

ЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
Логика высказываний
Основы логики высказываний

- Употребление термина «логика» в словаре С.И. Ожегова имеет три основных значения:
 - 1) наука о законах и формах мышления;
 - 2) ход рассуждений или умозаключений;
 - 3) разумность, внутренняя закономерность чего-либо.
- Таким образом, логику можно рассматривать с различных точек зрения. Логика будет рассматриваться как формализм для представления знаний.
- Как самостоятельная научная дисциплина логика сформировалась в силлогистике гениального мыслителя древности Аристотеля.
- . Особая роль принадлежит Эрбрану и Робинсону, предложившим автоматический метод доказательства теорем.
- После того как Р. Ковальски показал, как процесс логического доказательства преобразуется в традиционный процесс вычисления, логика перестала быть сугубо теоретической дисциплиной, став основой для создания языка программирования ПРОЛОГ и породив новое направление в программировании – логическое.

- простейшая математическая логика – логика высказываний, или логика нулевого порядка. Здесь основным понятием является высказывание – всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, – и при этом можно сказать, истинно высказывание или ложно, но ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.
- более общая система – логика первого порядка. Логика предикатов первого порядка позволяет выразить большее разнообразие утверждений благодаря тому, что в нее добавлены термы, предикаты и кванторы.

- В логике высказываний предполагается, что мир может быть описан элементарными предложениями, или высказываниями, и логическими связями между ними. Кроме этого, принято еще два допущения:
- 1) простому предложению или высказыванию можно приписать истинностное значение;
- 2) сложные предложения образуются путем видоизменения некоторого предложения с помощью слова «НЕ» ($\sim$) или путем связывания простых предложений с помощью слов «И» ($\wedge$); «ИЛИ» ($\vee$); «ЕСЛИ, ТО» ($\rightarrow$); «ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА» ($\leftrightarrow$). Эти пять слов называют сентенциональными, пропозициональными или логическими связками, каждая из них имеет свое название: « $\sim$ » — отрицание; « $\wedge$ » — конъюнкция; « $\vee$ » — дизъюнкция; « $\rightarrow$ » — импликация; « $\leftrightarrow$ » — эквиваленция.

- высказывание – это неразлагаемое и неанализируемое повествовательное предложение, которое может быть истинным или ложным, но не тем и другим одновременно. Высказывание, состоящее из одного предложения, называют простым или элементарным.

- два подхода к установлению истинности высказываний: эмпирический и логический. Первый устанавливает истинность высказываний путем выполнения некоторых действий (наблюдений, измерений, эксперимента). Например, пусть есть утверждение «Петя старше Вани», установить истинность данного утверждения можно различными способами: посмотреть их свидетельства о рождении, попытаться определить их возраст визуально. Во втором подходе истинность высказывания устанавливается на основе истинности других высказываний с помощью рассуждений, выявляя связи между высказываниями, входящими в рассуждение. Продолжая рассуждать о возрасте детей... Пусть мы имеем два следующих утверждения, истинность которых установлена: «Петя старше Коли», «Коля старше Вани». Тогда можно сделать вывод, что «Петя старше Вани».

- Для краткости «истина» обозначается как И, а «ложь» – Л. Высказывания обозначаются заглавными буквами или цепочкой букв. Например, Козьма Прутков считает:
- P: «Военные люди защищают отечество»;
- Q: «Ветер есть дыхание природы»;
- R: «Новые сапоги всегда жмут».
- Символы P, Q, R и др., которые используются для обозначения элементарных высказываний, называются атомарными формулами или атомами.

- Примеры сложных высказываний от Козьмы Пруtkова:
- «Чиновник умирает, а его ордена остаются на лице земли»;
- «Хочешь быть красивым, поступи в гусары». Примем следующие обозначения:
- M: чиновник умирает;
- L: ордена чиновника остаются на лице земли;
- B: хотеть быть красивым;
- G: поступать в гусары.
- Тогда два последних предложения могут быть записаны в виде формул как
- $M \wedge L, B \rightarrow G$ или правильнее $G \rightarrow B$?

Символизация естественного языка средствами ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- Операция конъюнкции в логике высказываний и союз «и» в повседневной речи употребляются в одном и том же смысле. Однако в обыденной речи не принято соединять союзом «и» два далеких по смыслу предложения (ироничное: «в огороде бузина, а в Киеве дядька»), в то время как в логике высказываний операция конъюнкции соединяет два любых высказывания. Операции конъюнкции соответствуют следующие выражения:
 - А и В;
 - не только А, но и В;
 - В, хотя и А;
 - А, а также В;
 - как А, так и В;
 - А вместе с В.

ИЛИ

- В повседневной речи союз «или» употребляется в двух различных смыслах: исключающем и неисключающем, а операция дизъюнкции всегда употребляется в неисключающем смысле.
- Пример – Чай или кофе? Остаться дома или пойти в университет? (исключающий пример, хотя первый пример может допускать и кофе и чай)

Употребление слов «если ..., то ...»

- в повседневной речи существенно отличается от применения в логике высказываний. В предложении «если А, то В» обыденной речи подразумевается, что В логически следует из А, в то время как в логике высказываний, не рассматривающей смысла предложений, этого не требуется. Кроме того, ложность предложения А в повседневной речи влечет либо ложность В, либо потерю смысла всего предложения «если А, то В». Таким образом, трансляция естественно-языкового предложения в предложение логики высказываний при кажущейся простоте таковой не является.
- Здесь требуется понять смысл предложения, а затем уже конструировать формулы логики высказываний

Операции импликации ($A \rightarrow B$) соответствуют следующие выражения естественного языка:

- В, если А;
- А влечет В;
- А является причиной В;
- В является следствием А;
- в случае А имеет место В;
- коль скоро А, то В;
- В, так как А;
- В, потому что А.
- «Если выглянет солнце, то станет тепло».

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- Если В истинно, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности А. То есть истинное утверждение может быть обосновано с помощью любого утверждения. Пример: утверждение «если дважды два равно пяти, то снег белый» является истинным.
- Если А ложно, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности В. То есть с помощью ложного утверждения можно обосновать всё что угодно. Пример: утверждение «если дважды два равно пяти, то снег красный» является истинным.
- Если А является противоречивым (тождественно ложным) утверждением, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности В. То есть из противоречивого утверждения можно вывести всё что угодно. Пример: утверждение «если дважды два равно четырём и дважды два не равно четырём, то Луна сделана из зелёного сыра» является истинным.
- Если В является тавтологией (то есть утверждением, истинным при любом содержании; такие утверждения выражают логические законы), то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности А. То есть логические законы следуют из любых утверждений. Пример: утверждение «Если снег белый, то дважды два равно четырём или дважды два не равно четырём» является истинным.
- «Если снег красный, то дважды два равно четырём или дважды два не равно четырём» является истинным.

- Эта особенность материальной импликации является прямым следствием двух основных допущений классической логики:
- Всякое утверждение либо истинно, либо ложно, а третьего не дано;
- Истинностное значение сложного утверждения зависит только от истинностных значений входящих в него простых утверждений, а также от характера связи между ними, и не зависит от их содержания.
- В рамках этих двух допущений более удачное построение условных утверждений невозможно.
- Ясно, что материальная импликация плохо выполняет свою функцию обоснования. Подобное положение дел, отстаиваемое классической логикой, получило название «парадоксов материальной импликации».

Операции эквиваленции ($A \leftrightarrow B$) соответствуют следующие выражения естественного языка:

- A , если и только если B ;
- если A , то B , и обратно;
- A , если B , и B , если A ;
- A эквивалентно B ;
- A равносильно B .

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Формулы

Правильно построенные формулы, или просто формулы, в логике высказываний определяются рекурсивно следующим образом:

- атом есть формула;
- если G – формула, то $(\sim G)$ – формула;
- если G и H – формулы, то $(G \vee H)$, $(G \wedge H)$, $(G \rightarrow H)$ и $(G \leftrightarrow H)$ – формулы;
- других формул нет.
- Логическим связкам приписан следующий убывающий ранг:
- $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim$.
- Таким образом, связка с большим рангом имеет большую область действия. Формула $P \leftrightarrow \sim Q \vee R \rightarrow S$ означает $(P \leftrightarrow (((\sim Q) \vee R) \rightarrow S))$.

- Если G , H – две формулы, тогда истинность формул $(\sim G)$, $(G \vee H)$, $(G \wedge H)$, $(G \rightarrow H)$, $(G \leftrightarrow H)$ определяется по истинностным значениям атомов, входящих в эту формулу, по следующей таблице.

G	H	$\sim G$	$G \wedge H$	$G \vee H$	$G \rightarrow H$	$G \leftrightarrow H$
И	И	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	И

Интерпретацией формулы является такое приписывание истинностных значений атомам, входящим в формулу, при котором каждому из них приписано либо И, либо Л, но не оба одновременно. Если формула содержит n различных атомов, то эта формула имеет 2^n интерпретаций.

истинностная таблица для формул $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ и $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow P$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	Л
Л	Л	И	И	И	Л

- Интерпретацию формулы, содержащей атомы $A_1, A_2, \dots, A_n$, удобно представлять в виде
- $I = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$,
- где m_j есть A_j или $\sim A_j$. Если m_j есть A_j , то атому A_j присвоено значение И, в противном случае Л. Например, в интерпретации $\{\sim P, Q\}$ формула $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$ «ложна», а в интерпретации $\{P, \sim Q\}$ эта же формула «истинна».
- Формула, истинная при всех возможных интерпретациях, называется общезначимой формулой, или тавтологией. Формула, ложная при всех возможных интерпретациях, называется противоречивой (или невыполнимой). Общезначимую и противоречивую формулу обозначают обычно «■», «○» соответственно. Формула, которая не является общезначимой или противоречивой, называется необщезначимой, непротиворечивой или выполнимой

- Общезначимость и противоречивость формулы может быть определена с использованием таблицы истинности, но в силу экспоненциального роста размерности числа интерпретаций с ростом числа входящих в формулу атомов такой метод не всегда является приемлемым.
- Такое положение привело к необходимости разработки правил преобразования формул. Преобразования выполняются путем замены в преобразуемой формуле некоторой ее части на подформулу, эквивалентную заменяемой. Две формулы эквивалентны, если их истинностные значения совпадают при всех интерпретациях. Например, формула $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$ эквивалентна формуле P .

- Для ведения преобразований необходимо иметь минимальный запас эквивалентных формул. Ниже приведены десять законов преобразования, здесь F, G и H являются формулами, символ « = » – это знак эквивалентности.

1. $F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$.
2. $F \rightarrow G = \sim F \vee G$.
3. $F \vee G = G \vee F$;
4. $(F \vee G) \vee H = F \vee (G \vee H)$;
5. $F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$;
6. $F \vee 0 = F$;
7. $F \vee F = F$;
8. $F \vee \blacksquare = \blacksquare$;
9. $F \vee \sim F = \blacksquare$;
10. $\sim(\sim F) = F$;
11. $\sim(F \vee G) = \sim F \wedge \sim G$;
12. $F \wedge G = G \wedge F$.
13. $(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H)$.
14. $F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$.
15. $F \wedge \blacksquare = F$.
16. $F \wedge F = F$;
17. $F \wedge 0 = 0$; $F \wedge \sim F = 0$; $\sim(F \wedge G) = \sim F \vee \sim G$.

- Законы преобразования под номером три называются коммутативными законами; законы под номером четыре – ассоциативными законами; законы под номером пять – дистрибутивными законами; семь – закон идемпотентности; девять – законы дополнения; десять – закон двойного отрицания; одиннадцать – законы де Моргана.

ДНФ и КНФ

- В логике высказываний определены две нормальные формы: дизъюнктивная и конъюнктивная. Формула находится в дизъюнктивной нормальной форме, если она имеет следующий вид:
- $F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n$,
- где каждая подформула F_i – это конъюнкция атомов или отрицания атомов. Формула находится в конъюнктивной нормальной форме, если она имеет следующий вид:
- $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n$, где каждая подформула F_i – это дизъюнкция атомов или отрицания атомов.

- Литера – это атом или отрицание атома. Дизъюнкт – это дизъюнкция литер.
- Единичный дизъюнкт – это дизъюнкт, состоящий из одной литеры. Дизъюнкт, не содержащий никаких литер, называется пустым дизъюнктом. Формула, находящаяся в конъюнктивной нормальной форме, может быть представлена как множество входящих в форму дизъюнктов. Например, формула
- $(P \vee Q) \wedge (P \vee R \vee \sim Q) \wedge (\sim Q \vee P) \wedge \sim P$ может быть представлена как множество
- $\{P \vee Q, P \vee R \vee \sim Q, \sim Q \vee P, \sim P\}$.

Вывод в логических моделях нулевого порядка

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть даны формулы $F_1, F_2, \dots, F_n$ и формула G . Формула G есть логическое следствие формул $F_1, F_2, \dots, F_n$, если для всякой интерпретации, в которой формула $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n$ истинна, G также истинна. Формулы $F_1, F_2, \dots, F_n$ называются посылками, G – заключением.
- ТЕОРЕМА 1. Пусть даны формулы $F_1, F_2, \dots, F_n$ и формула G . Тогда G есть логическое следствие формул $F_1, F_2, \dots, F_n$, если формула $((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G)$ общезначима.
- ТЕОРЕМА 2. Пусть даны формулы $F_1, F_2, \dots, F_n$ и формула G . Тогда G есть логическое следствие формул $F_1, F_2, \dots, F_n$, если формула $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \sim G)$ противоречива.

- Таким образом, вопрос о том, какие высказывания представляют собой логические следствия других высказываний, сводится к вопросу о том, какие высказывания общезначимы или противоречивы. Это, в свою очередь, дает возможность превратить ОПРЕДЕЛЕНИЕ и ТЕОРЕМЫ 1 и 2 в рабочий аппарат для логического вывода. Далее приведем восемь способов логического вывода в логике высказываний. В качестве примера рассматриваются следующие формулы: $F1: P$; $F2: R$; $F3: Q \wedge R \rightarrow \sim R$; $G: \sim Q$.

Способ 1 – вычисление истинностного значения. Здесь вывод основан на определении логического следствия и на истинностных таблицах

F1: P; F2: R; F3: $Q \wedge R \rightarrow \sim R$; G: $\sim Q$.

P	R	Q	$Q \wedge R$	$\sim R$	$Q \wedge R \rightarrow \sim R$	$P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R)$	$\sim Q$
И	И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	И	И	Л	И
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	И
Л	Л	И	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И	И	Л	И

Способ таблиц истинности 2. Здесь в качестве аппарата для логического вывода может быть использована ТЕОРЕМА 1 и метод истинностных таблиц.

P	R	Q	$Q \wedge R$	$\sim R$	$Q \wedge R \rightarrow \sim R$	$P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R)$	$\sim Q$	$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \rightarrow G$
И	И	И	И	Л	Л	Л	Л	И
И	И	Л	Л	Л	И	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	Л	Л	И
И	Л	Л	Л	И	И	Л	И	И
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	И	И
Л	Л	И	Л	И	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	И	И	Л	И	И

Из таблицы видно, что формула $P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R) \rightarrow \sim Q$ является общезначимой, значит, формула $\sim Q$ является логическим следствием формул $P, R, Q \wedge R \rightarrow \sim R$.

Способ таблиц истинности 3. В качестве аппарата для логического вывода может быть использована ТЕОРЕМА 2 и метод истинностных таблиц.

P	R	Q	$Q \wedge R$	$\sim R$	$Q \wedge R \rightarrow \sim R$	$P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R)$	$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \sim G$
И	И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	И	Л
И	Л	И	Л	И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И	И	Л	Л

Из таблицы видно, что формула $P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R) \wedge \sim Q$ является противоречивой, значит, формула $\sim Q$ является логическим следствием формул $P, R, Q \wedge R \rightarrow \sim R$.

Способ 4 – алгебраический. Здесь в качестве аппарата для логического вывода используется ТЕОРЕМА 1, а для доказательства общезначимости формулы – одиннадцать законов эквивалентных преобразований.

$$P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R) \rightarrow \sim Q =$$

$$\sim(P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R)) \vee \sim Q = \quad F \rightarrow G = \sim F \vee G.$$

$$= \sim(P \wedge R \wedge (\sim(Q \wedge R) \vee \sim R)) \vee \sim Q = \quad \sim(F \wedge G) = \sim F \vee \sim G.$$

$$\sim(F \vee G) = \sim F \wedge \sim G;$$

$$= \sim P \vee \sim R \vee (Q \wedge R \wedge R) \vee \sim Q =$$

$$= \sim P \vee \sim R \vee (Q \wedge R) \vee \sim Q =$$

$$F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H);$$

$$= \sim P \vee \sim R \vee (Q \wedge \sim Q) \vee (R \vee \sim Q) =$$

$$= \sim P \vee \sim R \vee R \vee \sim Q =$$

$$= \sim P \vee \blacksquare \vee \sim Q = \blacksquare.$$

также алгебраический, только здесь использована
ТЕОРЕМА 2, а для доказательства противоречивости формулы –
десять законов эквивалентных преобразований.

- $P \wedge R \wedge ((Q \wedge R) \rightarrow \sim R) \wedge Q =$
- $= P \wedge R \wedge (\sim(Q \wedge R) \vee \sim R) \wedge Q =$
- $= P \wedge R \wedge (\sim Q \vee \sim R \vee \sim R) \wedge Q =$
 - $= P \wedge R \wedge (\sim Q \vee \sim R) \wedge Q =$
- $= P \wedge R \wedge ((\sim Q \wedge Q) \vee (\sim R \wedge \sim Q)) =$
 - $= P \wedge R \wedge \sim R \wedge \sim Q =$
 - $= P \wedge 0 \wedge \sim Q = 0$

Способ 6 – алгоритм редукции. Этот способ позволяет доказывать общезначимость формул приведением их к абсурду. Этот способ удобен, когда формула содержит много импликаций.

- Пусть посылка $(P \wedge Q) \rightarrow R$, а заключение $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$, тогда заключение является логическим следствием посылки, если формула $((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ является общезначимой.
Предположим, что в некоторой интерпретации эта формула ложна. Это возможно только тогда, когда формула $(P \wedge Q) \rightarrow R$ истинна, а формула $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ ложна. Формула $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ ложна только тогда, когда $P = И$, $Q = И$, $R = Л$, что противоречит предположению $(P \wedge Q) \rightarrow R = И$, следовательно, формула $((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ является общезначимой.

Способ 7– алгоритм Девиса и Патнема. Данный алгоритм основан на использовании конъюнктивной нормальной формы, представленной как множество дизъюнктов S . Алгоритм состоит из четырех правил.

- 1. Правило тавтологии. Из множества дизъюнктов S вычеркиваются все тавтологичные дизъюнкты.
- 2. Правило однолитерных дизъюнктов. Если в множестве S есть единичный дизъюнкт C , то, вычеркнув из множества S дизъюнкт C , получим множество S' . Если S' пусто, то S выполнимо; иначе, вычеркнув из множества S' дизъюнкт $\sim C$, получим множество S'' . Множество S невыполнимо, когда невыполнимо S'' . Если $\sim C$ является единичным дизъюнктом, то при его вычеркивании он превращается в противоречивую формулу
- 3. Правило чистых литер. Литера L в дизъюнкте из S называется чистой, если $\sim L$ не появляется ни в каком дизъюнкте из S . Если литера L чистая в S , то, вычеркнув из множества S все дизъюнкты, содержащие L , получим множество S' . Множество S невыполнимо, когда невыполнимо S' .
- 4. Правило расщепления. Если множество дизъюнктов S может быть представлено следующим образом:
$$(A_1 \vee L) \wedge \dots \wedge (A_n \vee L) \wedge (B_1 \vee \sim L) \wedge \dots \wedge (B_m \vee \sim L) \wedge R,$$
где A_i, B_j, R не содержат литер L и $\sim L$, то получим два множества расщепления $S' = A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge R$ и $S'' = B_1 \wedge \dots \wedge B_m \wedge R$. Множество S невыполнимо, когда невыполнимы множества S' и S'' .

- Используя алгоритм Девиса и Патнема, покажем, что формула $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\sim Q \vee \sim R) \wedge \sim P \wedge U$ невыполнима.
- $S = \{ P \vee Q, P \vee R, \sim Q \vee \sim R, \sim P, U \}$;
- правило 2, единичный дизъюнкт $C = \sim P$;
- $\{ Q, R, \sim Q \vee \sim R, U \}$

правило 2, единичный дизъюнкт $C = Q$;

$\{ R, \sim R, U \}$

правило 2, единичный дизъюнкт $C = R$.

- $\{ O, U \}$

Так как множество содержит невыполнимый дизъюнкт, то оно невыполнимо.

- Задача о влюбленном логике
- Перед нами три девушки: Сью, Марция и Диана. Предположим, что юноша, занимающийся математической логикой, высказывает следующее.
 - Я люблю, по крайней мере, одну из этих трех девушек.
 - Если я люблю Сью, а не Диану, то я также люблю Марцию.
 - Я либо люблю Диану и Марцию, либо не люблю ни одну из них.
 - Если я люблю Диану, то я также люблю Сью.
- Требуется определить, любит ли автор высказываний Диану?
- Запишем формулами четыре высказывания и предполагаемое следствие:
 - $F1: C \vee M \vee D$
 - $F2: C \ \& \ \sim D \Rightarrow M$
 - $F3: D \ \& \ M \vee \sim D \ \& \ \sim M$
 - $F4: D \Rightarrow C$
 - $G: D$
- Формулу, построенную согласно теореме 2 о логическом следствии:
 - $(C \vee M \vee D) \ \& \ (C \ \& \ \sim D \Rightarrow M) \ \& \ (D \ \& \ M \vee \sim D \ \& \ \sim M) \ \& \ (D \Rightarrow C) \ \& \ \sim D$
 - приведем к КНФ и получим интересующее нас множество дизъюнктов:
 - $S = \{C \vee M \vee D, \sim C \vee M \vee D, M \vee \sim D, \sim M \vee D, \sim D \vee C, \sim D\}.$

$$S = \{C \vee M \vee D, \sim C \vee M \vee D, M \vee \sim D, \sim M \vee D, \sim D \vee C, \sim D\}.$$

- **Вычеркиваем одиночный дизъюнкт $\sim D$**
(правило 2)

$$S'' = \{C \vee M, \sim C \vee M, M, \sim M, C\}.$$

- Вычеркиваем одиночный дизъюнкт C (правило 2)

$$S'' = \{M, M, M, \sim M\}.$$

- Получаем невыполнимое множество S'' , значит по второй теореме логики любит Диану

Способ 8 – метод резолюций.

Данный метод является обобщением правила однолитерных дизъюнктов Девиса и Патнема и также основан на использовании конъюнктивной нормальной формы, представленной как множество дизъюнктов S . Обобщение правила связано с тем, что оно применяется к любой паре дизъюнктов, не обязательно единичных.

Правило резолюций и формулируется следующим образом:

- Если в дизъюнкте $C1$ существует литера L , а в дизъюнкте $C2$ существует литера $\sim L$, то, вычеркнув литеры L и $\sim L$ из $C1$ и $C2$, соответственно, построим дизъюнкцию оставшихся дизъюнктов, которая называется резольвентой дизъюнктов $C1$ и $C2$.
- Рассмотрим, например, дизъюнкты $C1: P \vee Q$, $C2: \sim Q \vee \sim R \vee U$, резольвентой дизъюнктов $C1$ и $C2$ будет следующий дизъюнкт: $P \vee \sim R \vee U$.
- Основное свойство резольвенты. Любая резольвента дизъюнктов $C1$ и $C2$ является логическим следствием дизъюнктов $C1$ и $C2$. Для невыполнимого множества дизъюнктов применением метода резолюций можно получить пустой дизъюнкт

- Метод резолюций основан на проверке того, содержит ли исходное множество дизъюнктов пустой дизъюнкт: если множество содержит пустой дизъюнкт, то это множество невыполнимо, в противном случае проверяется, можно ли получить пустой дизъюнкт из исходного множества. Такой процесс проверки называется выводом. Выводом из конечного множества дизъюнктов S называется конечная последовательность $C_1, C_2, \dots, C_n$ дизъюнктов, всякий элемент C_i которой или принадлежит множеству S , или является резольвентой дизъюнктов, предшествующих данному элементу C_i . Вывод пустого дизъюнкта из S называется опровержением или доказательством невыполнимости S .

Основа метода

- $(\sim C \text{ or } K) \text{ and } (C \text{ or } P)$

Если $C = 1$

то K

Если $C=0$

то P

Фактически нужно проверить $P \text{ or } K$

- Используя метод резолюций, проведем вывод и покажем, что формула $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\sim Q \vee \sim R) \wedge \sim P \wedge U$ невыполнима. Запишем множество дизъюнктов $S = \{ P \vee Q, P \vee R, \sim Q \vee \sim R, \sim P, U \}$ следующим образом:
 - 1) $P \vee Q$;
 - 2) $P \vee R$;
 - 3) $\sim Q \vee \sim R$;
 - 4) $\sim P$;
 - 5) U ;
 - 6) из п.п. 2, 3 получим резольвенту $P \vee \sim Q$;
 - 7) из п.п. 1, 6 получим резольвенту P ;
 - 8) из п.п. 4, 7 получим резольвенту $\emptyset$.
- Так как есть логическое следствие множества дизъюнктов S , то S невыполнимо.

- Доказать невыполнимость конечного множества дизъюнктов S можно с помощью следующего алгоритма.
- Шаг 1. Если множество S содержит пустой дизъюнкт, то останов с сообщением «Множество невыполнимо».
- Шаг 2. Если возможно найти резольвенту, то вычислить резольвенту R , иначе останов с сообщением «Множество выполнимо».
- Шаг 3. $S := S \cup \{ R \}$. Перейти на шаг 1.
- Приведенный алгоритм – недетерминированный, на шаге 2 возможно вычисление различных резольвент, некоторые резольвенты могут оказаться ненужными и вычисляться несколько раз, а алгоритм без надлежащих проверок может зациклиться.

- Алгоритмы доказательства выводимости $A \rightarrow B$, построенные на основе этого метода, применяются во многих системах искусственного интеллекта, а также являются фундаментом, на котором построен язык логического программирования «Пролог».

- «Яблоко красное и ароматное.»
- «Если яблоко красное, то яблоко вкусное.»
- Докажем утверждение «яблоко вкусное». Введем множество формул, описывающих простые высказывания, соответствующие вышеприведенным утверждениям. Пусть
 - X_1 — «Яблоко красное»,
 - X_2 — «Яблоко ароматное»,
 - X_3 — «Яблоко вкусное».
- Тогда сами утверждения можно записать в виде сложных формул:
 - $X_1 \wedge X_2$ — «Яблоко красное и ароматное.»
 - $X_1 \rightarrow X_3$ — «Если яблоко красное, то яблоко вкусное.»
- Тогда утверждение, которое надо доказать, выражается формулой X_3 .
- Итак, докажем, что X_3 является логическим следствием
- $(X_1 \wedge X_2)$ и $(X_1 \rightarrow X_3)$.

- Если возможно описать задачу в терминах логики высказываний, то, применив любой из указанных восьми способов вывода, можно, доказав противоречивость или общезначимость формулы, решить поставленную задачу.

