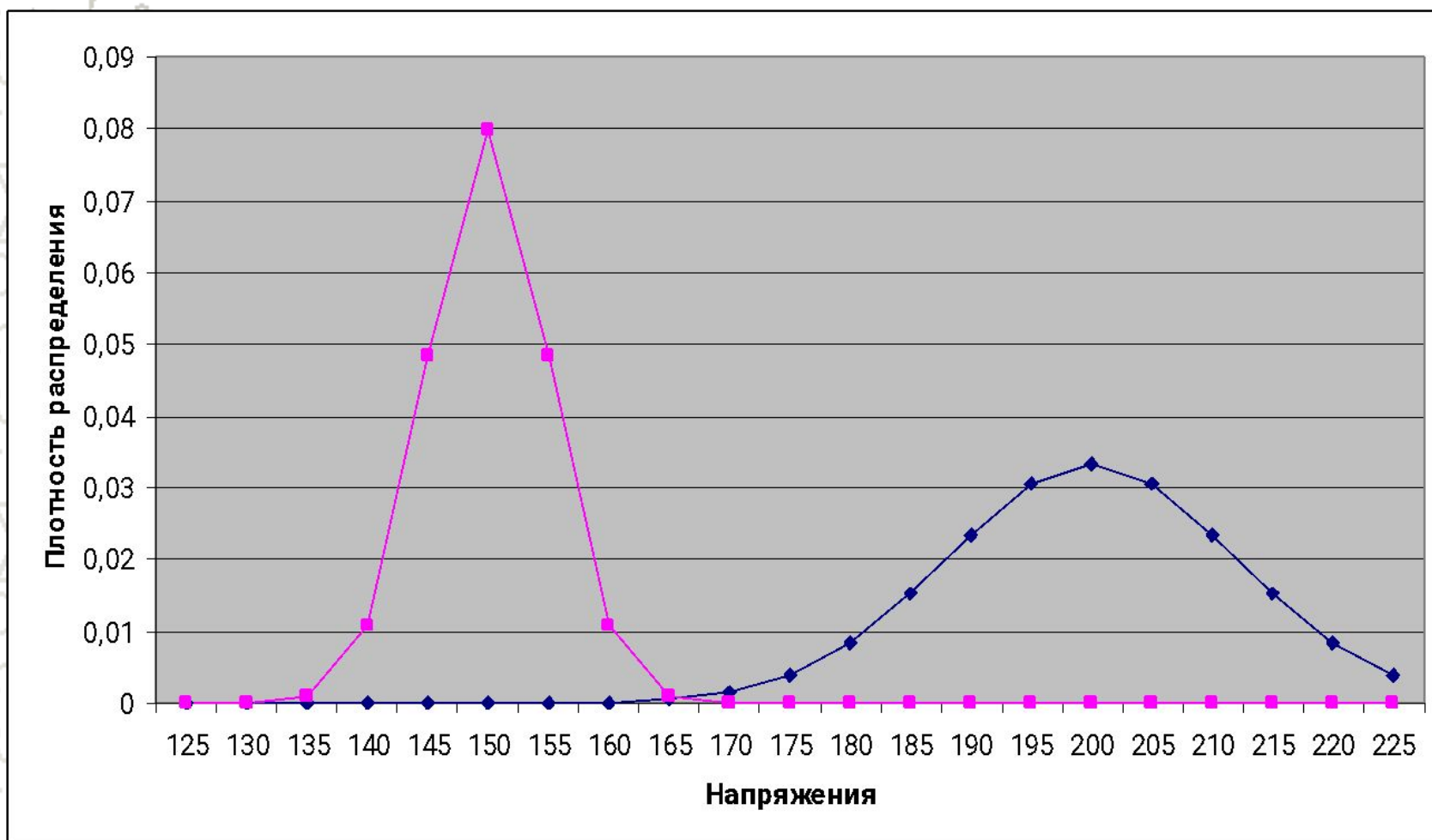
Испытания образцов на прочность

Δt	m_i	p_i
195-201	1	0,03
201-207	5	0,14
207-213	11	0,31
213-219	12	0,34
219-225	4	0,11
225-231	2	0,06
Всего	35	1,00

Распределение результатов испытаний



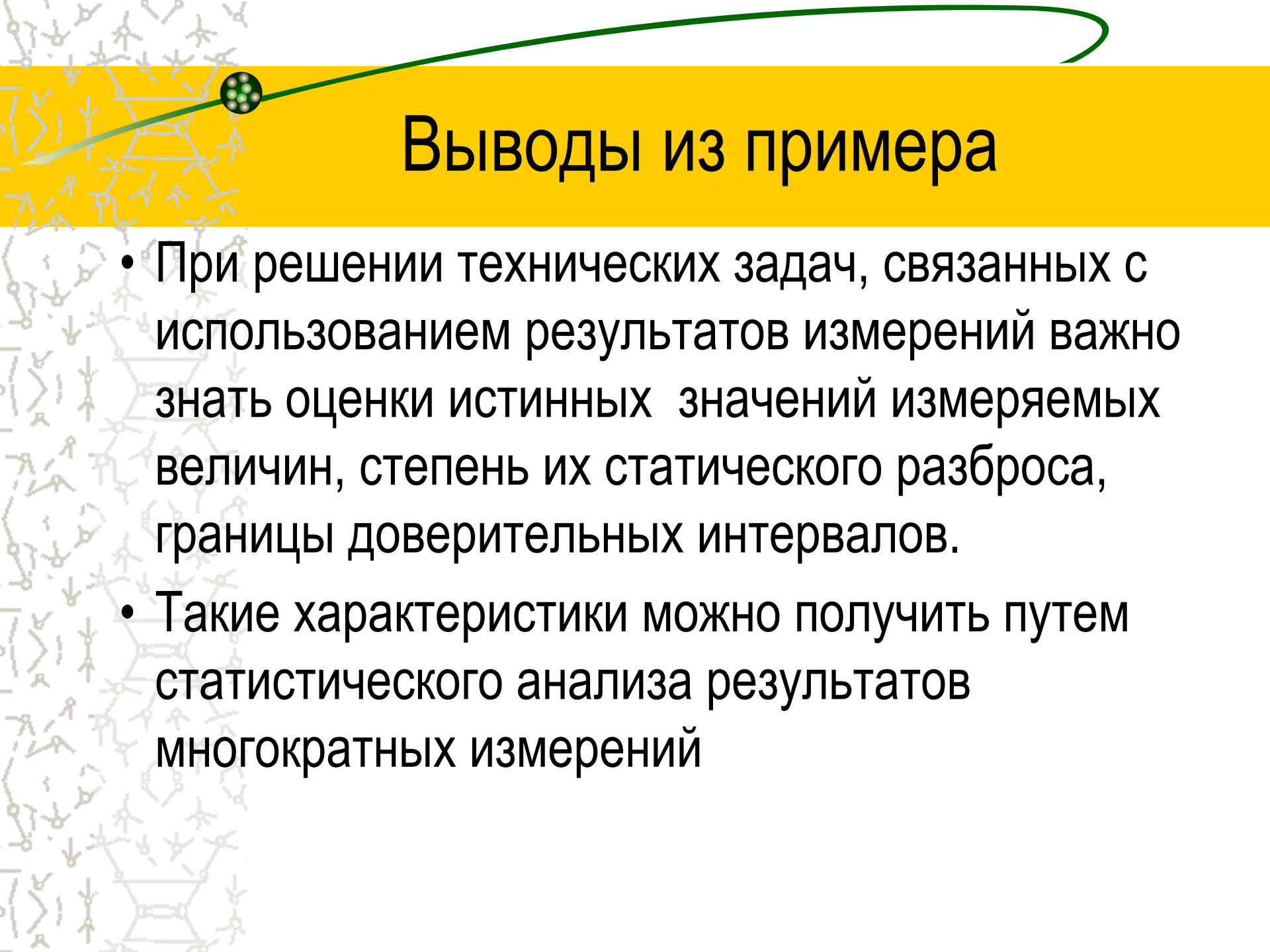
Распределение действующих напряжений и предела прочности





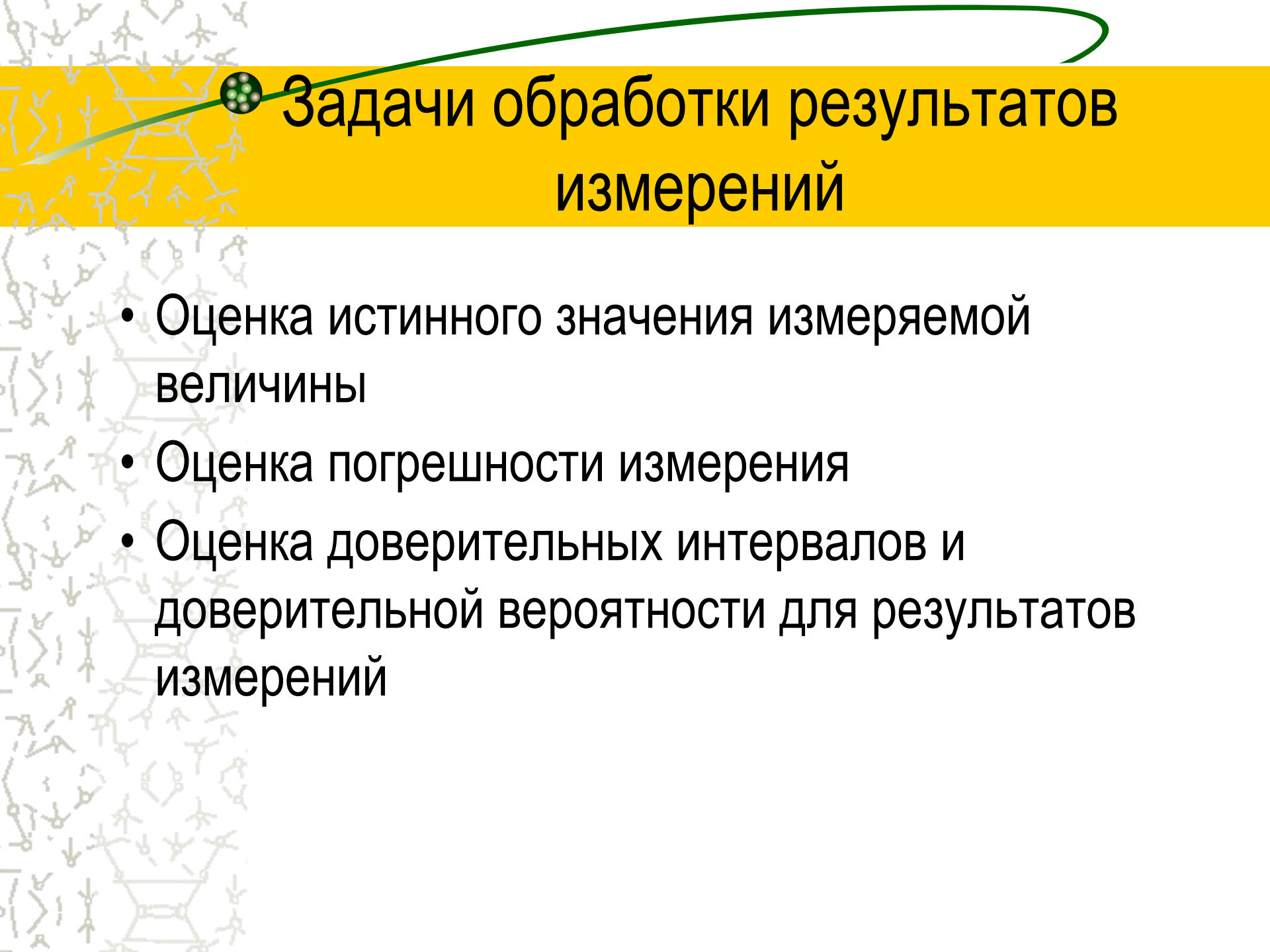
Критерий разрушения и запас прочности

- В диапазоне значений 165 - 170 МПа кривые пересекаются. Заштрихованная область соответствует событиям, когда действующие напряжения превышают предел прочности. Площадь заштрихованной области соответствует вероятности таких событий, то есть вероятности разрушения.



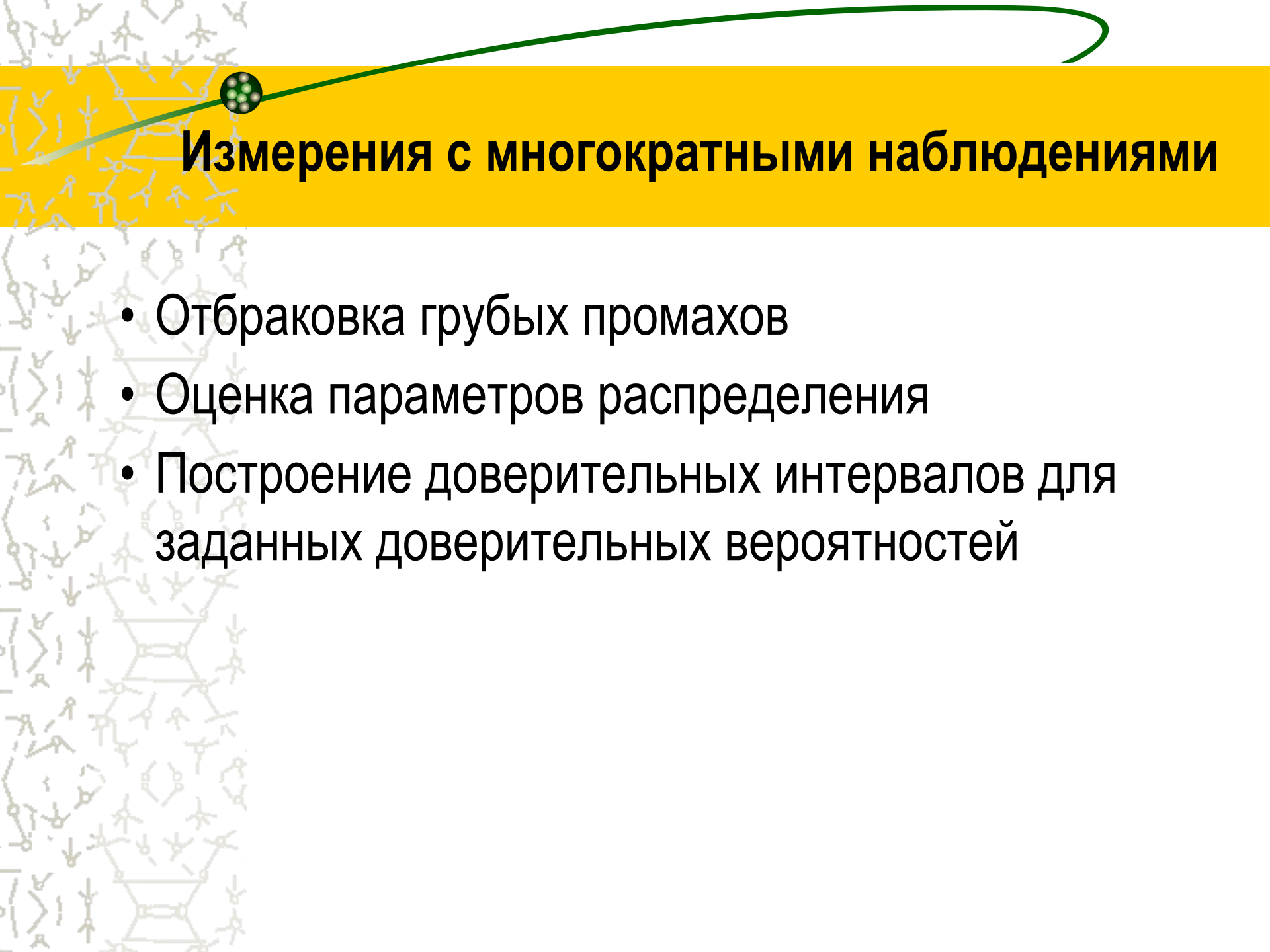
Выводы из примера

- При решении технических задач, связанных с использованием результатов измерений важно знать оценки истинных значений измеряемых величин, степень их статического разброса, границы доверительных интервалов.
- Такие характеристики можно получить путем статистического анализа результатов многократных измерений



• Задачи обработки результатов измерений

- Оценка истинного значения измеряемой величины
- Оценка погрешности измерения
- Оценка доверительных интервалов и доверительной вероятности для результатов измерений



Измерения с многократными наблюдениями

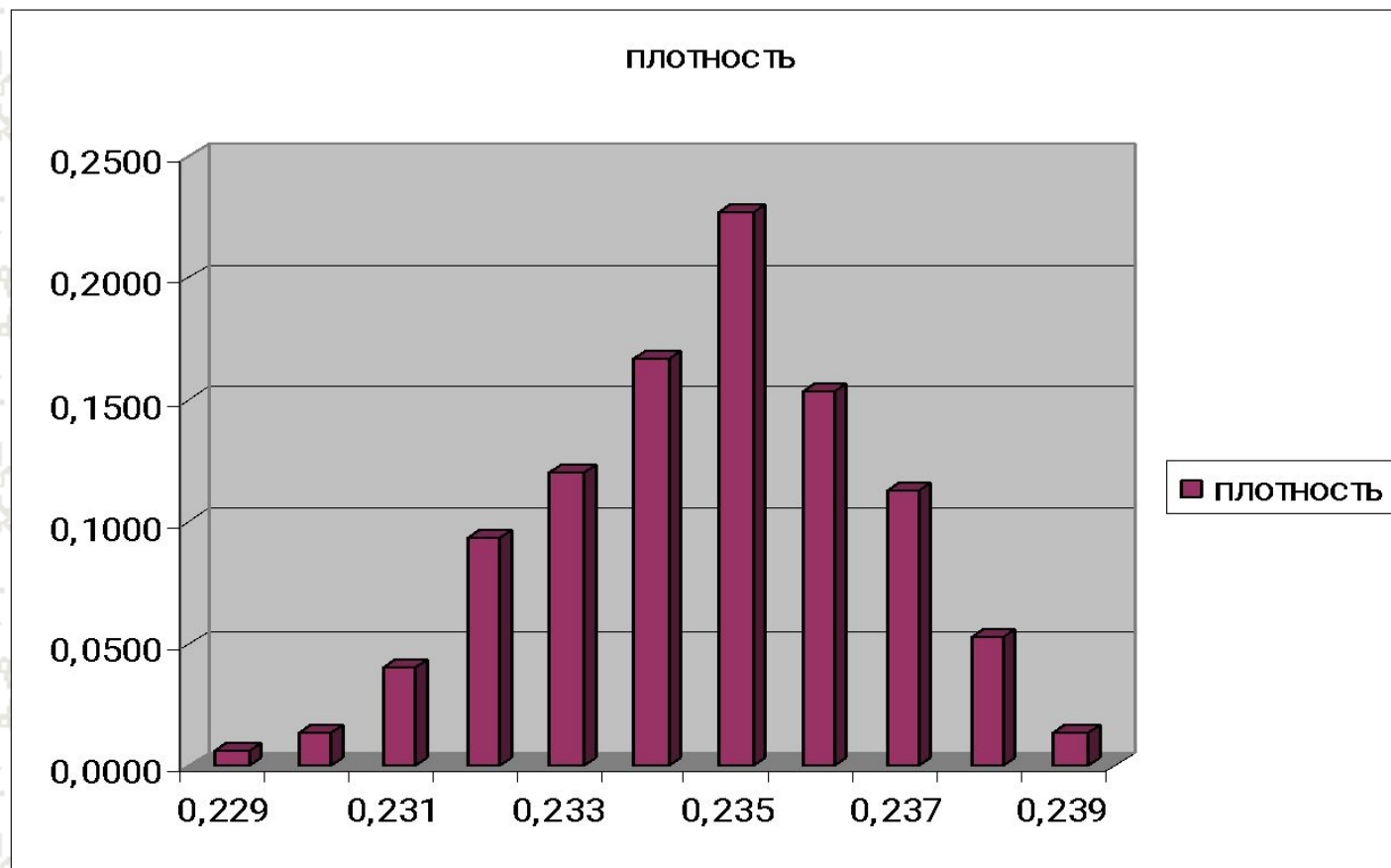
- Отбраковка грубых промахов
- Оценка параметров распределения
- Построение доверительных интервалов для заданных доверительных вероятностей

Пример 2 – размеры деталей

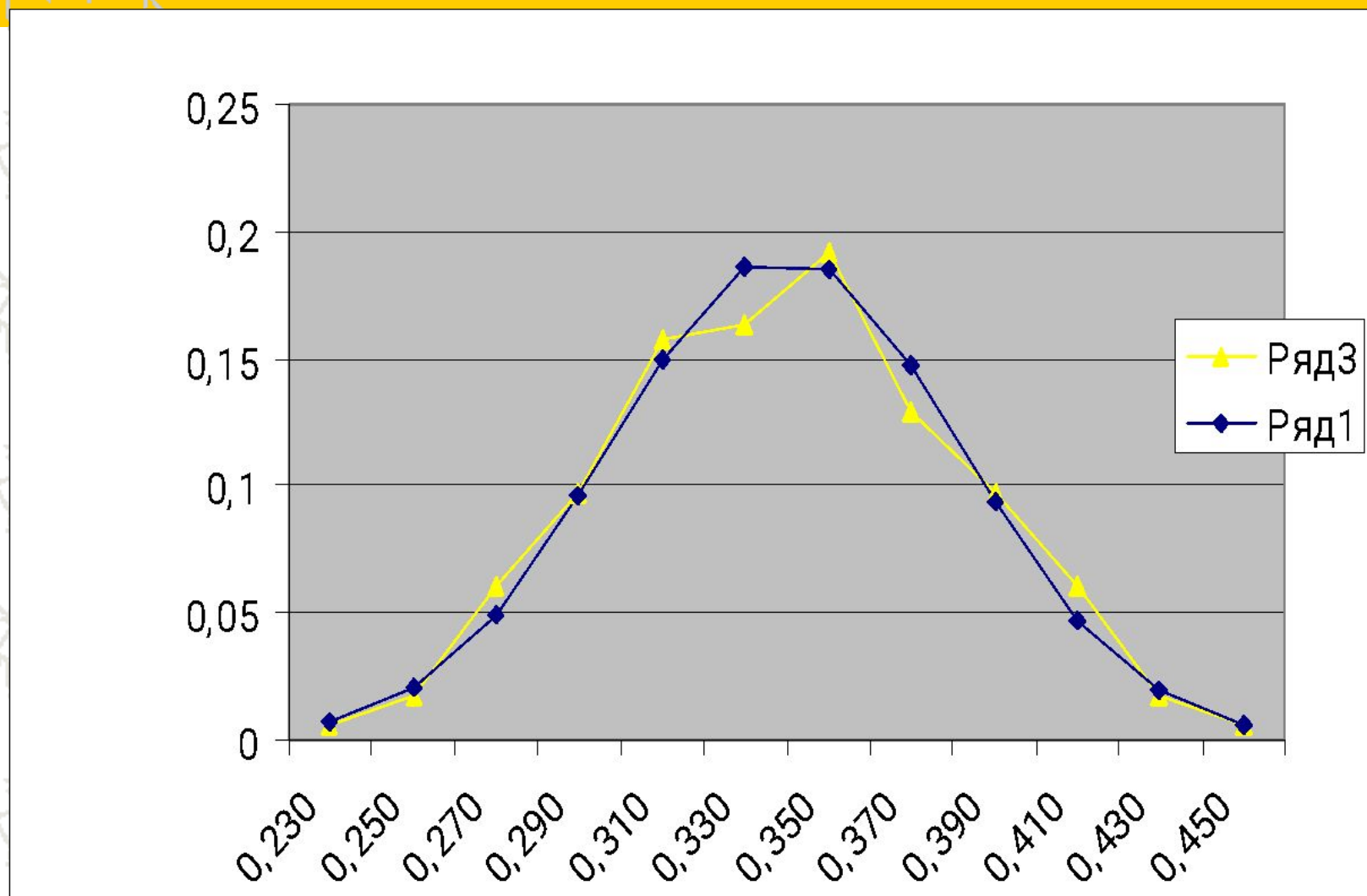
i	x_i	m_i	$p_i = m_i/n$
1	0,229	1	0,0067
1,2	0,230	2	0,0133
3 -9	0,231	6	0,0400
10-23	0,232	14	0,0933
24-41	0,233	18	0,1200
42-66	0,234	25	0,1667
67-100	0,235	34	0,2267
101- 123	0,236	23	0,1533
124- 140	0,237	17	0,1133
141- 148	0,238	8	0,0533
149,150	0,239	2	0,0133



Эмпирическая плотность распределения



Теоретическое и эмпирическое распределение



Оценка истинного значения ФВ по результатам измерения

- При многократных измерениях одного и того же параметра в качестве оценки истинного значения используют среднее арифметическое значение

$$X_r \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Оценка рассеяния результатов измерения

- Для оценки рассеяния единичных результатов измерений x_i в ряду равноточных измерений одной и той же физической величины около среднего их значения используют среднеквадратичную погрешность измерений (эмпирическую) (СКП) (при $n < 20$)

$$\sigma_x = S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

Оценка рассеяния результатов измерения

- при $n \geq 20$

$$\sigma_x = S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

Разброс случайной величины

- Можно показать, что случайная величина находится с доверительной вероятностью P в интервале

$$\bar{x} - z_p \sigma_x \leq x \leq \bar{x} + z_p \sigma_x$$

- Здесь z_p – квантиль нормального распределения, зависящая от доверительной вероятности P .

Разброс оценок среднего

- Величина $\bar{X}$, полученная в одной серии измерений, является случайным приближением к X . Для оценки ее возможных отклонений от X_r (случайной погрешности среднего арифметического значения результата измерений одной и той же величины в одном ряду измерений) определяют среднюю квадратичную погрешность (СКП) оценки X_r .

Разброс оценок среднего

- Средняя квадратичная погрешность (СКП) оценки X_r

$$\sigma_{\bar{x}} = S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}$$

Соотношение разброса случайной величины и ее оценки среднего

- СКП из серии измерений всегда меньше, чем в каждом отдельном измерении

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{n}$$

Разброс оценок среднего

- Можно показать, что средний результат при малом числе измерений n находится с доверительной вероятностью P в интервале

$$\bar{x} - \frac{t_{p,n-1}\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq x \leq \bar{x} + \frac{t_{p,n-1}\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

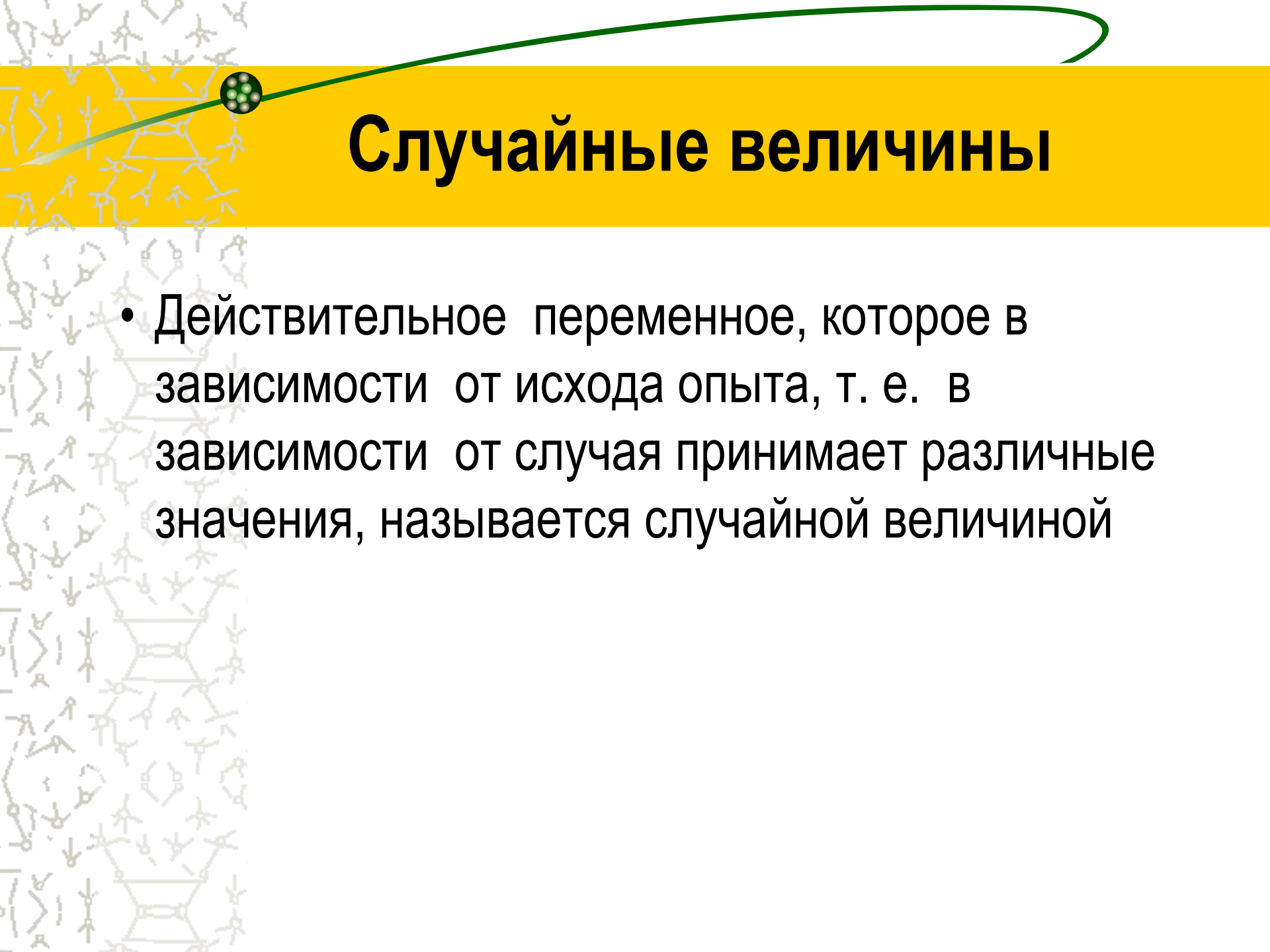
- Здесь $t_{p,n-1}$ – коэффициент Стьюдента, зависящий от степеней свободы n и доверительной вероятности P .



Лекция 4. Некоторые сведения из теории вероятностей и мат статистики

Некоторые сведения из теории вероятностей и мат статистики. Статистические характеристики результатов измерений - некоторые определения.

Основные понятия теории вероятностей



Случайные величины

- Действительное переменное, которое в зависимости от исхода опыта, т. е. в зависимости от случая принимает различные значения, называется случайной величиной

Функция распределения

- Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется функция:

$$F(x) = P(X < x).$$

- *Значение функции распределения в точке x_0 , таким образом, равно вероятности того, что случайная величина принимает значение, меньшее x_0*

Непрерывные СВ

- Случайная величина называется непрерывной, если ее функцию распределения (интегральную функцию распределения) можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Плотность распределения СВ

- Функция $f(x)$ называется плотностью распределения. Для плотности распределения должно выполняться условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Интервалы и вероятности

- Вероятность того, что мат ожидание результата измерения лежит в интервале $[-\Delta < x < +\Delta]$, равна

$$P = \alpha \{ \bar{x} - \Delta \leq x_r \leq \bar{x} + \Delta \}$$

P – доверительная вероятность, а интервал

$$\{ \bar{x} - \Delta \leq x_r \leq \bar{x} + \Delta \}$$

- доверительный интервал.

Вероятность попадания в интервал

- При заданной плотности вероятности, вероятность того, что случайная величина попадает в заданный промежуток, равна

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$



Свойства распределений

Нормальное и равномерное
распределения

Равномерное распределение

- Случайная величина называется *равномерно распределенной* на $[a, b]$, если ее плотность вероятности на $[a, b]$ постоянна, а вне $[a, b]$ равна 0

$$f(x) = \frac{1}{b - a}$$

Нормальное распределение

- Нормальное распределение (распределение Гаусса) если

$$P\{x^1 \leq \xi \leq x^2\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x^1}^{x^2} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

Нормальное распределение

- Плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Функция распределения

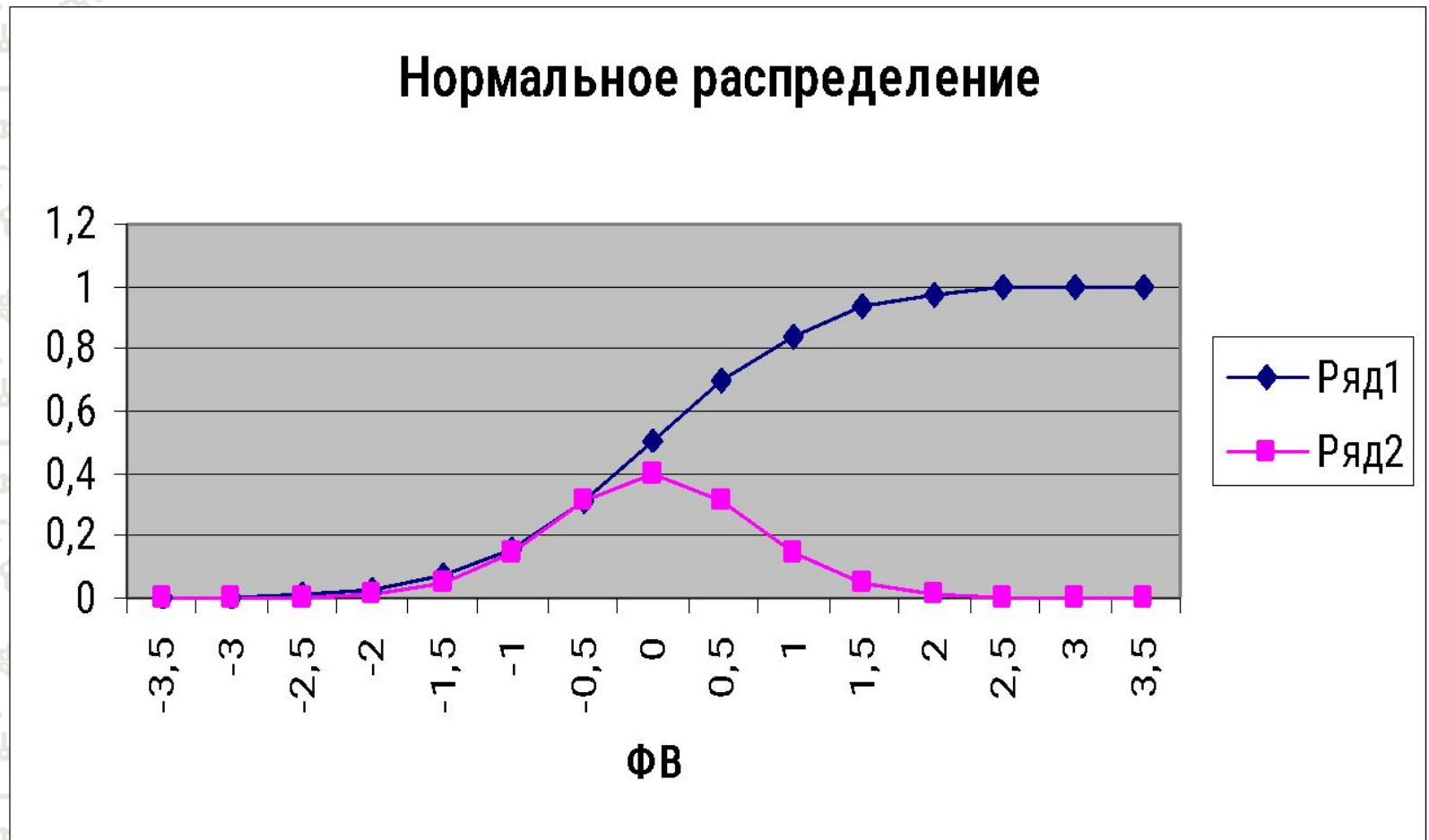
$$P\{x^1 \leq \xi \leq x^2\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x^1}^{x^2} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

Плотность нормального распределения

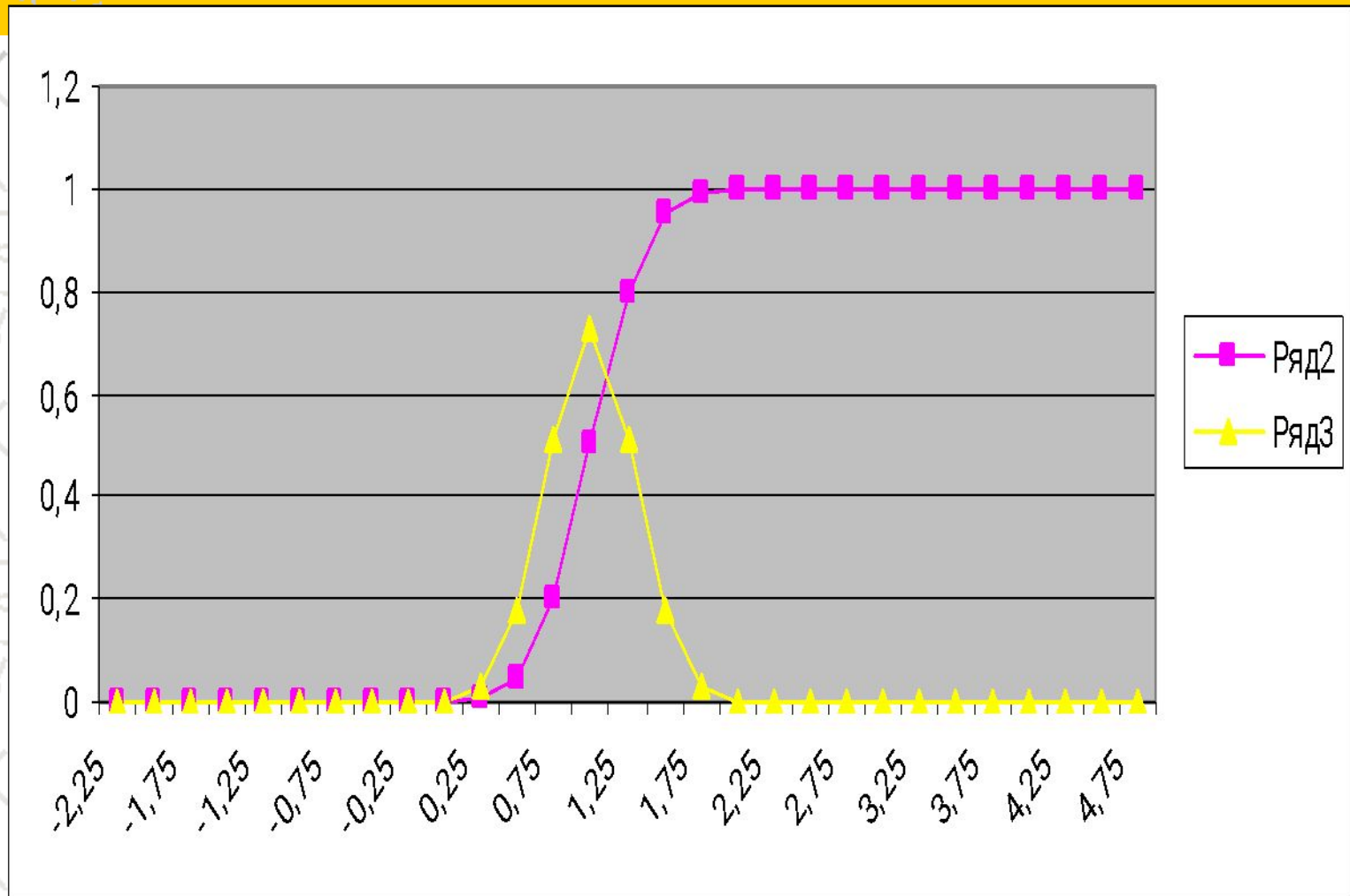
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

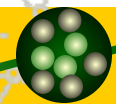
- a – математическое ожидание
- σ – среднее квадратическое отклонение
- σ^2 – дисперсия

Нормальное распределение при $\sigma=1$, $a=0$



Свойства нормального распределения





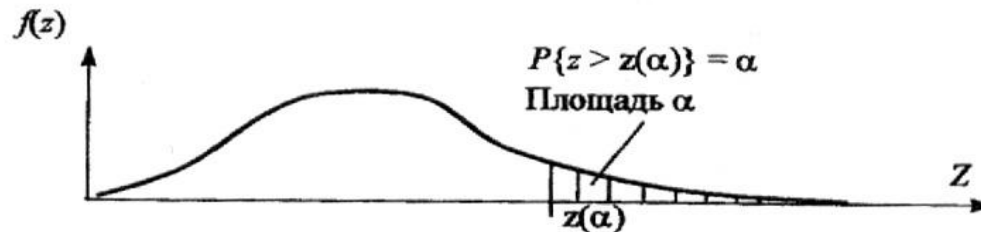
Интервалы и вероятности

Критические области. Квантили

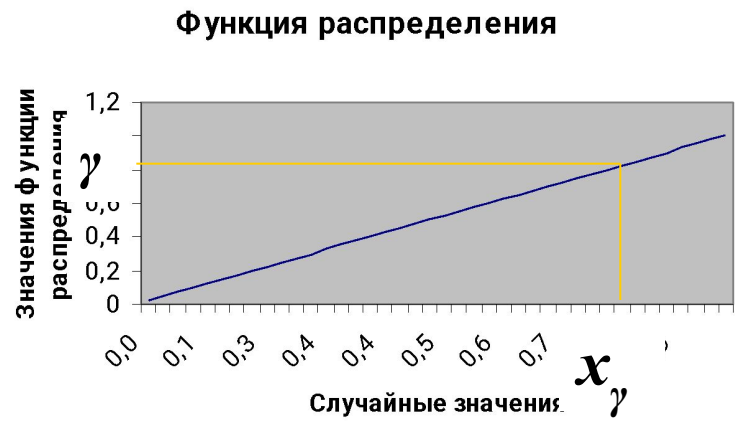
Односторонняя критическая область

Для односторонней критической области $z(\alpha) = z_{1-\alpha}$, т.е. критическое значение аргумента $z(\alpha)$ соответствует квантили $z_{1-\alpha}$ уровня $1-\alpha$ — уровень значимости.

$$\int_{z(\alpha)}^{\infty} f(z) dz = \alpha = 1 - \int_{-\infty}^{z(\alpha)} f(z) dz$$



Квантиль



Квантилью, отвечающей уровню вероятности γ , называют такое значение аргумента x_γ , при котором функция распределения случайной величины принимает значение γ .

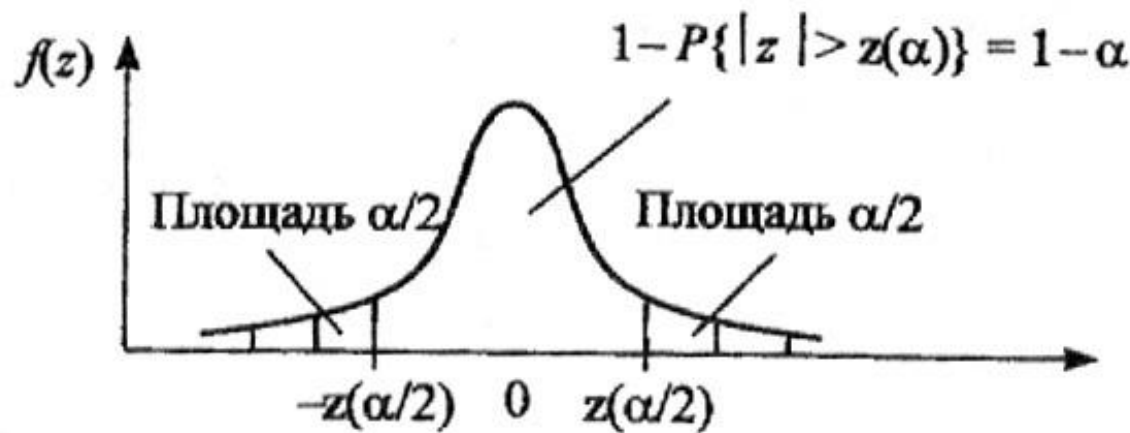
Квантиль — это значение аргумента x_γ функции распределения, при котором $F(x_\gamma) = \gamma$.

Эмпирическую квантиль находят по заданному значению вероятности γ , используя вариационный ряд или ступенчатую ломаную линию.

Двусторонняя критическая область

Для симметричной функции плотности распределения $f(z)$ критическую область выбирают из условия $a_1 = a_2 = \alpha/2$

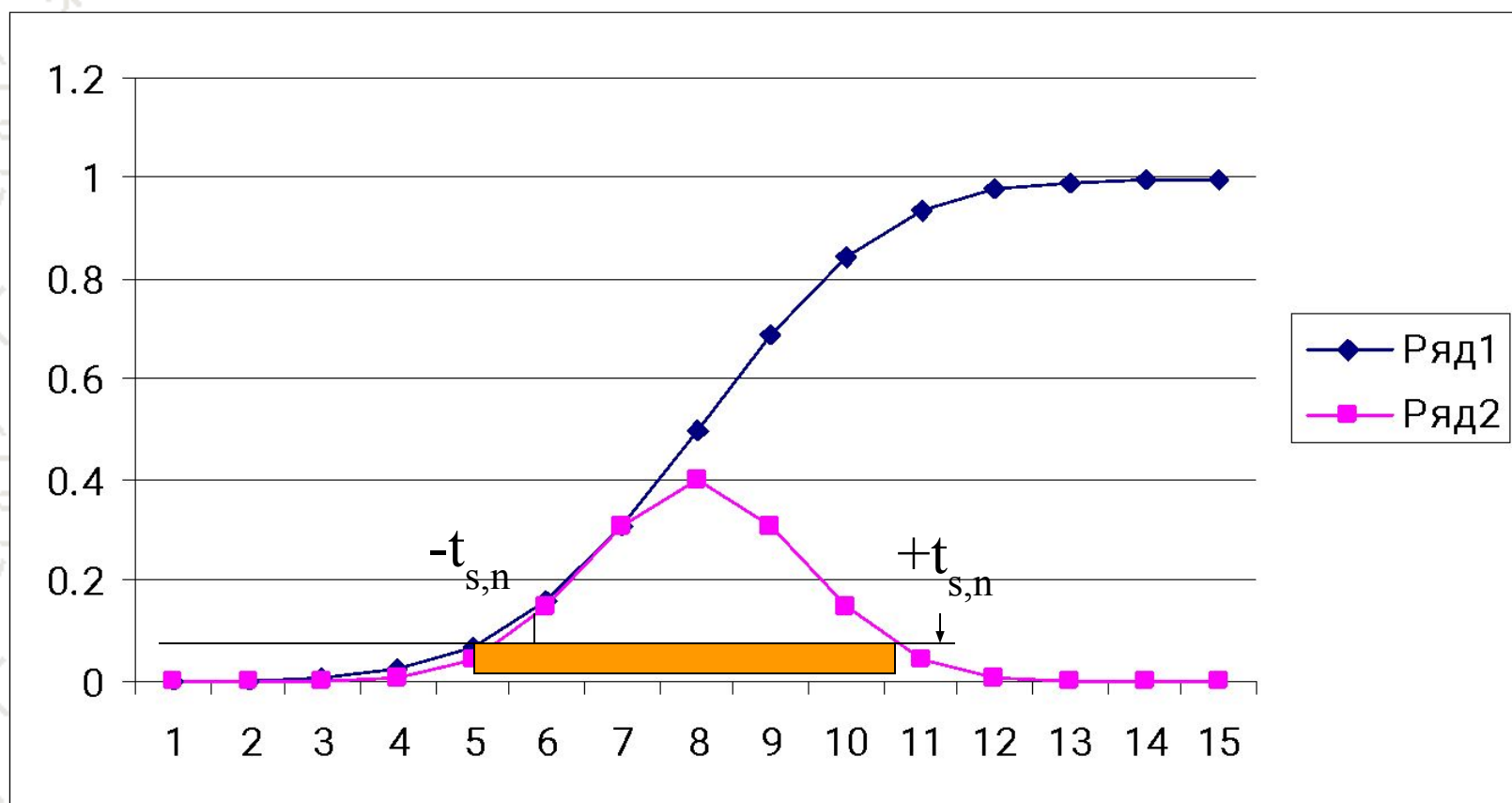
В таком случае левая и правая границы будут равны $|z(\alpha/2)|$.



Значения нормированной функции Лапласа

P	$Z_{p/2}$	P	$Z_{p/2}$
0,90	1,65	0,97	2,17
0,95	1,96	0,98	2,33
0,96	2,06	0,99	2,58

Доверительные интервалы и вероятности



Доверительная вероятность

- Вероятность того, что мат ожидание результата измерения лежит в интервале $[-\Delta < x < +\Delta]$, равна

$$P_{\alpha} = \alpha \{ \bar{x} - \Delta < x_u < \bar{x} + \Delta \}$$

- Можно показать, что вероятность того, что истинная величина лежит в указанных границах равна

$$P \{ \bar{x} - t_{p,n-1} \sigma_{\bar{x}} \leq x \leq \bar{x} + t_{p,n-1} \sigma_{\bar{x}} \} = 2\Phi_n(t) - 1$$

- Где $\Phi_n(t)$ – функция распределения Стюдента при степени свободы n ; $t_{p,n}$ – квантиль распределения Стюдента при уровне значимости p

Средний результат при малом числе измерений

- Средний результат при малом числе измерений находится с доверительной вероятностью P в интервале

$$J = \bar{x} \pm \frac{t_{p,n-1} \sigma_x}{\sqrt{n}}$$

где t – квантиль распределения Стьюдента с доверительной вероятностью P и степенью свободы n .

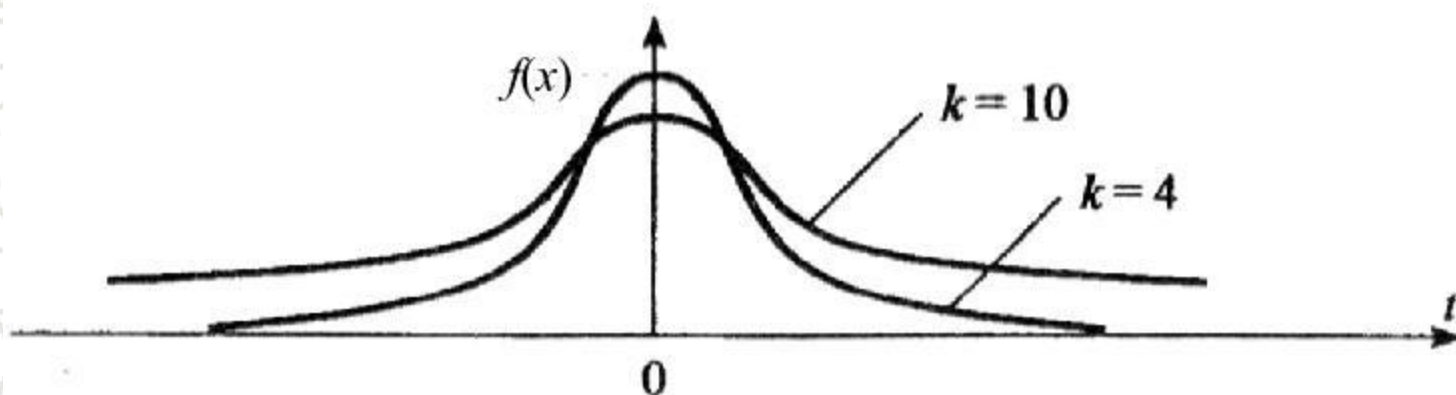
Распределение Стьюдента

- Распределение $t = X/Y$ с независимыми X и Y , где X нормально распределено с законом $N(x; 0, 1)$, а Y (с n степенями свободы), называется *t-распределением* или *распределением Стьюдента* с n степенями свободы. Оно имеет плотность

$$f(t) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{\pi k} \Gamma(k/2)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}$$



Плотность распределения Стьюдента



Вероятность $P\{t \geq t(k; \alpha)\} = \alpha$, где k – число степеней свободы

k	α , односторонняя область		
	0,1	0,05	0,01
	α , двусторонняя область		
	0,2	0,1	0,02
1	3,078	6,314	31,821
2	1,886	2,92	6,965
3	1,638	2,353	4,541
4	1,533	2,132	3,747
5	1,476	2,015	3,365
6	1,44	1,943	3,143
7	1,415	1,895	2,998
8	1,397	1,86	2,896
9	1,383	1,833	2,821
10	1,372	1,812	2,764

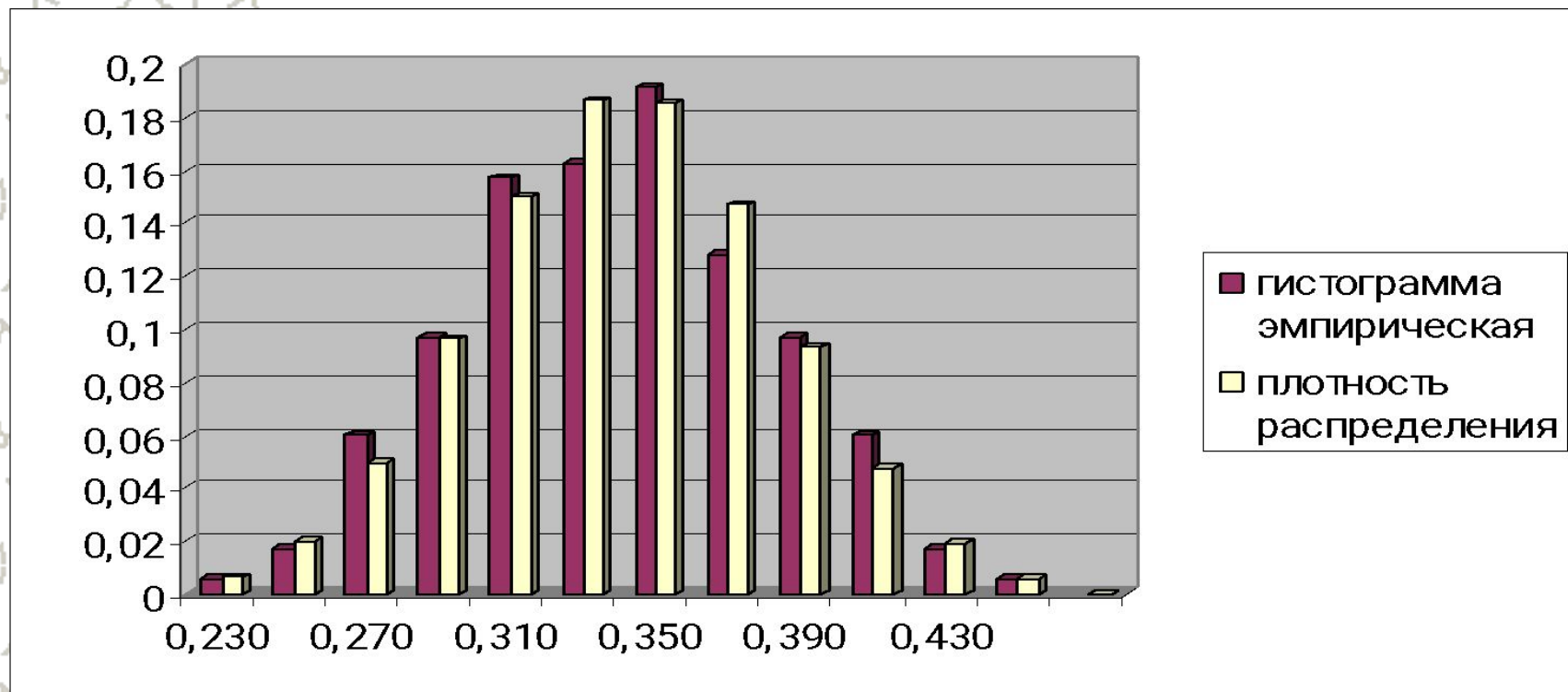
Распределение Стьюдента

Таблицы распределения содержат значения для односторонней (пределы интегрирования от $r(k; a)$ до бесконечности)

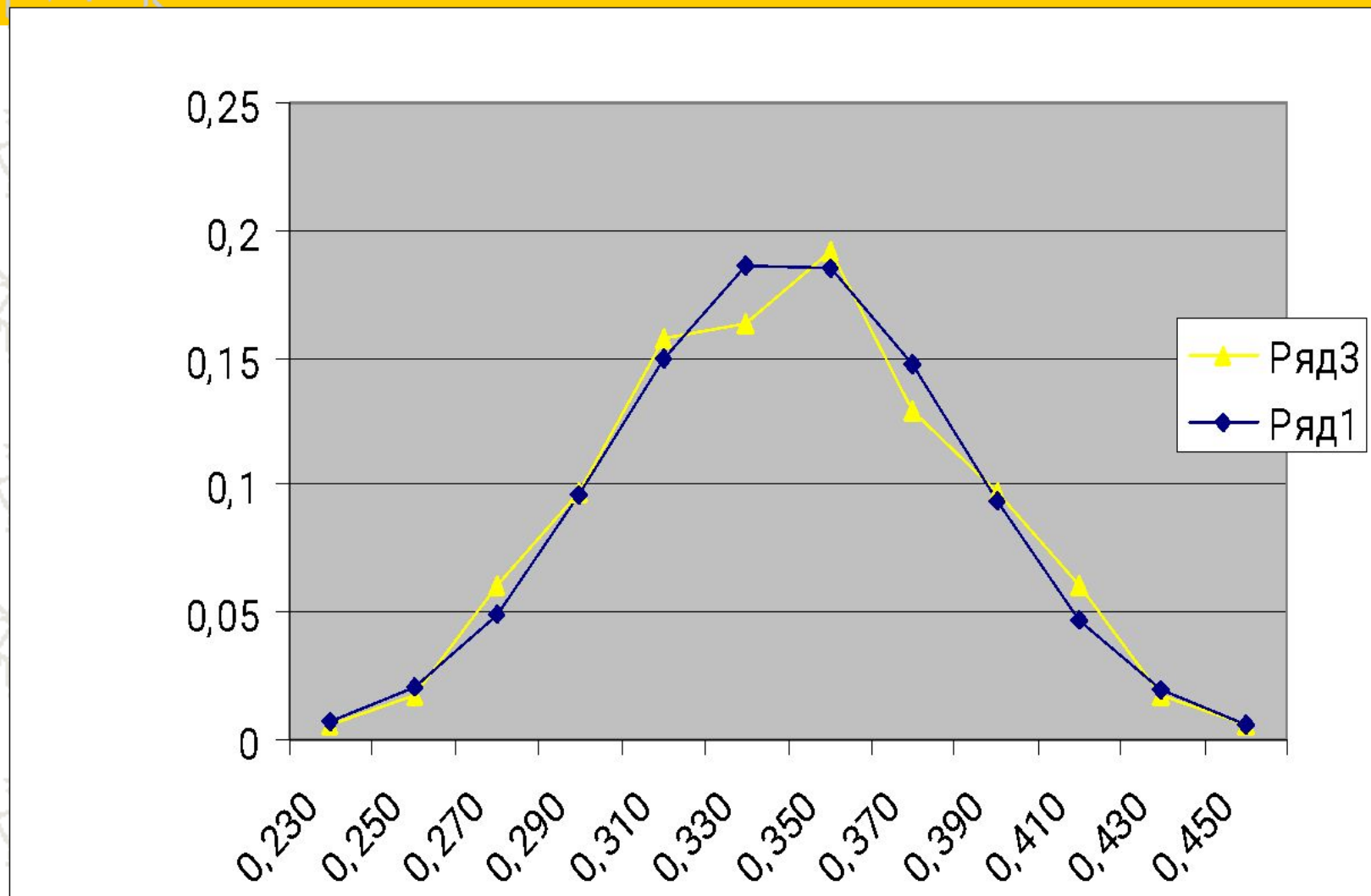
Распределение Стьюдента применяется для описания ошибок выборки при $k < 30$.

- При k , превышающем 100, данное распределение практически соответствует нормальному, для значений k из диапазона от 30 до 100 различия между распределением Стьюдента и нормальным распределением составляют несколько процентов

Пример 3- гистограмма



Пример -1 – Теоретическое и эмпирическое распределение



Литература

- Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. , М. , Наука, 1980
- Абезгауз Г.Г. и др. Справочник по вероятностным расчетам. М., изд-во Минобороны. 1966 г.
- Сергеев А.Г. и др. Метрология, стандартизация и сертификация, М.: ЛОГОС, 2003 г.