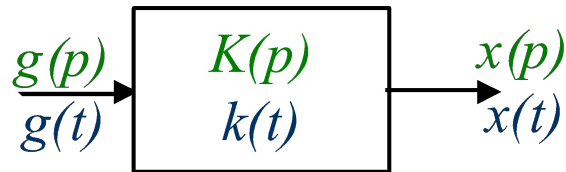


УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Понятие устойчивости

Для того, чтобы замкнутая САР была работоспособной, она должна быть устойчивой.

Пусть имеется система автоматического регулирования:



Определение.

Устойчивой является САР, реакция которой на ограниченное воздействие является также ограниченной величиной.

Математически это означает, что реакция САР на воздействие $g(t)$ (при $|g(t)| \leq M$ для всех $t \geq 0$, где M – конечное число) описывается выражением

$$x(t) = \int_0^t k(\tau) g(t - \tau) d\tau \leq M \int_0^t k(\tau) d\tau \leq M \int_0^\infty k(\tau) d\tau \leq M \int_0^\infty |k(\tau)| d\tau = Mc$$

где $c = \int_0^\infty k(\tau) d\tau < \infty$ – конечное число

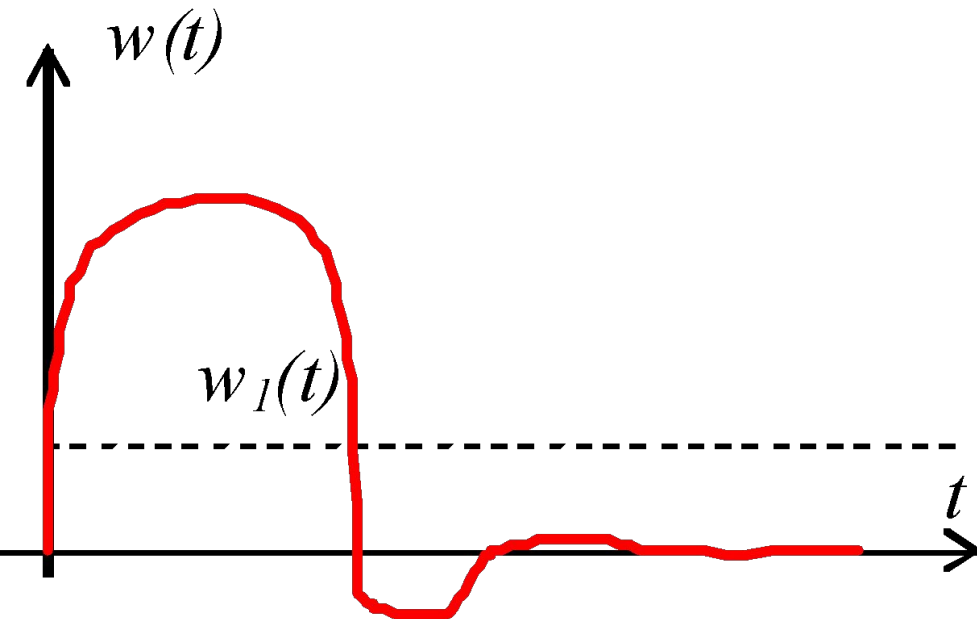
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Понятие устойчивости

Учитывая связь весовой и передаточных функций, можно определить признак 1 устойчивой системы:

Для того, чтобы САР была *устойчивой*, импульсная переходная (весовая) характеристика должна быть *абсолютно интегрируемой*.

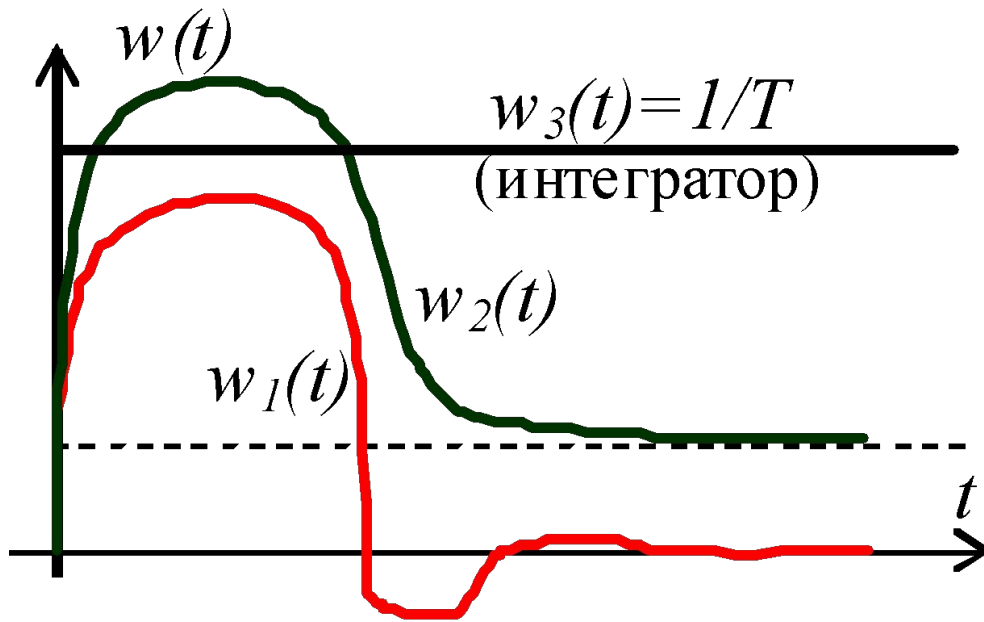
Другими словами, **если абсолютная площадь, ограниченная импульсной характеристикой $w(t)$, является ограниченной величиной, то САР устойчива.**



Например, САР с импульсной переходной характеристикой $w_1(t)$ является устойчивой, поскольку при $t \rightarrow \infty$ имеет место $w_1(t) \rightarrow 0$, и площадь, ограниченная импульсной характеристикой $w_1(t)$, является ограниченной величиной (интеграл конечный).

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Понятие устойчивости



САР с импульсной характеристикой $w_2(t)$ является неустойчивой, поскольку при $t \rightarrow \infty$ имеет место $w_2(t) \rightarrow const$, и интеграл является бесконечным.

В этом плане интегратор как элемент устойчивым назвать нельзя: его импульсная характеристика $w_3(t)$ ограничивает бесконечно большую площадь. Интегратор часто называют нейтральным звеном.

Площадь, ограниченная импульсной характеристикой, будет конечной, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

В этом случае система будет приходить в состояние равновесия: $h(t) \rightarrow const$

На основании изложенного можно определить признак 2 устойчивой системы:

Устойчивой является та система, которая, будучи выведенной из состояния равновесия, возвращается в исходное состояние после исчезновения воздействия, выведшего систему из состояния равновесия.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраическая трактовка устойчивости

Задача.

Определить алгебраическое условие, при котором

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

Решение.

Запишем выражение для $w(t)$, учитывая связь между весовой функцией и п. ф., используя теорему разложения и считая, что все полюсы п.ф. простые, причем нулевые полюсы отсутствуют.

$$w(t) = L^{-1}[K(p)] = \sum_{v=1}^n \frac{H(p_v)}{G'(p_v)} e^{p_v t} = \sum_{v=1}^n c_v e^{p_v t}$$

где $v = 1, 2, \dots, n$ – порядковые номера полюсов ПФ $K(p)$.

В общем случае полюсы – комплексные числа: $p_v = \alpha_v \pm j\beta_v$

Тогда

$$w(t) = \sum_{v=1}^n c_v e^{\alpha_v t} e^{\pm j\beta_v t}$$

где $e^{\pm j\beta_v t} = \cos \beta_v t \pm j \sin \beta_v t \leq 1$ – ограниченная величина.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраическая трактовка устойчивости

Решение.

$$w(t) = \sum_{v=1}^n c_v e^{\alpha_v t} e^{\pm j\beta_v t}$$

Из последнего выражения видно, что САР будет устойчивой, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

если вещественные части α_v всех полюсов будут отрицательными ($\alpha_v < 0$).

Если же хотя бы один полюс (пусть i -й) имеет положительную вещественную часть ($\alpha_i > 0$), то САР будет неустойчивой, поскольку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \infty$$

– в системе будет иметь место расходящийся процесс.

Если хотя бы один полюс чисто мнимый ($\alpha_i = 0$), то САР будет нейтральной (не устойчивой), поскольку

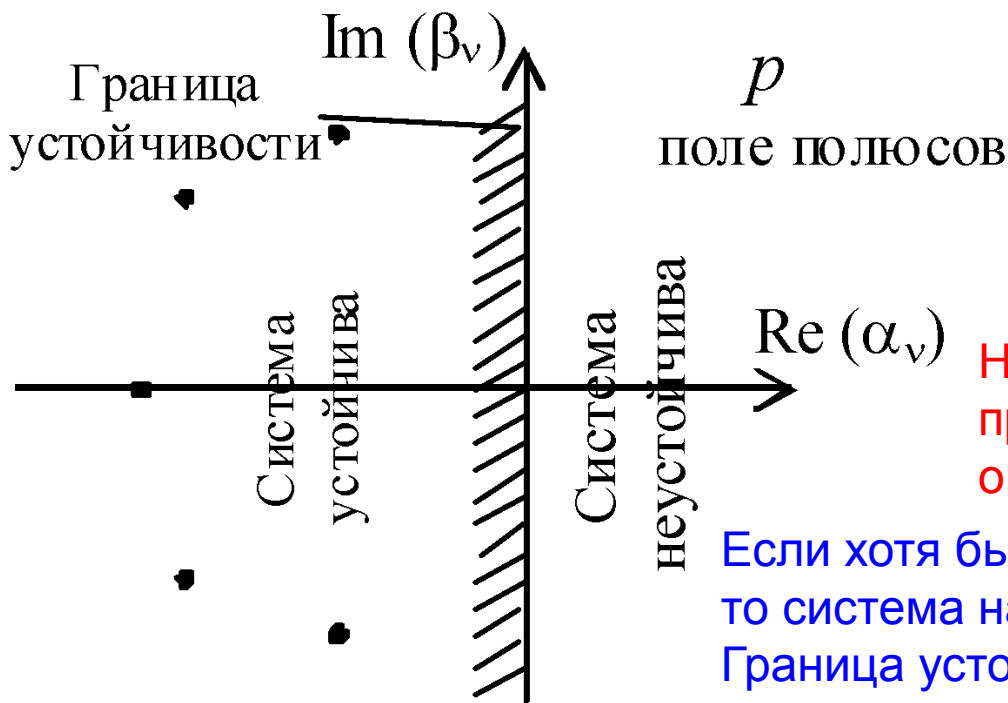
$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_i e^{\pm j\beta_i t} > 0$$

и в системе будут иметь место незатухающие автоколебания.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Геометрическая трактовка устойчивости

Полюсы ПФ замкнутой системы можно изобразить на комплексной плоскости.



Для того, чтобы САР была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все полюсы ПФ замкнутой системы находились в левой полуплоскости комплексного переменного p

Наличие хотя бы одного полюса в правой полуплоскости свидетельствует о том, что система *неустойчива*.

Если хотя бы один полюс находится на мнимой оси, то система находится на *границе устойчивости*. Граница устойчивости обозначается штриховкой в сторону области устойчивости.

Для сложных САР вычисление полюсов для установления их устойчивости или неустойчивости может представлять весьма сложную задачу. Поэтому известно большое количество так называемых *критериев устойчивости*, основанных на использовании определенных математических закономерностей в характеристиках устойчивых систем.

Различают алгебраические и частотные критерии устойчивости.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

(Hurwitz, 1895)

Предварительные замечания

Все известные алгебраические критерии (Гурвица, Льенара-Шипара, Рауса) основаны на выявлении требуемых алгебраических соотношений между коэффициентами характеристического полинома, гарантирующих отсутствие его правых корней.

Пусть имеется характеристический полином замкнутой САР

$$G(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

где n – порядок САР.

Из коэффициентов х.п. может быть составлена матрица Гурвица (квадратная порядка n)



На главной диагонали выписываются элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$. Затем при движении от этих элементов вверх записываются коэффициенты в порядке возрастания индексов, при движении вниз – в порядке убывания. Недостающие элементы заполняются нулями.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Формулировка критерия

Для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ все определители Гурвица были бы положительны:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{и т.д., включая} \quad \Delta_n > 0$$

Примечания.

1. Определители Гурвица составляются по матрице Гурвица
2. Количество определителей равно порядку САР.
3. Последний определитель может быть вычислен более просто:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$$

4. Если $a_0 < 0$, то предварительно необходимо $G(p)$ умножить на -1 .

$$G = \begin{matrix} & \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \dots & \Delta_n \\ \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \boxtimes & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \boxtimes & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \boxtimes & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & a_n \end{bmatrix} \end{matrix}$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Частный случай 1. $n=1$

$$G(p) = a_0 p + a_1$$

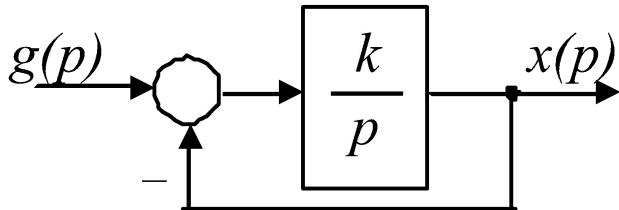
Определитель Гурвица $\Delta_n = \Delta_1 = a_1$

Условия устойчивости согласно критерия:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0$$

(при этом полюс п.ф. $p_1 = -a_0/a_1$ будет отрицательным.)

Пример 1. Определить условия устойчивости САР ($n=1$) по критерию Гурвица.



Решение.

ПФ замкнутой САР

$$K(p) = \frac{k/p}{1 + k/p} = \frac{k}{p + k}$$

Характеристический полином: $G(p) = p + k$

Условие устойчивости $k > 0$

(Т.е. данная САР будет устойчива при любом положительном k , даже при $k \rightarrow \infty$)

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Частный случай 2. $n=2$

$$G(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$$

Определители Гурвица

$$\Delta_n = \Delta_1 = a_1 ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2$$

Условия устойчивости согласно критерия:

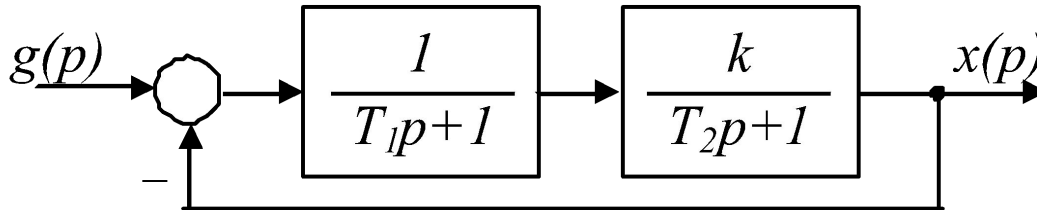
$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_1 a_2 > 0$$

Таким образом, для САР 2-го порядка, как и для САР 1-го порядка, необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность всех коэффициентов $G(p)$.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пример 2. Определить условия устойчивости САР ($n=2$) по критерию Гурвица



Решение.

П.ф. замкнутой САР

$$K(p) = \frac{\frac{1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{k}{T_2 p + 1}}{1 + \frac{1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{k}{T_2 p + 1}} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k}$$

Характеристический полином:

$$G(p) = T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1 + k$$

Условия устойчивости

$$k > -1, \quad T_1 > 0, \quad T_2 > 0$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Частный случай 3. $n=3$

$$G(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$$

Определители Гурвица

$$\Delta_n = \Delta_1 = a_1 ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2$$

Условия устойчивости согласно критерия могут быть получены после простых преобразований:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Таким образом, для устойчивости САР 3-го порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического полинома $G(p)$ были положительны, и произведение средних коэффициентов было больше произведения крайних.

Следствие 1 из критерия Гурвица.

Для системы любого порядка положительность коэффициентов х.п. является необходимым, но не достаточным условием устойчивости.

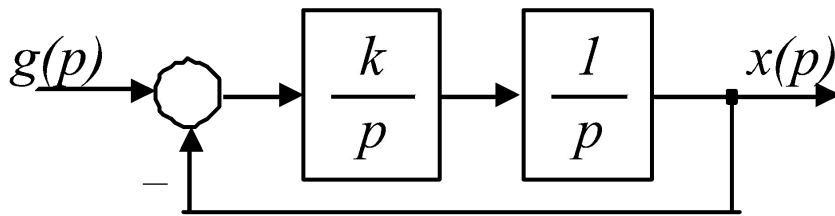
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Следствие 2 из критерия Гурвица.

Пропуск хотя бы одного члена полинома (равенство соответствующего коэффициента нулю) говорит о том, что САР не устойчива (возможно, на границе устойчивости).

Пример 3. Определить условия устойчивости САР по критерию Гурвица.



Решение. П.ф. замкнутой САР

$$K(p) = \frac{\frac{k}{p} \cdot \frac{1}{p}}{1 + \frac{k}{p} \cdot \frac{1}{p}} = \frac{k}{p^2 + k}$$

Характеристический полином: $G(p) = p^2 + k$

Определители Гурвица в этом случае равны нулю и критерий не выполняется.

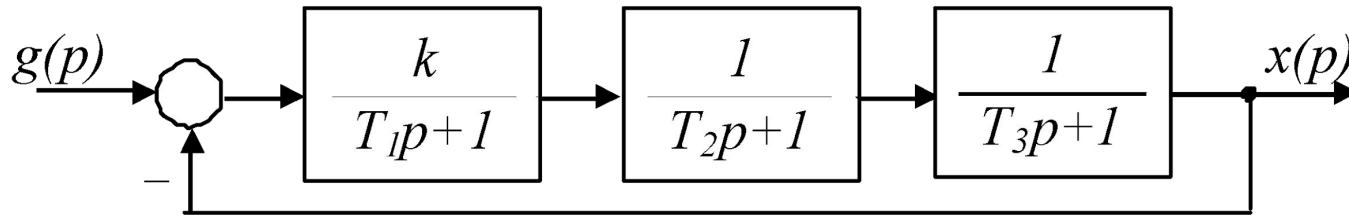
Такое звено является частным случаем колебательного звена при $\xi=0$ и называется *консервативным*, используется для формирования гармонических сигналов, поскольку ее переходной функцией есть незатухающие автоколебания (звено на границе устойчивости).

Рассмотренная САР (пример 3) называется структурно неустойчивой, поскольку невозможно добиться ее устойчивости только путем изменения ее параметров.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пример 4. Определить условия устойчивости САР ($n=3$) по критерию Гурвица



Решение.

П.ф. замкнутой САР

$$K(p) = \frac{\frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}}{1 + \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k}$$

Характеристический полином:

$$G(p) = T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + 1 + k$$

Условия устойчивости

$$k > -1, \quad T_1 > 0, \quad T_2 > 0, \quad T_3 > 0$$
$$(T_1 + T_2 + T_3)(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3) > (1 + k) T_1 T_2 T_3$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пример 4. Условия устойчивости

$$k > -1, \quad T_1 > 0, \quad T_2 > 0, \quad T_3 > 0$$

$$(T_1 + T_2 + T_3)(T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3) > (1 + k)T_1T_2T_3$$

Частный случай: Если $T_1 = T_2 = T_3 = T > 0$, то из последнего условия устойчивости следует:

- что система будет устойчива при $k < 8$, независимо от величин постоянных времени;
- при $k = k_{\text{гр}} = 8$ САР будет находиться на границе устойчивости;
- при большем значении коэффициента ($k > 8$) САР будет неустойчива.

Для того, чтобы повысить коэффициент усиления разомкнутой системы, сохраняя устойчивость САР, следует постоянные времени раздвинуть в значениях. Иначе говоря, граничный коэффициент усиления $k_{\text{гр}}$ больше зависит от соотношения постоянных времени, нежели от их величины.

Например, если $T_1 = 1$, $T_2 = 1$, $T_3 = 0,1$. Из последнего условия устойчивости можно получить, что

$$k_{\text{гр}} = 45,2$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Позволяют судить об устойчивости САР по виду ее частотной характеристики (АФЧХ). Наиболее распространенные – критерии Михайлова, Найквиста.

Все частотные критерии устойчивости базируются на принципе аргумента.

Принцип аргумента

Рассмотрим полином с действительными коэффициентами

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

имеющий n нулей, среди которых m являются правыми (имеют положительную вещественную часть), а остальные $n-m$ – левыми.

Теорема. Приращение аргумента вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ равно разности между числом левых и правых нулей полинома $D(p)$, умноженной на π , т.е.

$$\Delta \text{Arg}[D(j\omega)]_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = (n - 2m)\pi$$

где n – общее число нулей; m – число правых нулей.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Принцип аргумента

Доказательство. Разложим полином $D(p)$ на множители:

$$D(p) = a_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$$

и выполним подстановку $p = j\omega$:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)$$

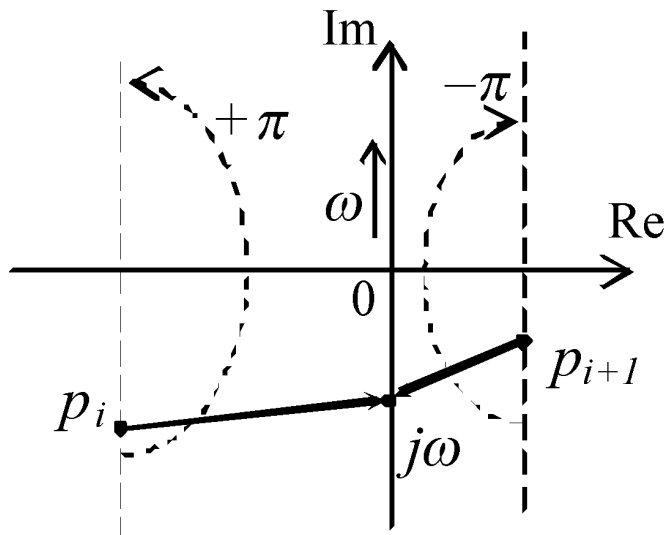
Модуль этого вектора равен:

$$|D(j\omega)| = a_0 |j\omega - p_1| |j\omega - p_2| \dots |j\omega - p_n|$$

а аргумент –

$$\text{Arg}[D(j\omega)] = \text{Arg}[j\omega - p_1] + \text{Arg}[j\omega - p_2] + \dots + \text{Arg}[j\omega - p_n]$$

(*)

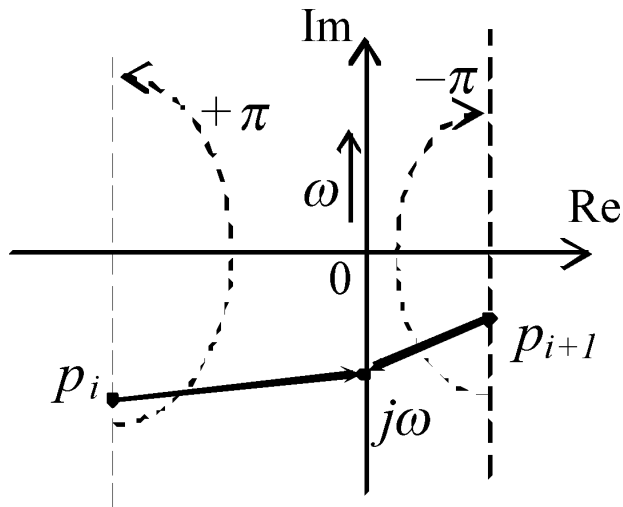


Каждый из элементарных векторов $j\omega - p_i$ может быть изображен на комплексной плоскости в виде стрелки, выходящей из точки p_i и приходящей в точку $j\omega$.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Принцип аргумента



Положительным направлением вращения есть вращение против часовой стрелки.

Изменяя ω от $-\infty$ до $+\infty$, точка $j\omega$ будет перемещаться вверх по мнимой оси, а аргумент вектора $j\omega - p_i$ соответствующего левому нулю, изменится от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, т.е. на $+\pi$.

Аналогично, при этом аргумент вектора $j\omega - p_{i+1}$, соответствующего правому нулю, изменится от $3\pi/2$ до $\pi/2$, т.е. на $-\pi$.

Учитывая количество левых и правых нулей, из (*) получим:

$$\Delta \text{Arg}[D(j\omega)]_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = m \cdot (-\pi) + (n - m) \cdot \pi = (n - 2m)\pi$$

Теорема доказана.

Следствие. Обычно рассматривают только положительные частоты, т.е. ω изменяется от 0 до $+\infty$. В этом случае приращение аргумента будет вдвое меньше и равно

$$\Delta \text{Arg}[D(j\omega)]_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = (n - 2m) \frac{\pi}{2}$$

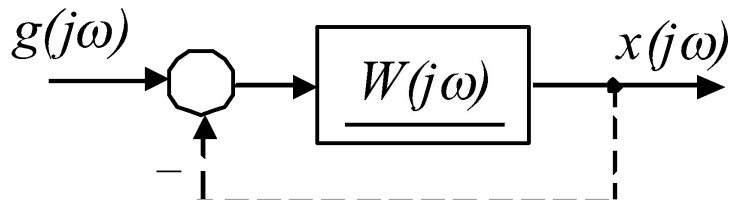
Доказательство выполняется отдельно для действительных и комплексных нулей с учетом того, что последние в общем случае образуют комплексно-сопряженные пары.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста (Nyqvist, 1932)

Предварительные замечания



П.ф. разомкнутой САР

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$$

Пусть система в разомкнутом состоянии является неустойчивой.

m – порядок неустойчивости разомкнутой САР, равный числу правых полюсов п.ф. разомкнутой системы (если ***m*** = 0, то САР в разомкнутом состоянии устойчива, или, по крайней мере, на границе устойчивости).

Вводится вспомогательная функция:

$$\varphi(p) = 1 + W(p) = 1 + \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{R(p) + Q(p)}{Q(p)} = \frac{G(p)}{Q(p)}$$

где $Q(p)$ – характеристический полином разомкнутой САР;

$G(p) = R(p) + Q(p)$ – характеристический полином замкнутой САР.

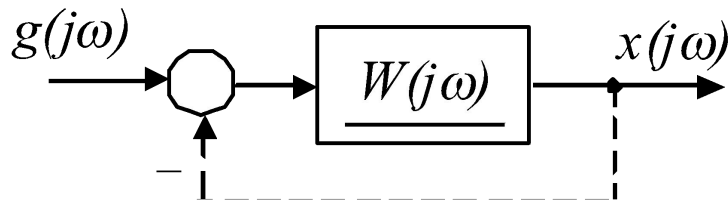
Пусть характеристическое уравнение замкнутой САР $G(p) = 0$ имеет ***l*** правых корней.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Предварительные замечания



Тогда на основании принципа аргумента изменение угла поворота вектора $\phi(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до $+\infty$ *будет равно:*

$$\Delta \text{Arg}[\phi(j\omega)]_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \Delta \text{Arg}[G(j\omega)] - \Delta \text{Arg}[Q(j\omega)] = (n - 2l)\frac{\pi}{2} - (n - 2m)\frac{\pi}{2} = (m - l)\pi$$

Для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы все нули ее характеристического полинома были левыми, т.е. $l=0$. Тогда

$$\Delta \text{Arg}[\phi(j\omega)]_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = m\pi = 2\pi \frac{m}{2}$$

Таким образом, если разомкнутая САР неустойчива и имеет ***m*** правых корней, то замкнутая САР будет устойчива тогда и только тогда, когда годограф вспомогательной функции $\phi(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ при изменении частоты ω от нуля до $+\infty$ охватывает начало координат в положительном направлении ***m/2*** раз.

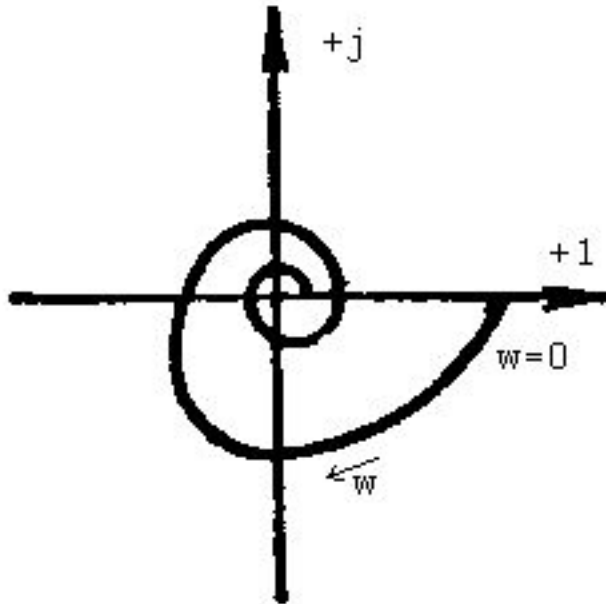
Легко заметить, что число оборотов вектора $\phi(j\omega)$ вокруг начала координат равно числу оборотов вектора $W(j\omega)$ вокруг точки с координатами $(-1; j0)$. Отсюда вытекает *общая формулировка критерия Найквиста*.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Общая формулировка критерия



Теорема (Критерий)

Для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы частотная характеристика разомкнутой САР с порядком неустойчивости m при изменении частоты ω от нуля до $+\infty$ охватывала точку с координатами $(-1; j0)$ в положительном направлении (при возрастании частоты) $m/2$ раз.

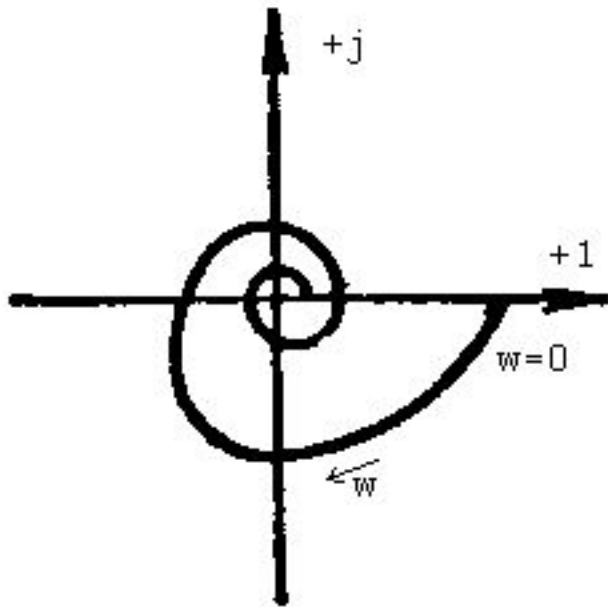
Таким образом, об устойчивости замкнутой САР можно судить, проанализировав частотную характеристику системы в разомкнутом состоянии.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Общая формулировка критерия



Для САР электромеханических объектов наиболее распространен случай, когда в разомкнутом состоянии система устойчива, или, по крайней мере находится на границе устойчивости, т.е. $m=0$

Частная формулировка для случая $m=0$

Если САР в разомкнутом состоянии устойчива или находится на границе устойчивости ($m = 0$), то для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы частотная характеристика разомкнутой САР при изменении частоты ω от нуля до $+\infty$ не охватывала бы точку с координатами $(-1; j0)$.

Если ЧХ разомкнутой САР охватывает точку с координатами $(-1; j0)$ – система в замкнутом состоянии будет неустойчивой.

Если ЧХ разомкнутой САР проходит через точку с координатами $(-1; j0)$ – замкнутая система будет находиться на границе устойчивости.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

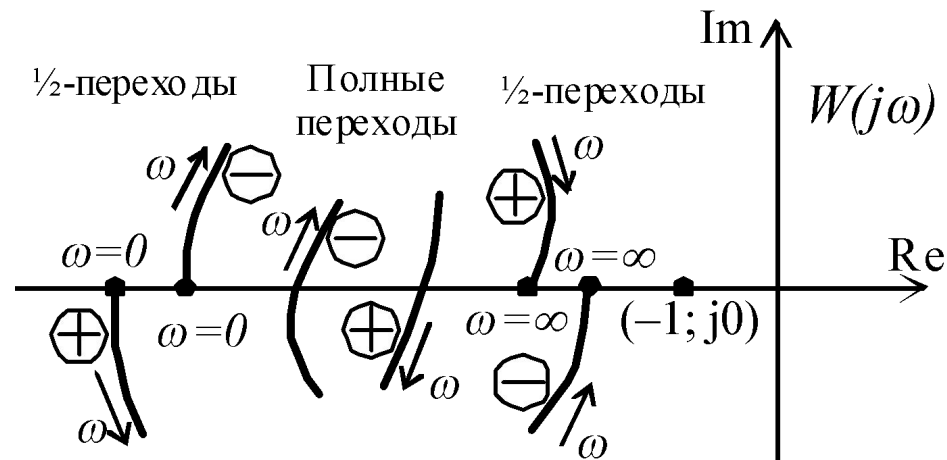
Критерий устойчивости Найквиста

Правило переходов

Удобно при сложной форме частотной характеристики $W(j\omega)$, когда бывает затруднительно определить число оборотов годографа вокруг критической точки $(-1; j0)$.

Положительным считается переход частотной характеристики $W(j\omega)$ через вещественную ось левее точки с координатами $(-1; j0)$ при возрастании частоты ω по направлению сверху вниз

Отрицательным считается аналогичный переход, но по направлению снизу вверх



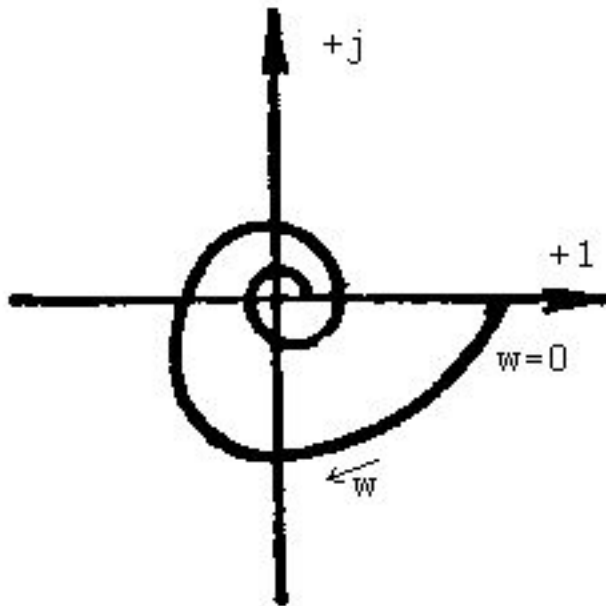
Если частотная характеристика начинается или заканчивается на действительной оси левее точки с координатами $(-1; j0)$, то говорят о $1/2$ -переходе

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Правило переходов



Формулировка критерия, основанная на понятии переходов

Для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов частотной характеристики левее точки с координатами $(-1; j0)$ при изменении частоты ω от нуля до $+\infty$ была равна половине порядка неустойчивости разомкнутой САР, т.е. $m/2$.

Частный случай

Если САР в разомкнутом состоянии устойчива или находится на границе устойчивости ($m = 0$), то для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы количество отрицательных переходов (...) равнялось бы количеству положительных.

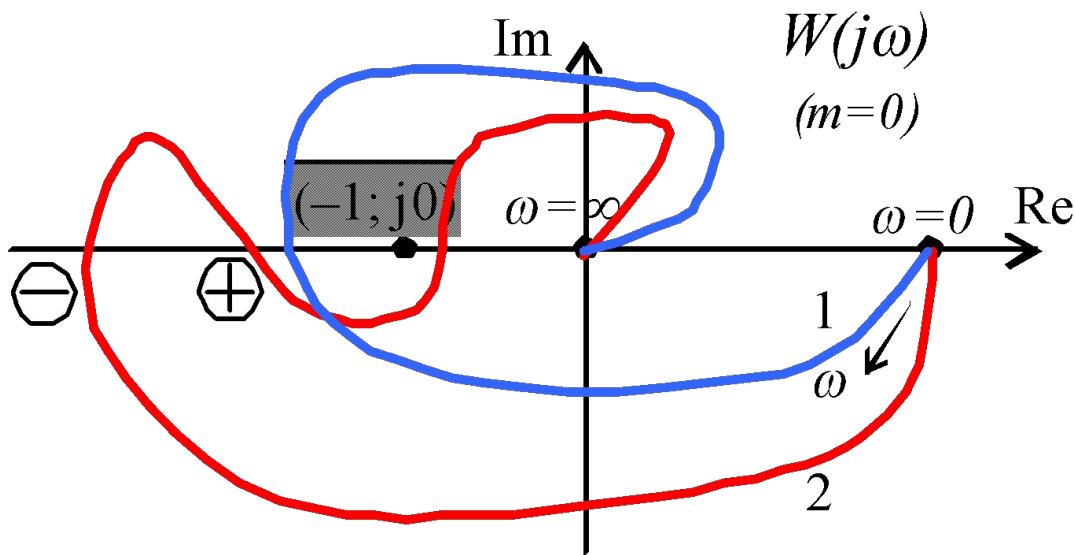
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Правило переходов

Пример. В разомкнутом состоянии САР устойчива ($m = 0$)



Замкнутая САР, имеющая в разомкнутом состоянии частотную характеристику 1, является неустойчивой, поскольку $W(j\omega)$ охватывает точку с координатами $(-1; j0)$ при движении в направлении возрастания частоты ω (имеет место отрицательный переход при отсутствии положительных).

Замкнутая САР, имеющая в разомкнутом состоянии частотную характеристику 2, устойчива, поскольку не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$ (имеет место один отрицательный переход и один положительный).

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Устойчивость астатических систем

Пусть имеется астатическая система ν -го порядка по управлению, имеющая в разомкнутом состоянии передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{k_v}{p^\nu} \bar{W}(p)$$

где $\bar{W}(p)$ – нормированная ПФ разомкнутой САР.

Частотная характеристика разомкнутой астатической САР

$$W(j\omega) = \frac{k_v}{(j\omega)^\nu} \bar{W}(j\omega) = \frac{k_v}{\omega^\nu} e^{-j\frac{\pi}{2}\nu} \bar{W}(j\omega)$$

Из последнего выражения видно, что характеристика стремится к нулю при $\omega \rightarrow +\infty$ (т.е. ЧХ заканчивается в начале координат), но при $\omega \rightarrow 0$ будет стремиться к бесконечности при угле $-\nu\pi/2$.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

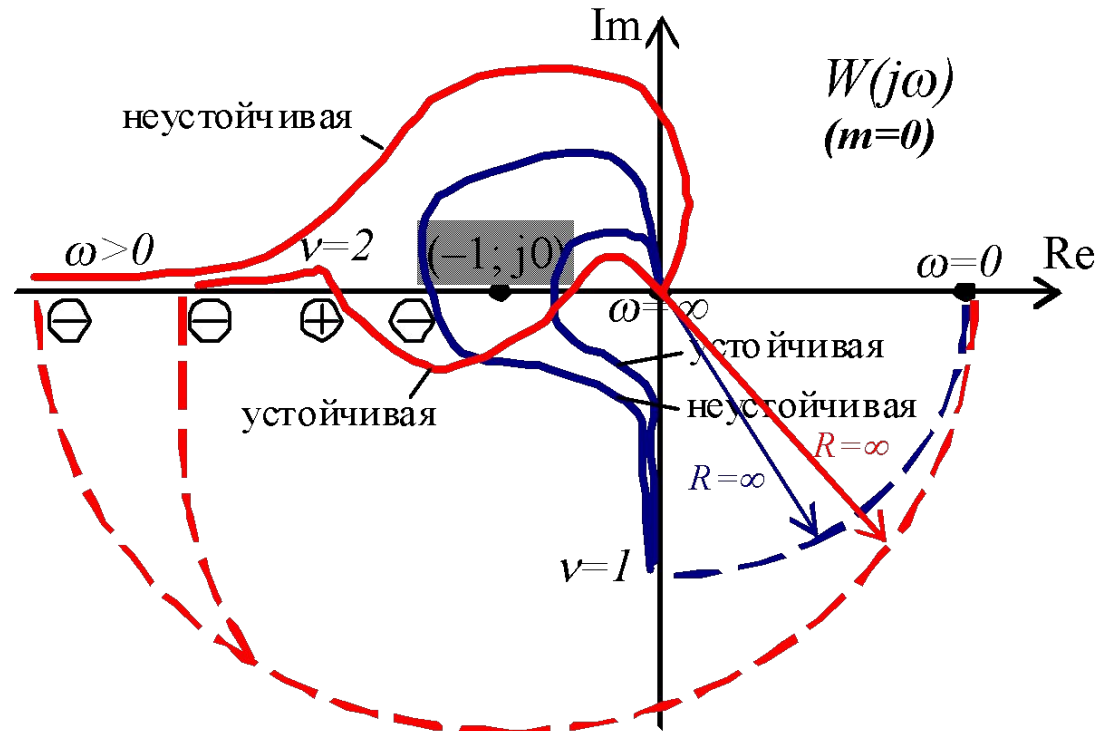
Критерий устойчивости Найквиста

Устойчивость астатических систем

Во избежание неоднозначности в использовании критерия Найквиста частотные характеристики разомкнутых САР дополняются дугами длиной $-\nu\pi/2$ бесконечно большого радиуса таким образом, чтобы они начинались от положительной вещественной полуоси, и после этого анализируются дополненные ЧХ.

Для примера ограничимся случаем $m = 0$, распространенным в управлении электромеханическими системами.

Замкнутая САР будет устойчивой, если дополненная ЧХ разомкнутой САР не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$.



УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

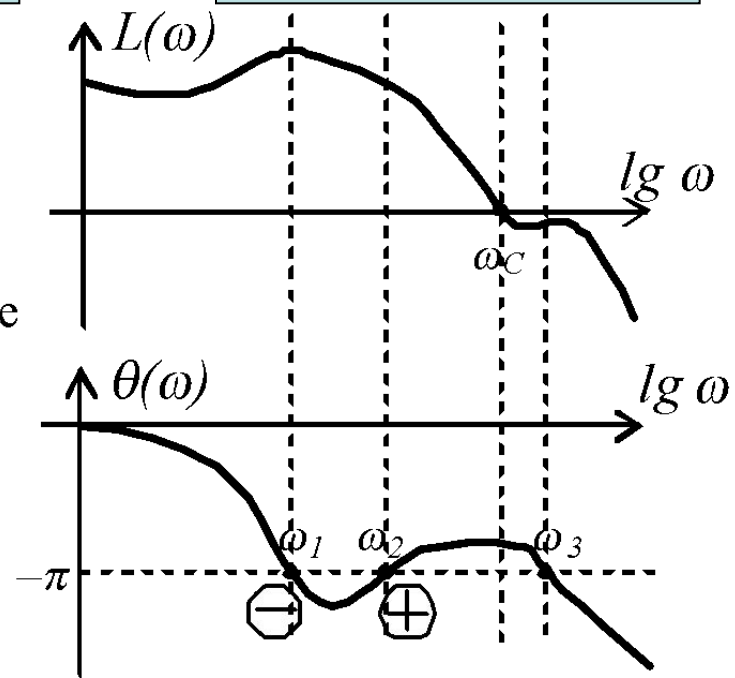
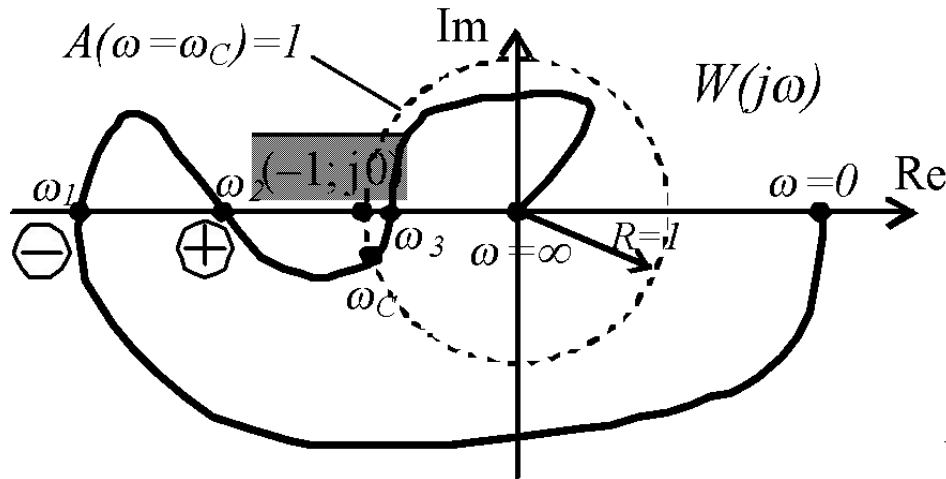
Логарифмический частотный критерий устойчивости

Предварительные замечания

Логарифмические амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) и фазо-частотная (ЛФЧХ) характеристики разомкнутой САР, как известно, вычисляются по формулам:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$$

$$\theta(\omega) = \arg[W(j\omega)]$$

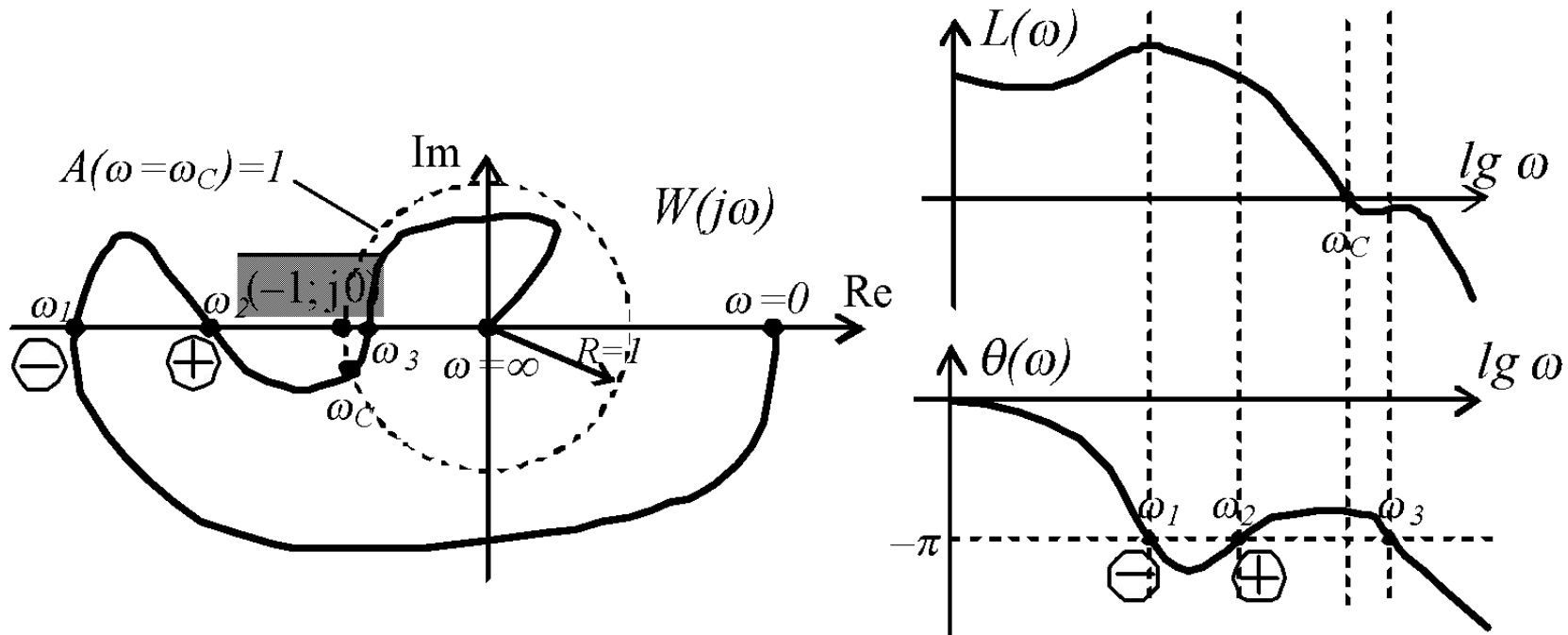


УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Предварительные замечания



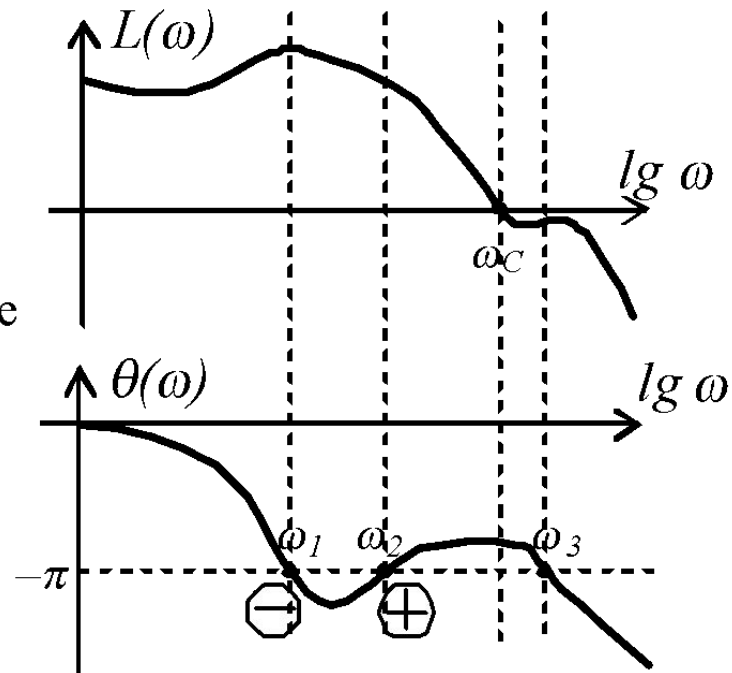
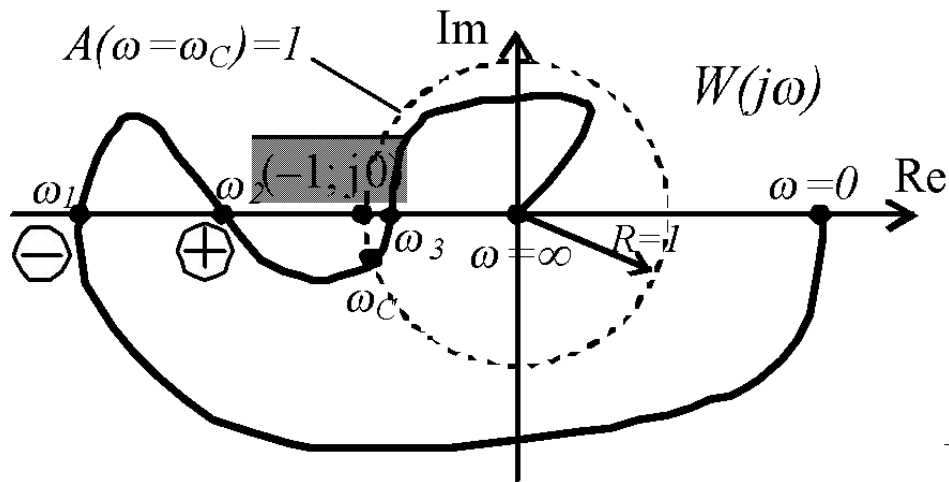
Достижению частотной характеристикой окружности радиуса 1 с центром в начале координат при определенной частоте ω_c , называемой *частотой среза* или *граничной частотой*, соответствует пересечение ЛАЧХ $L(\omega)$ оси частот ($L(\omega_c)=0$).

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Предварительные замечания



Переходу годографа через вещественную ось при $\text{Re}[W(j\omega)] < 0$ соответствует переход ЛФЧХ $\theta(\omega)$ через отметку $-\pi$ (В более сложных случаях, когда ЧХ имеет вид спирали – через отметки $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, ...). При этом положительному переходу соответствует переход ЛФЧХ снизу вверх, а отрицательному переходу – сверху вниз.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

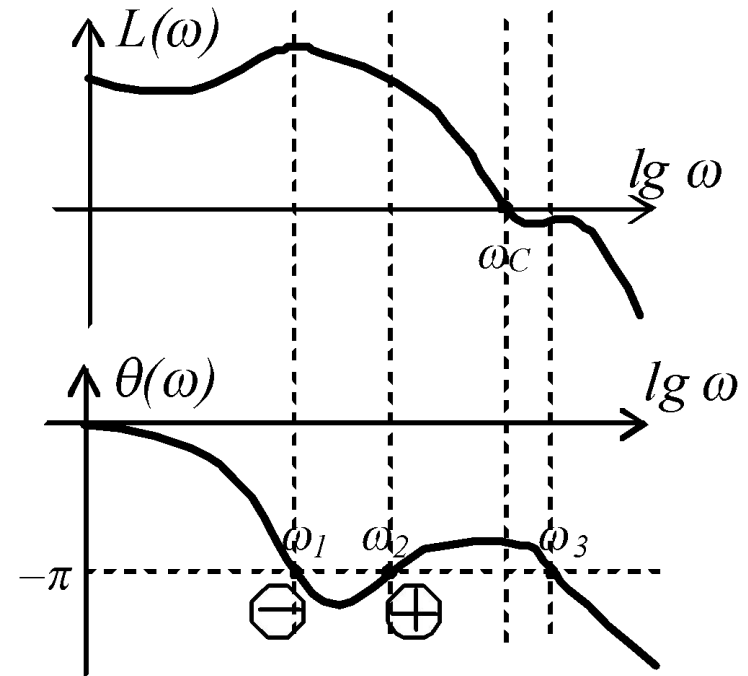
Логарифмический частотный критерий устойчивости

Формулировка критерия

Для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФЧХ разомкнутой САР через линию $\pm(2k+1)\pi$ (где $k = 0, 1, 2, \dots$) при частотах, когда $L(\omega) > 0$, была равна $m/2$, где m - порядок неустойчивости разомкнутой САР.

Частный случай

Если САР в разомкнутом состоянии устойчива или находится на границе устойчивости ($m = 0$), то для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы количество отрицательных переходов ЛФЧХ (...) равнялось бы количеству положительных.

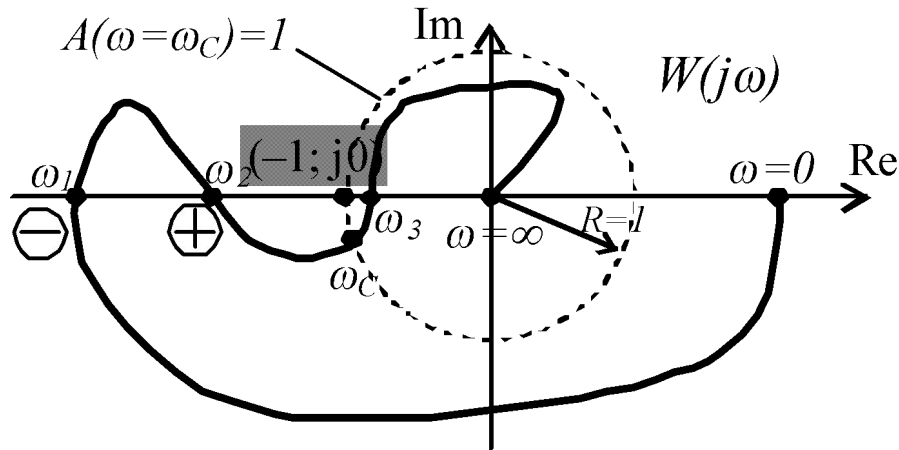


УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Запас устойчивости



Вид частотной характеристики $W(j\omega)$ определяется параметрами САР (разомкнутой).

Путем изменения параметров САР можно из области устойчивости перевести ее в область неустойчивости, и наоборот.

Количественные параметры (т.е. степень) **изменения параметров устойчивой** (функционирующей) **САР, необходимые для перевода ее на границу устойчивости**, когда ЧХ проходит через точку с координатами $(-1; j0)$, характеризуют **запас устойчивости САР**.

Наиболее удобно количественное выражение запаса устойчивости может быть определено с помощью логарифмических частотных характеристик (ЛАЧХ и ЛФЧХ), причем различают **запас устойчивости по амплитуде** (определяемый по ЛАЧХ) и **запас устойчивости по фазе** (определяемый по ЛФЧХ).

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Запас устойчивости

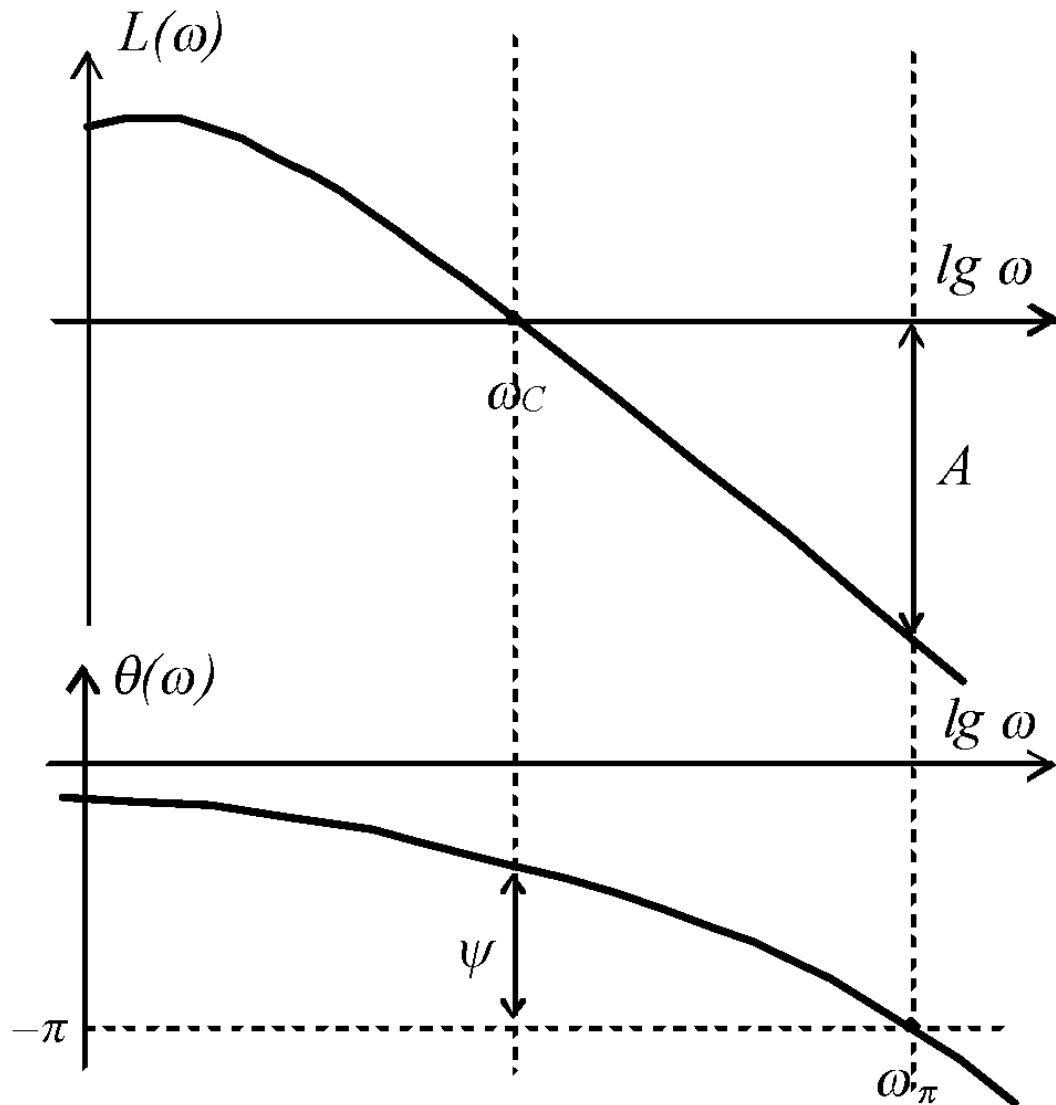
Пусть известны ЛАЧХ и ЛФЧХ некоторой САР в разомкнутом состоянии



Параметр A называется запасом устойчивости по амплитуде, определяется как отклонение ЛАЧХ от оси частот при частоте, соответствующей первому отрицательному переходу ЛФЧХ через уровень $-\pi$:

$$A = |L(\omega_\pi)|$$

(В более сложных случаях следует отталкиваться от уровней $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, ...)



УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

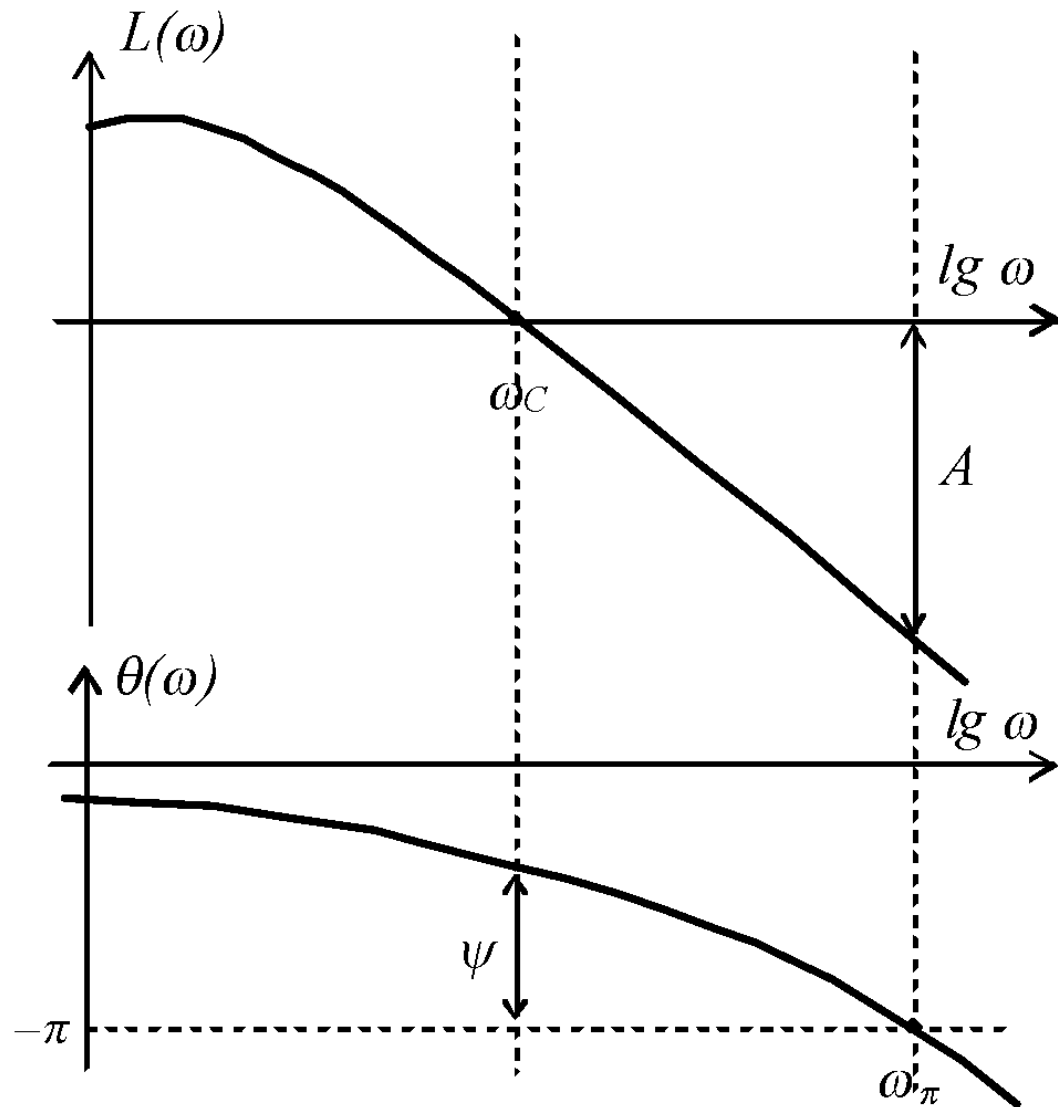
Логарифмический частотный критерий устойчивости

Запас устойчивости

Запас устойчивости по амплитуде

$$A = |L(\omega_\pi)|$$

Предположим, что путем изменения параметров САР (путем увеличения коэффициента передачи) ее ЛАЧХ поднялась на величину A , и пусть при этом ЛФЧХ осталась без изменения. В этом случае САР находится на границе устойчивости.



УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

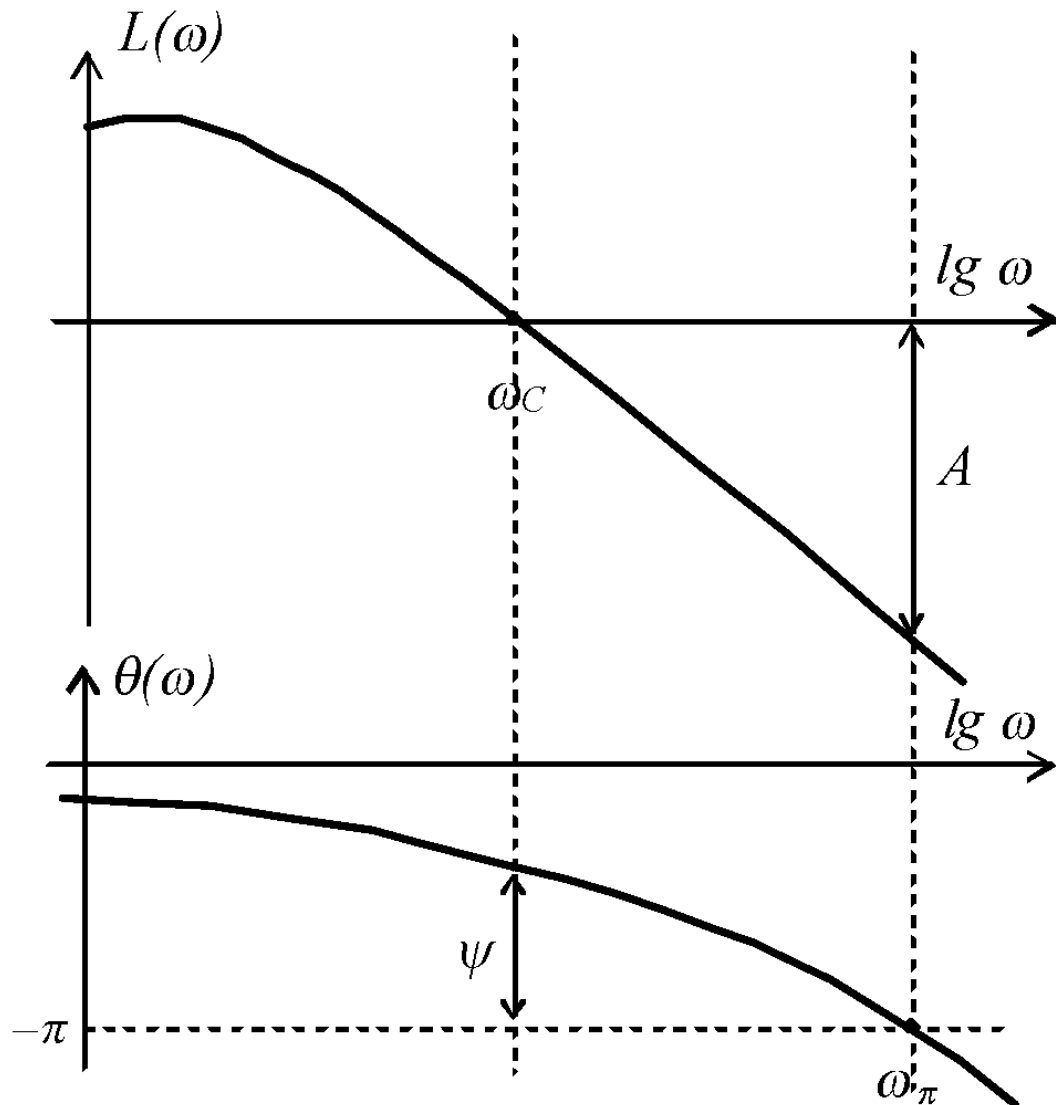
Логарифмический частотный критерий устойчивости

Запас устойчивости

Параметр ψ называется запасом устойчивости по фазе, определяется как отклонение ЛФЧХ от уровня $-\pi$ при значении частоты ω , равном частоте среза ω_C :

$$\psi = \pi + \theta(\omega_C)$$

Предположим, что также путем изменения параметров САР ее ЛФЧХ опустилась на угол ψ , а ЛАЧХ осталась без изменения. Теперь САР находится на границе устойчивости.



УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Логарифмический частотный критерий устойчивости

Запас устойчивости

В реальных САР в процессе работы под действием внешних факторов их параметры изменяются. При этом изменяются их ЛАЧХ и ЛФЧХ.

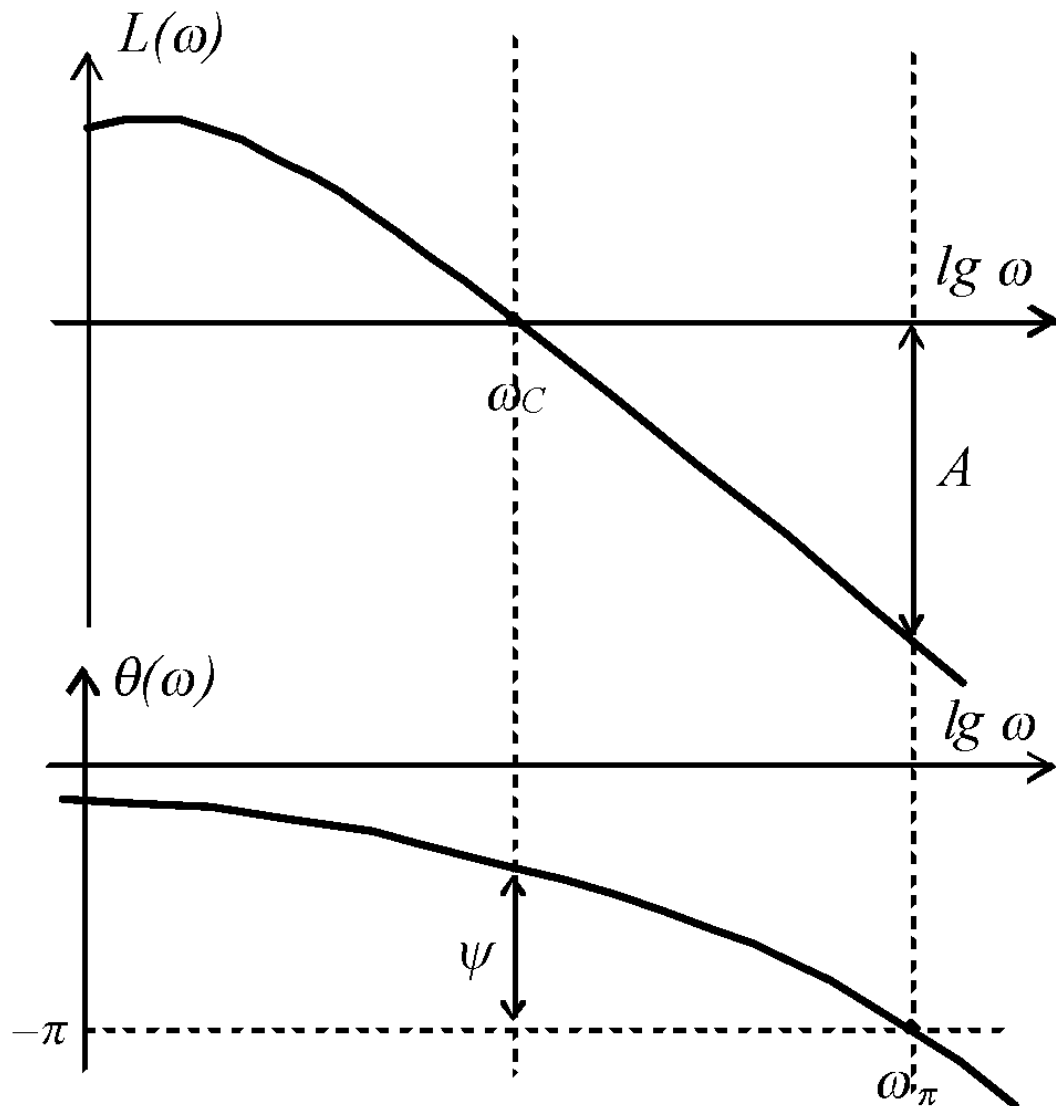
Для того, чтобы обеспечить нормальную (устойчивую) работу САР, обычно необходимо обеспечить запас устойчивости по амплитуде

$$A \geq 14 \text{ дБ}$$

и запас устойчивости по фазе

$$\psi \geq 30^\circ.$$

При невыполнении этих условий в процессе работы системы имеется большая вероятность того, что она окажется неустойчивой.

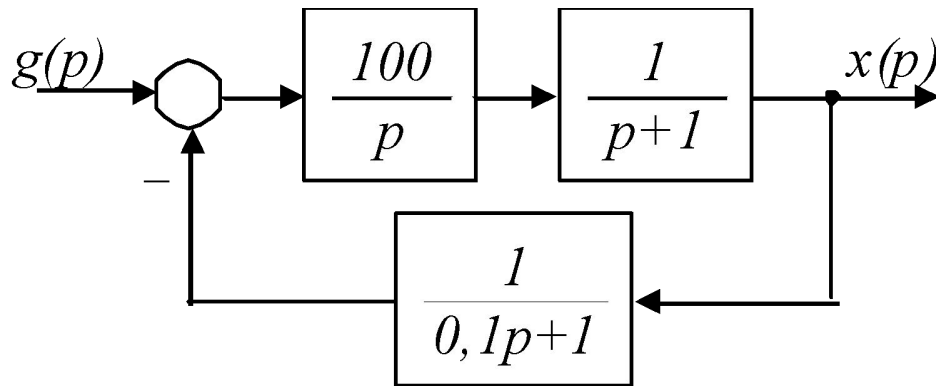


УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Пример 1.

Исследовать на устойчивость САР



1) Решение с помощью критерия устойчивости Гурвица

П.ф. разомкнутой САР:

$$W(p) = \frac{100}{p} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{0.1p+1} = \frac{R(p)}{Q(p)}$$

Х.п. замкнутой САР:

$$G(p) = R(p) + Q(p) = p(p+1)(0.1p+1) + 100 = 0.1p^3 + 1.1p^2 + p + 100$$

т.е. $a_0 = 0,1 > 0$, $a_1 = 1,1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 100$.

Составляем матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & 100 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 1.1 & 100 \end{bmatrix}$$

Находим определители:

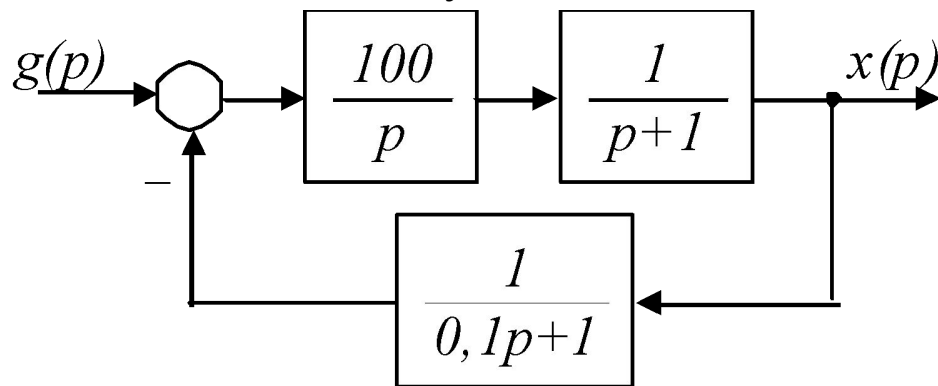
$$\Delta_1 = 1.1 > 0 ; \quad \Delta_2 = 1.1 \cdot 1 - 100 \cdot 0.1 = -8.9 \quad - \text{САР неустойчива.}$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Частотные критерии устойчивости

Пример 1.

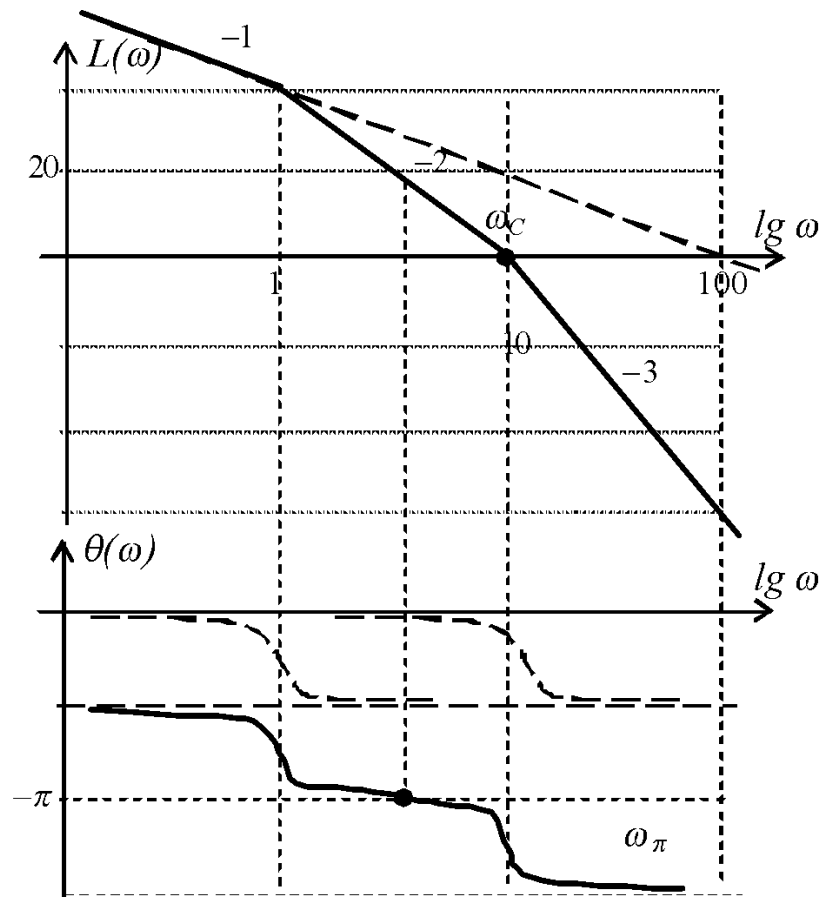
Исследовать на устойчивость САР



2) Решение с помощью логарифмического частотного критерия.

Строим ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой САР

Имеем один отрицательный переход ЛФЧХ через уровень $-\pi$, а положительные переходы отсутствуют, т.е. разность между числом пол. и отр. переходов равна -1 . Характеристический полином разомкнутой САР $Q(p)$ не имеет правых корней. Таким образом, логарифмический критерий не выполняется: $0 \neq -1$.



– САР неустойчива