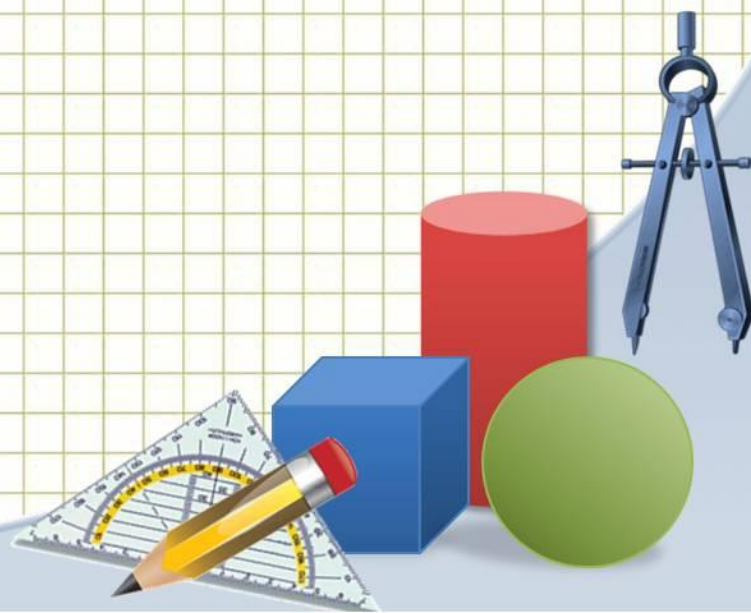


"Основные понятия и аксиомы стереометрии."

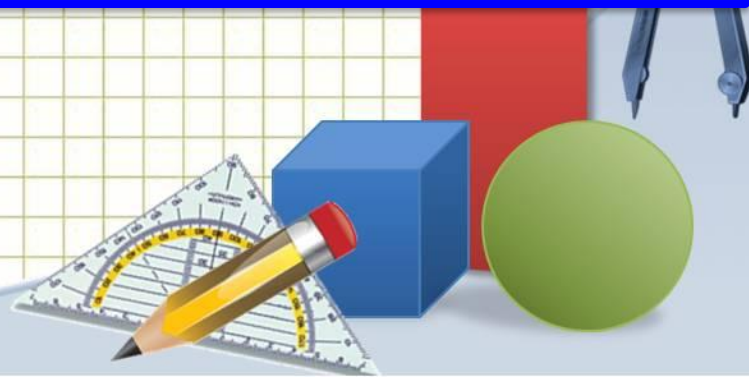


Геометрия

```
graph TD; A[Геометрия] --> B[Планиметрия]; A --> C[Стереометрия];
```

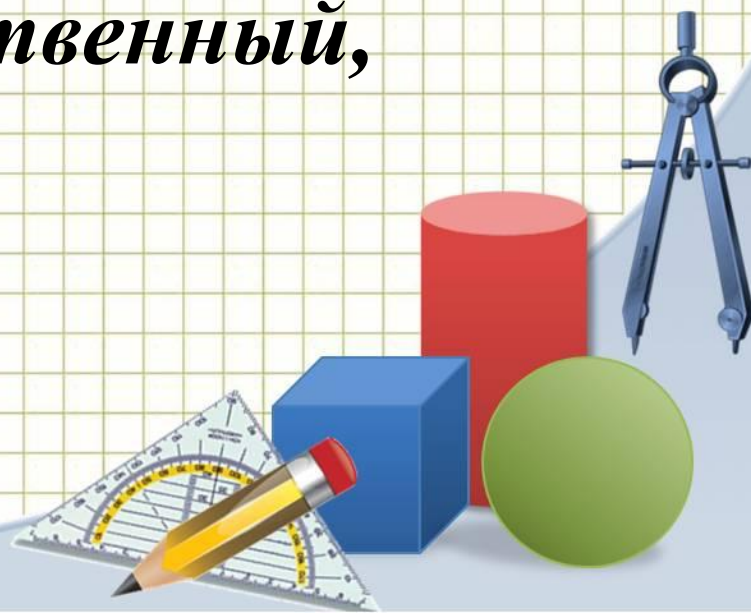
Планиметрия

Стереометрия



***Стереометрия** изучает свойства фигур в пространстве.*

***Слово «стереометрия»** происходит от греческих слов «стереос» — объемный, пространственный, «метрео» — мерить.*



Основные понятия в стереометрии:

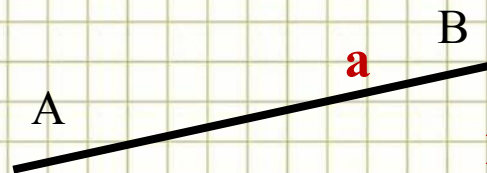
точка



Обозначение:
A; B; C;

расстояние

$|AB|$



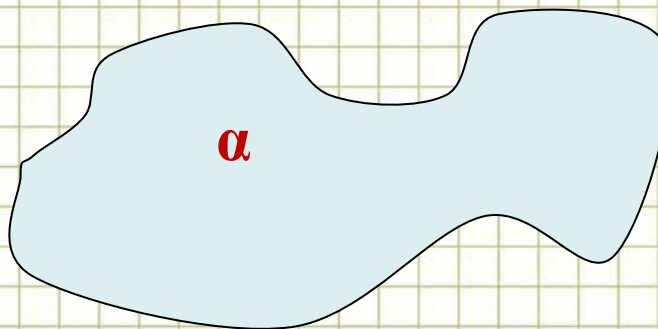
прямая

Обозначение: a, b, c, d...
или двумя заглавными
латинскими (AB)

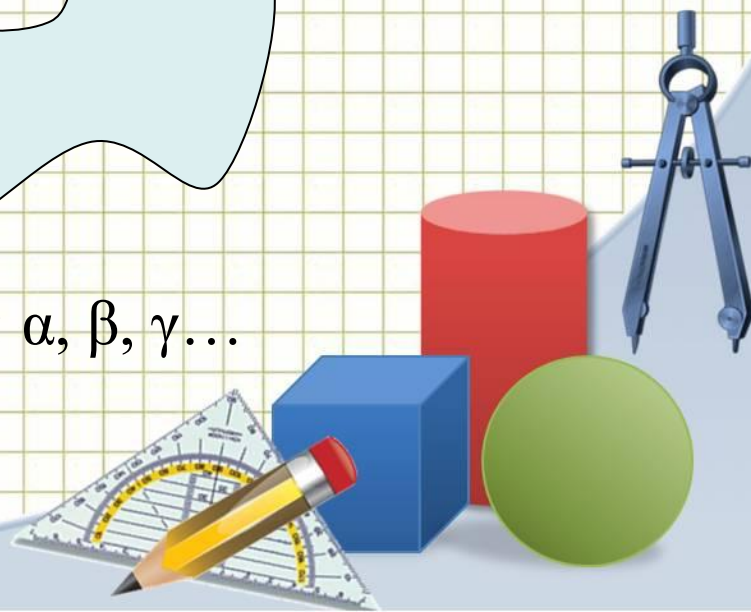
множество

Всякое множество
точек в геометрии
называют фигурой
(пример: прямая и
плоскость)

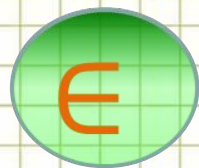
плоскость



Обозначение: α , β , γ ...
или (ABC)



Для коротких записей утверждений используют символы :



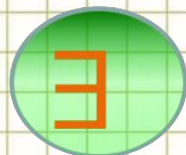
принадлежит

$$A \in d$$



не принадлежит

$$A \notin d$$



существует



существует только
единственное



подмножество



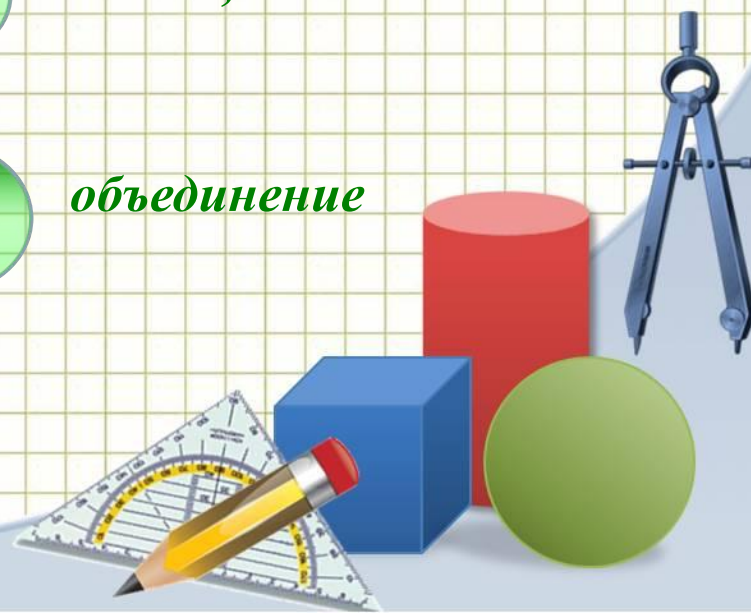
любое, всякое



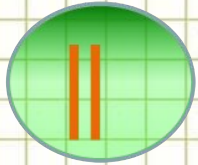
пересечение



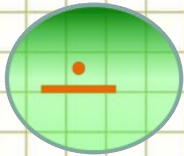
объединение



Для коротких записей утверждений используют символы :



параллельны



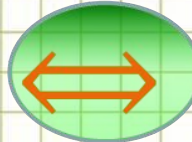
скрещивающиеся



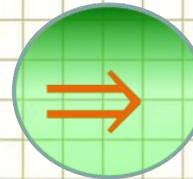
перпендикулярны



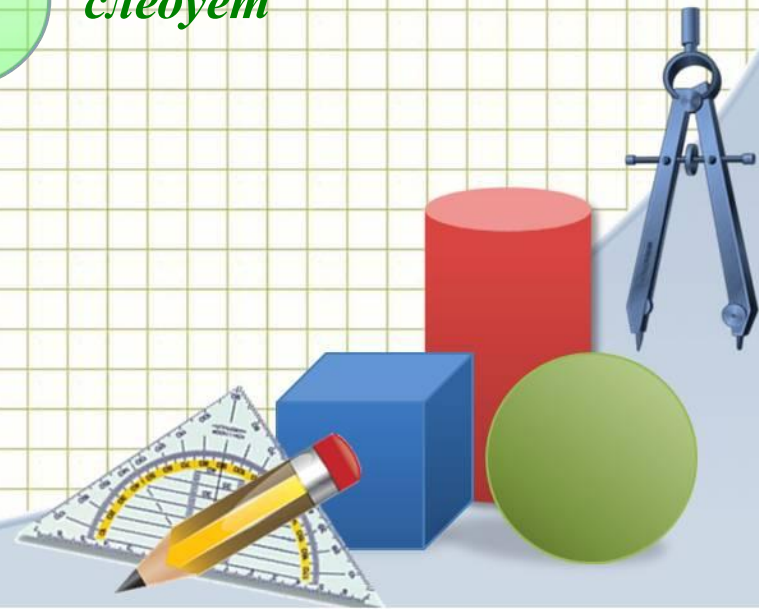
не параллельны



равносильны



следует

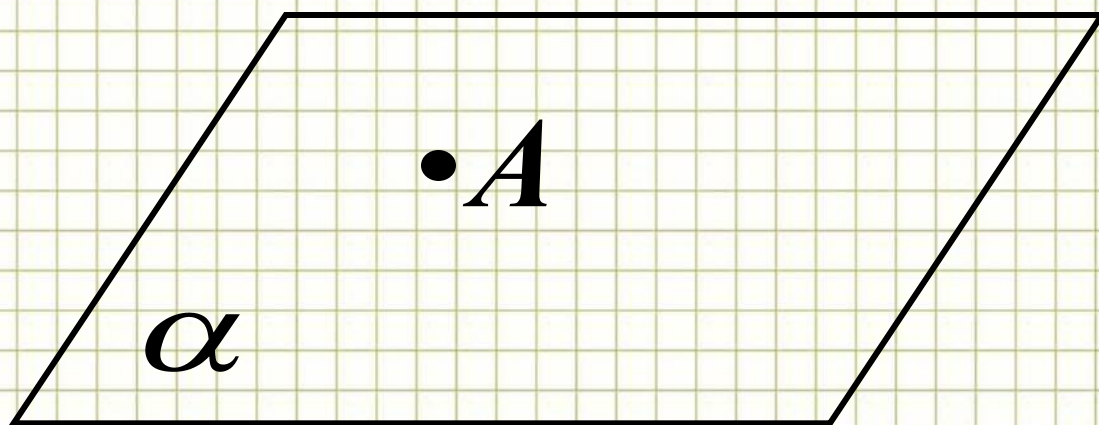


Прочитайте чертеж

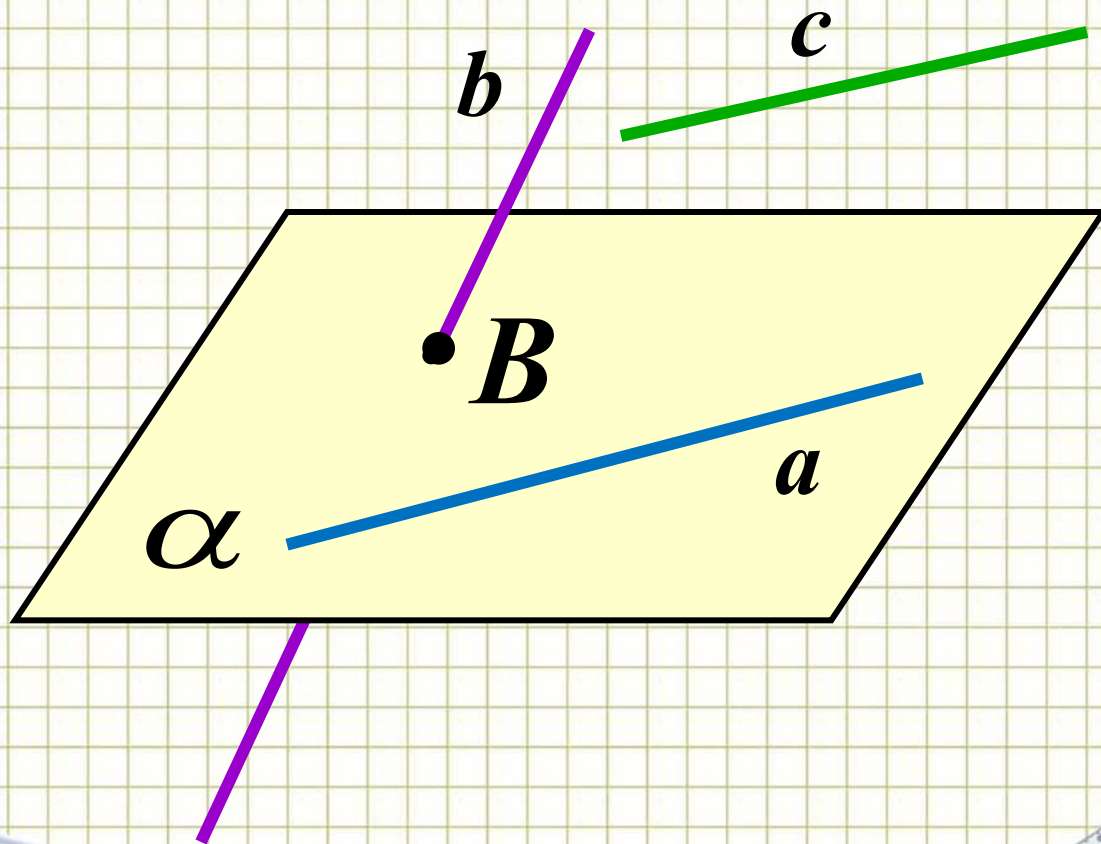
• c

$A \in \alpha$

$C \notin \alpha$



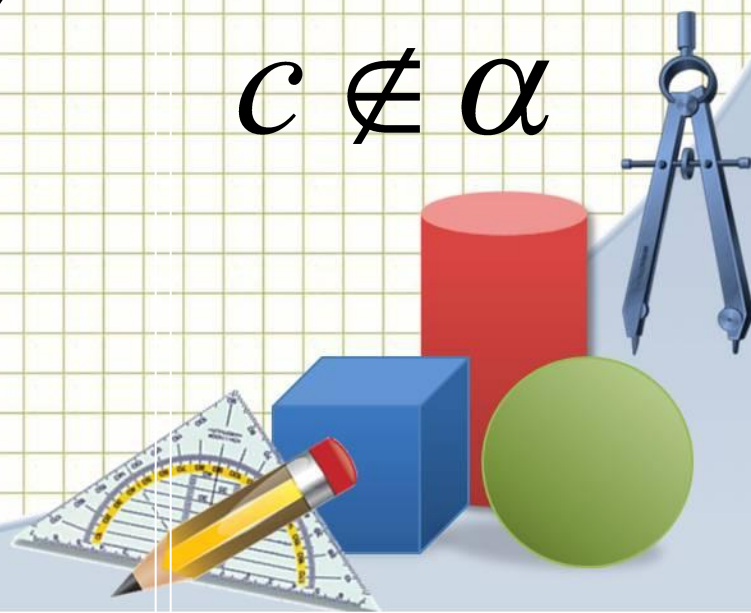
Прочитайте чертеж

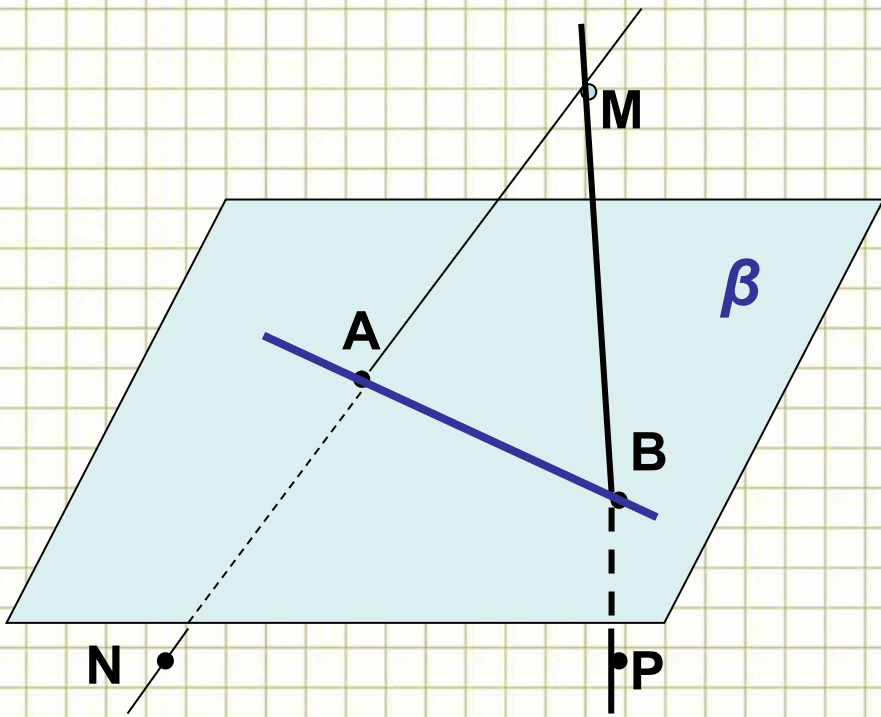


$$a \in \alpha$$

$$b \cap \alpha = B$$

$$c \notin \alpha$$

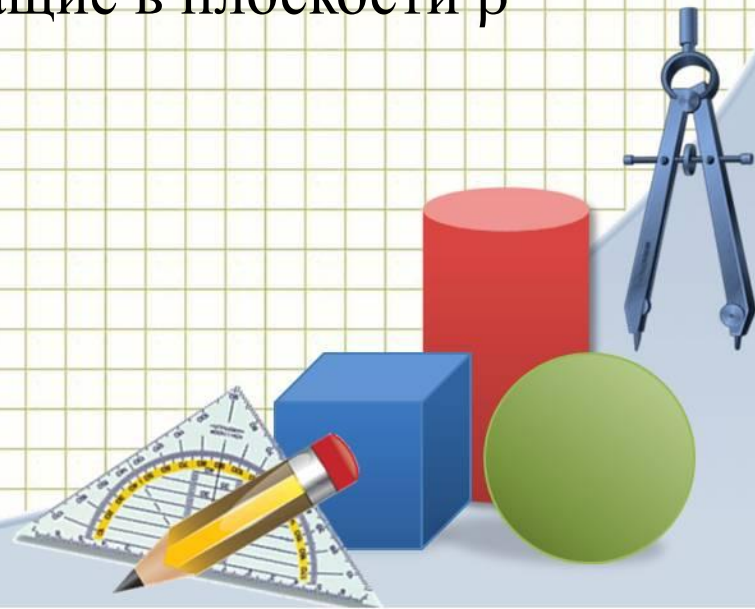




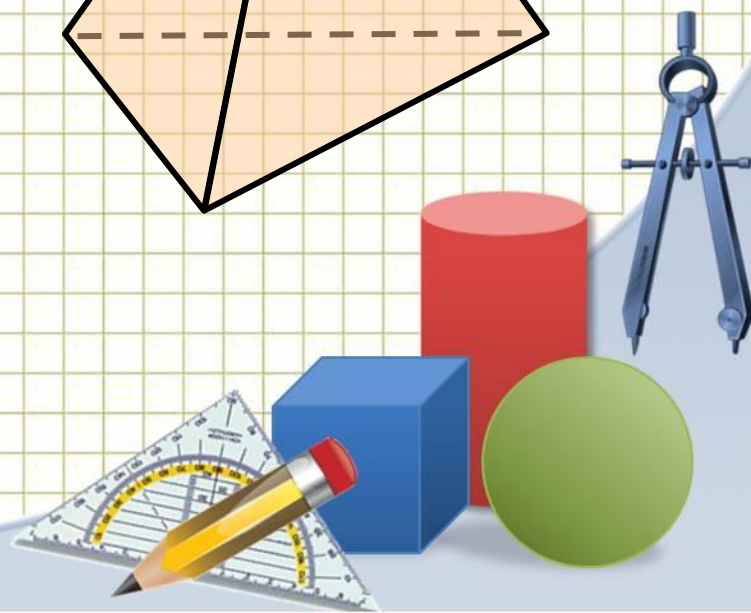
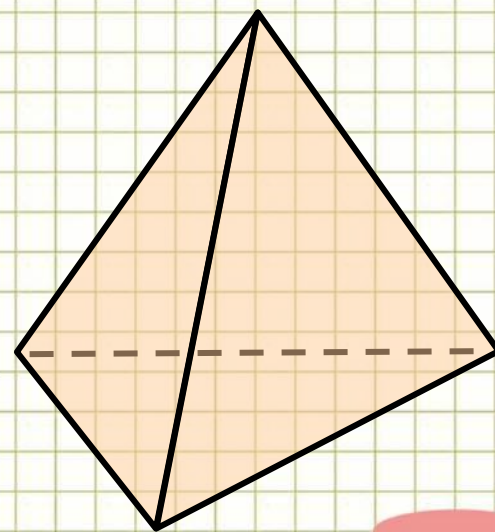
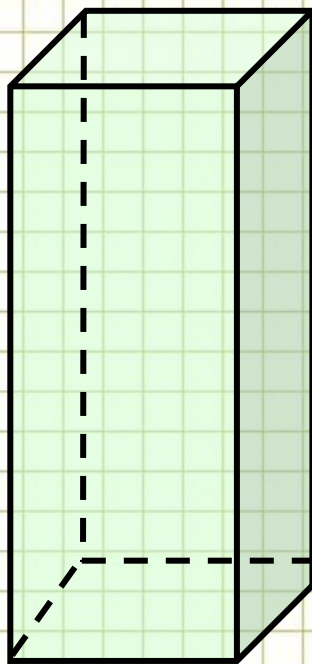
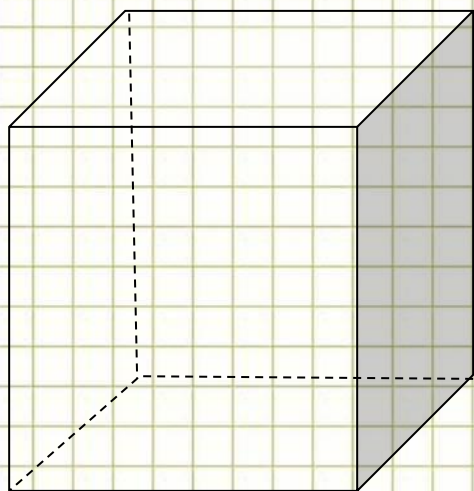
Ответьте на вопросы по рисунку:

1. Назовите точки, лежащие в плоскости β ; не лежащие в плоскости β .

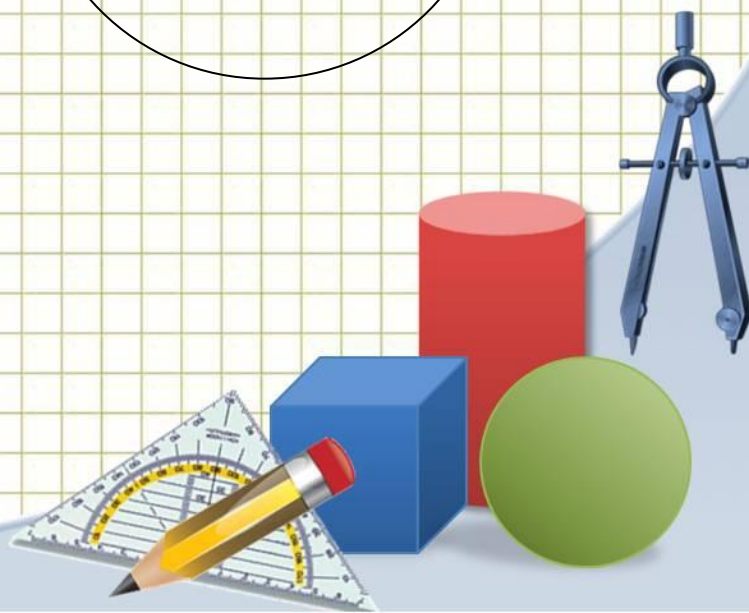
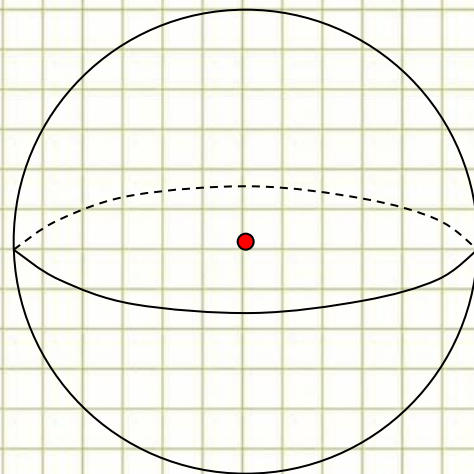
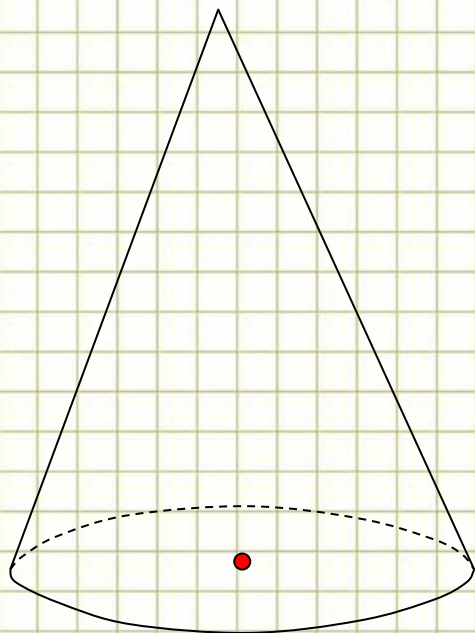
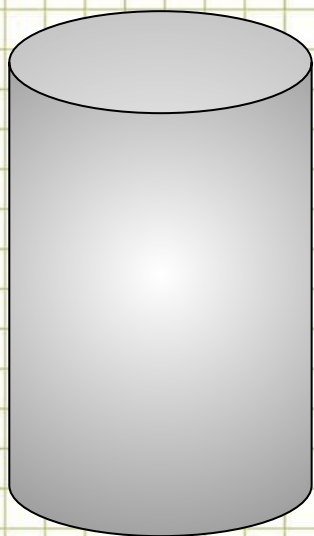
2. Назовите прямые, лежащие в плоскости β ; не лежащие в плоскости β



Наряду с основными фигурами мы будем рассматривать геометрические тела и их поверхности. Такие, как: куб, параллелепипед, призма, пирамида.

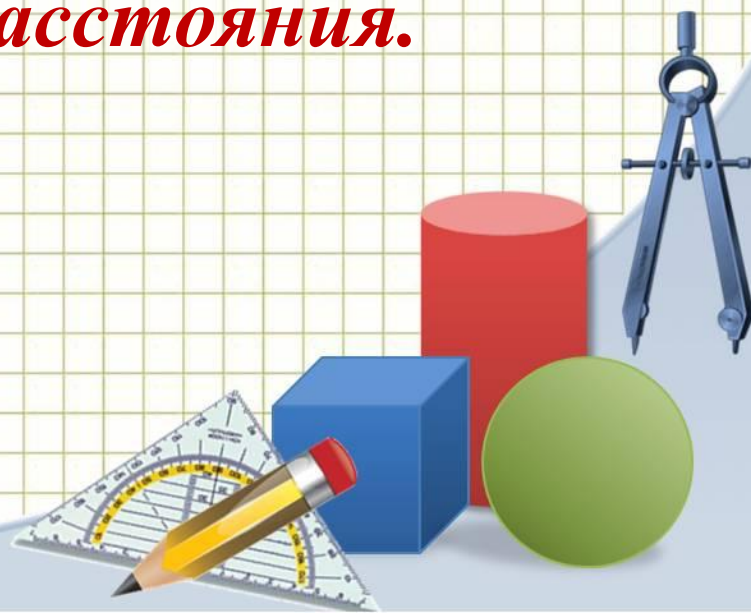


А также тела вращения: шар, сфера, цилиндр, конус.



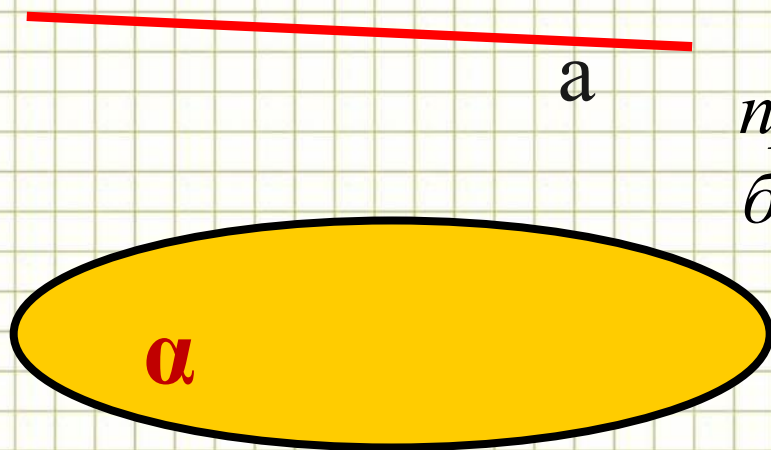
***Аксиома** – это предложение не требующее доказательства.*

В аксиомах стереометрии выражены основные свойства неопределяемых понятий: точки, прямой, плоскости и расстояния.



Аксиома 1

Существует хотя бы одна прямая и хотя бы одна плоскость. Каждая прямая и каждая плоскость есть не совпадающее с пространством непустое множество точек.



Для любой плоскости α и прямой a существует хотя бы одна не принадлежащая им точка.

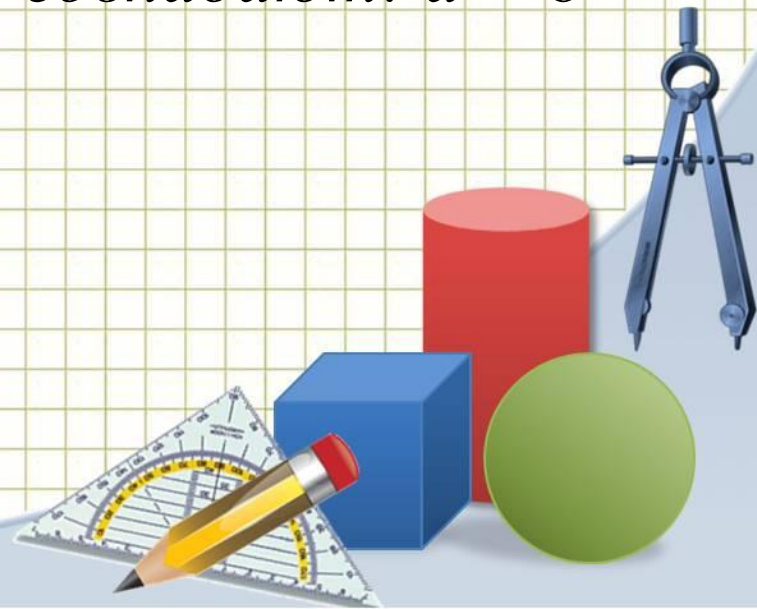


Аксиома 2

*Через любые две различные точки
проходит одна и только одна прямая.*

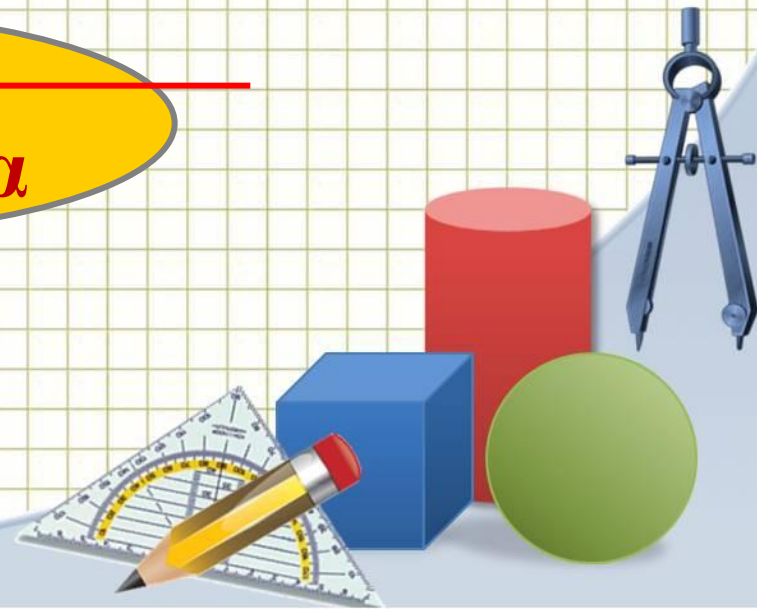
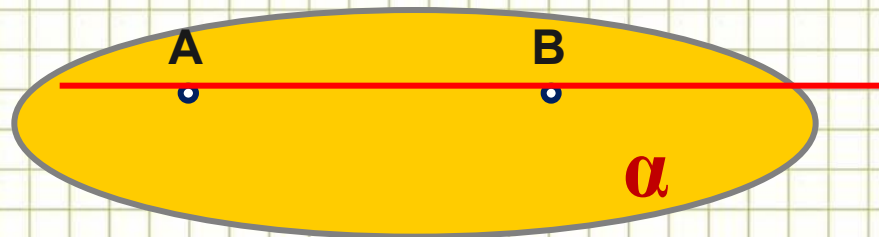


*Если прямые имеют по
две общие точки, то эти
прямые совпадают: $a = b$*



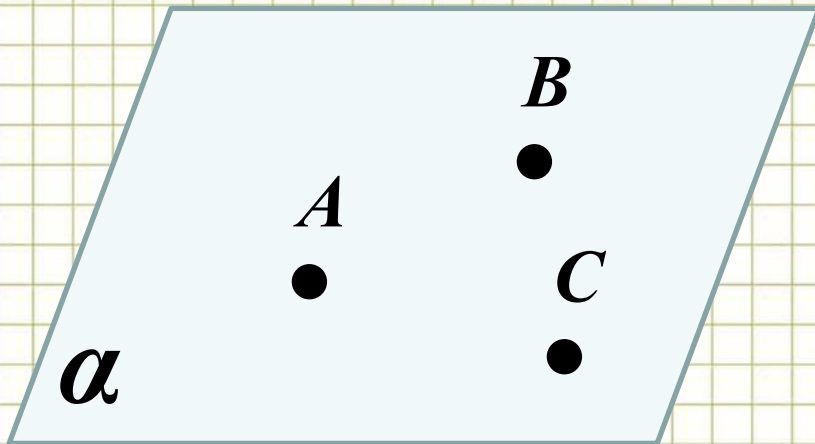
Аксиома 3

*Прямая, проходящая через две
различные точки плоскости, лежит
в этой плоскости*

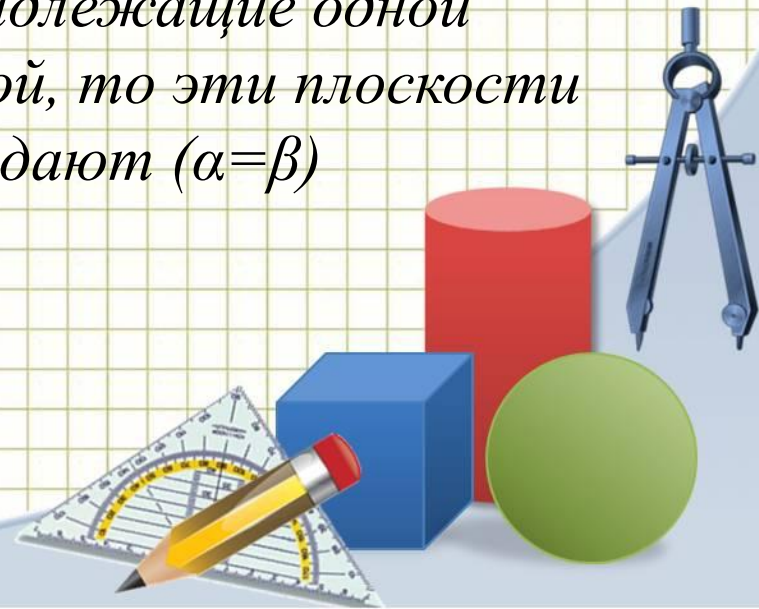


Аксиома 4

Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.



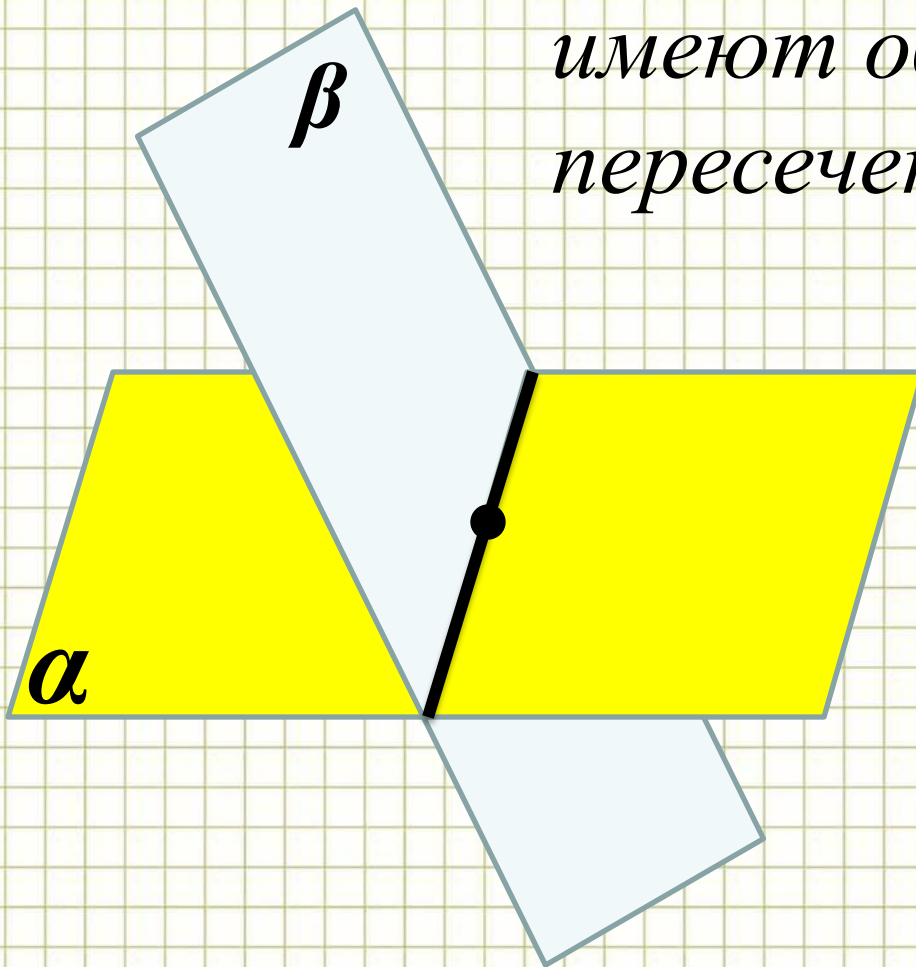
Если плоскости имеют три общие точки, не принадлежащие одной прямой, то эти плоскости совпадают ($\alpha = \beta$)



Аксиом 5

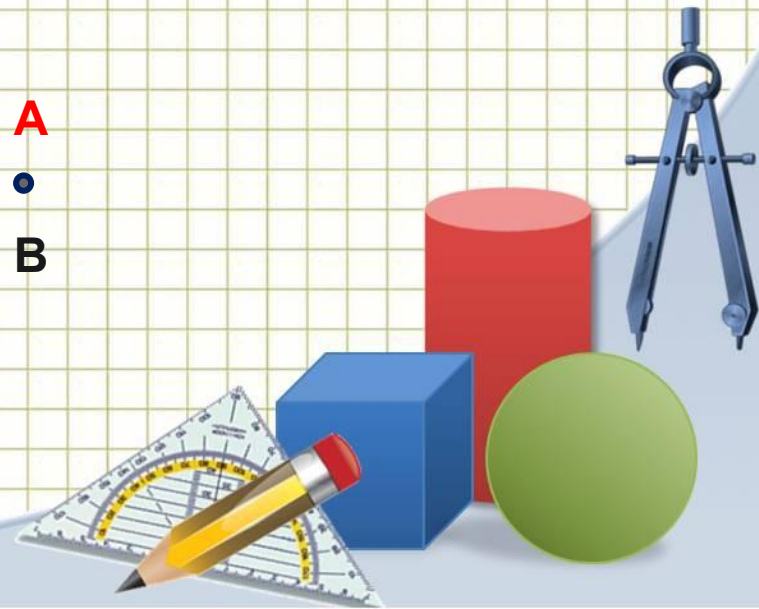
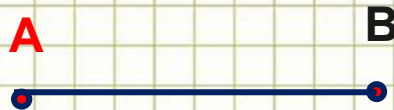
Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть прямая.

Две плоскости, пересечением которых является прямая ($\alpha \cap \beta = a$), называются пересекающимися плоскостями.



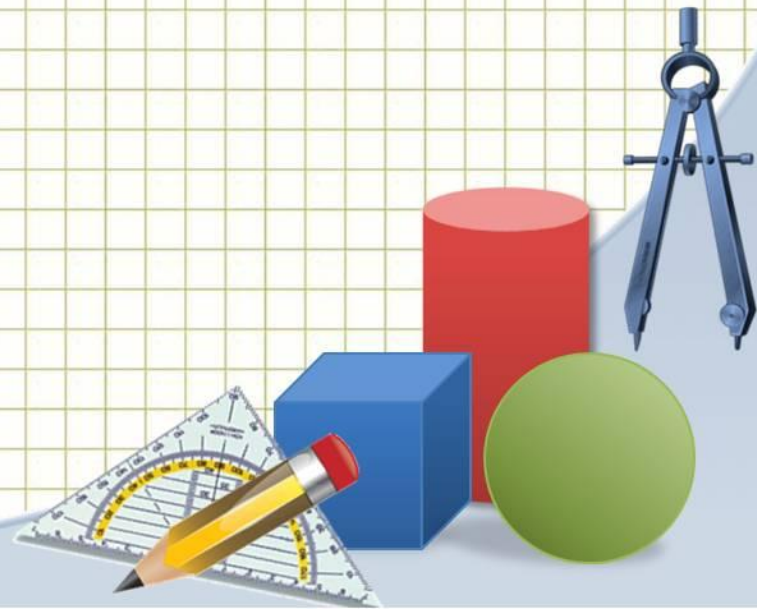
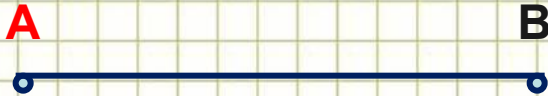
Аксиома 6

Для любых двух точек A и B имеется неотрицательная величина, называемая расстоянием от A до B . Расстояние $|AB|$ равно нулю в том и только в том случае, если точки A и B совпадают.



Аксиома 7

*Расстояние от точки A до точки B
равно расстоянию от точки B до
точки A: $|AB| = |BA|$*

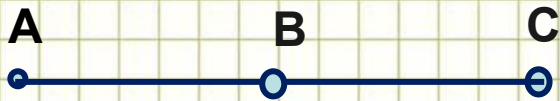


Аксиома 8

Для любых трех точек A, B, C расстояние от A до C не больше суммы расстояний от A до B и от B до C : $|AC| \leq |AB| + |BC|$

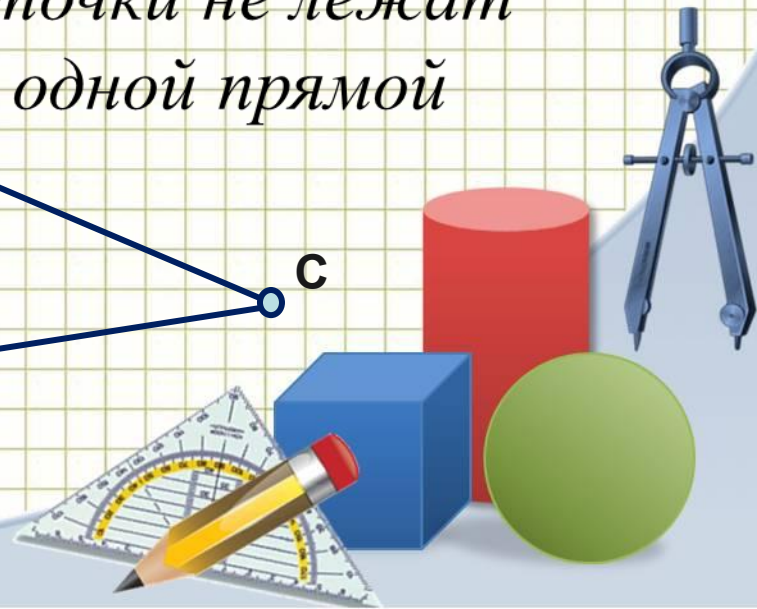
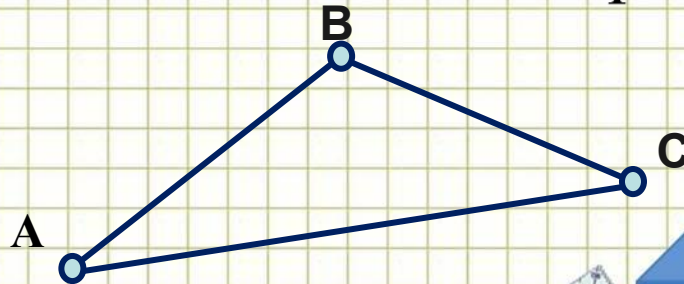
$$|AC| = |AB| + |BC|$$

когда точки лежат
на одной прямой



$$|AC| < |AB| + |BC|$$

если точки не лежат
на одной прямой



Аксиома 9

Для каждой плоскости выполняются известные из планиметрии аксиомы порядка, подвижности плоскости и параллельных прямых

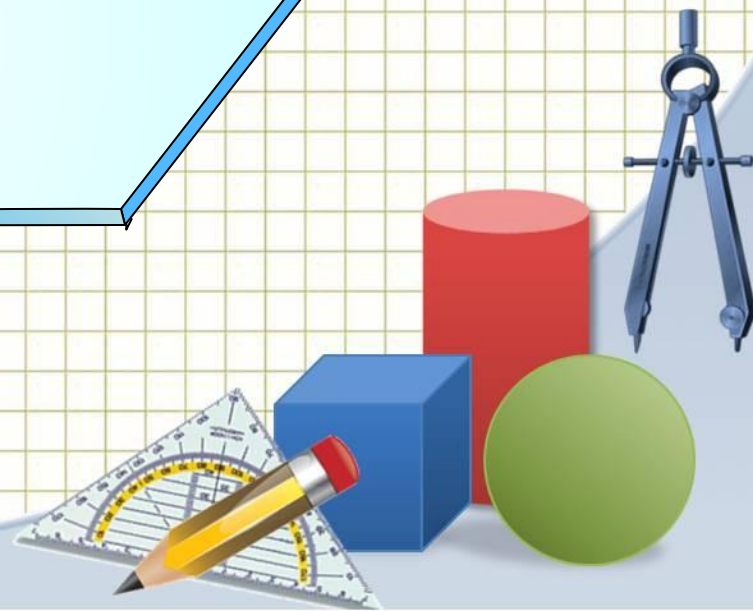
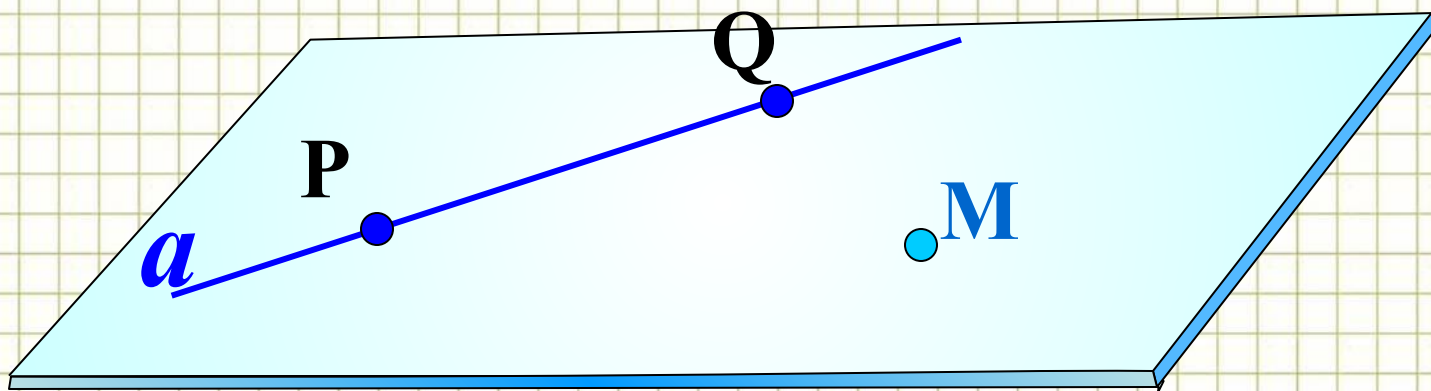
Из принятых выше аксиом вытекает, что в каждой плоскости можно применять теоремы планиметрии.

Например, в каждой плоскости выполняется теорема Пифагора, сумма углов любого треугольника равна 180°



Следствие 1

Через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести одну и только одну плоскость.



Доказательство

Дано:

a ,

$A \notin a$

Доказать:

1) $\exists \alpha$; $a \in \alpha$; $A \in \alpha$

2) α - единственная

1) $A_2: B \in a, C \in a$,

2) $A_4: (ABC) = \alpha$ — единст.

(через три точки, не лежащие на одной прямой проведем плоскость α)

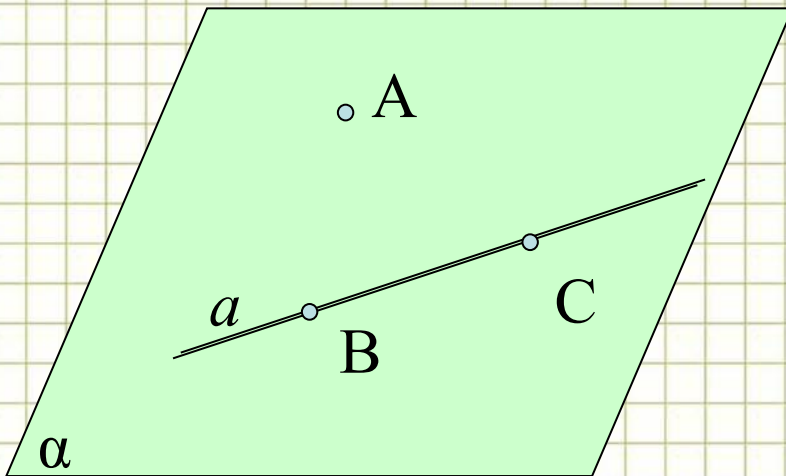
3) $A_3: B \in \alpha; C \in \alpha \Rightarrow (BC) \in \alpha$

$(BC) = a \in \alpha$

(т.к. две точки прямой a принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости)

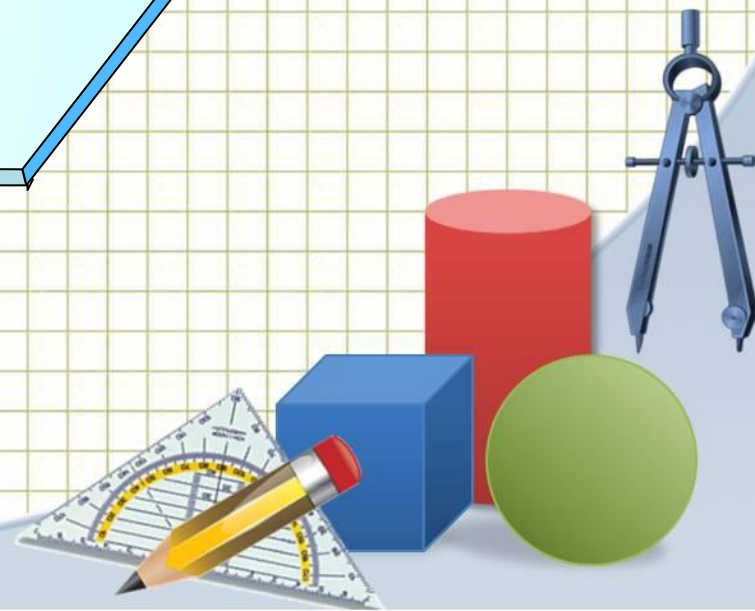
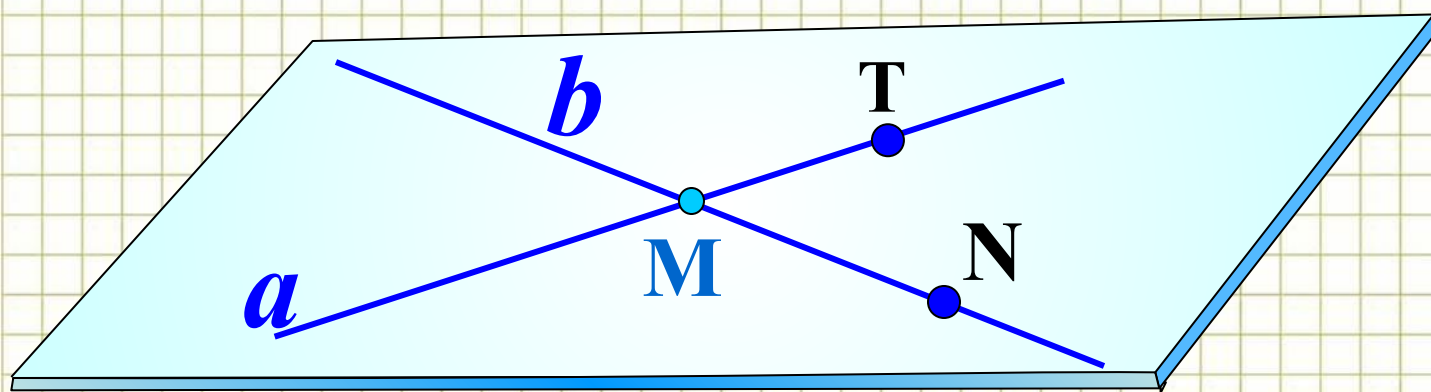
4) $A_4: \alpha$ - единственная

(т. к. через три точки, не лежащие на одной прямой проходит только одна плоскость)



Следствие 2

Через две пересекающиеся прямые можно провести одну и только одну плоскость.



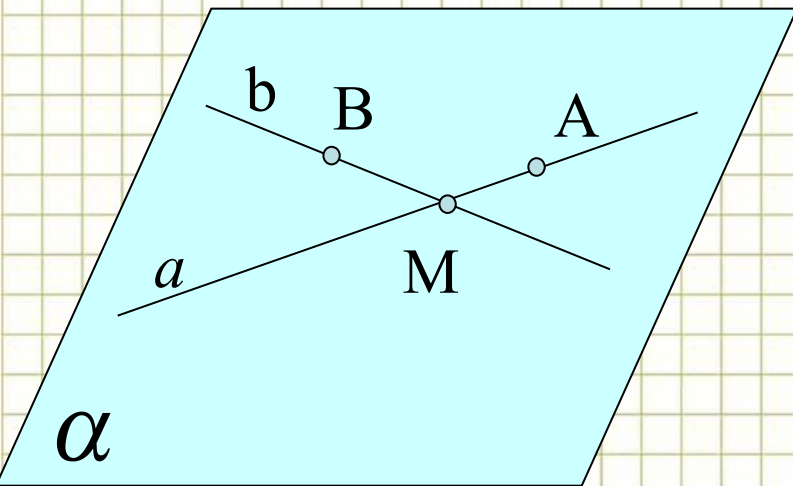
Доказательство

Дано: $a \cap b = M$

Доказать:

1) $\exists \alpha ; a \in \alpha ; b \in \alpha$

2) α - единственная



1) $A_2: M \in a, A \in a$

$M \in b, B \in b$

2) $A_4: (ABC) = \alpha$ - единст.

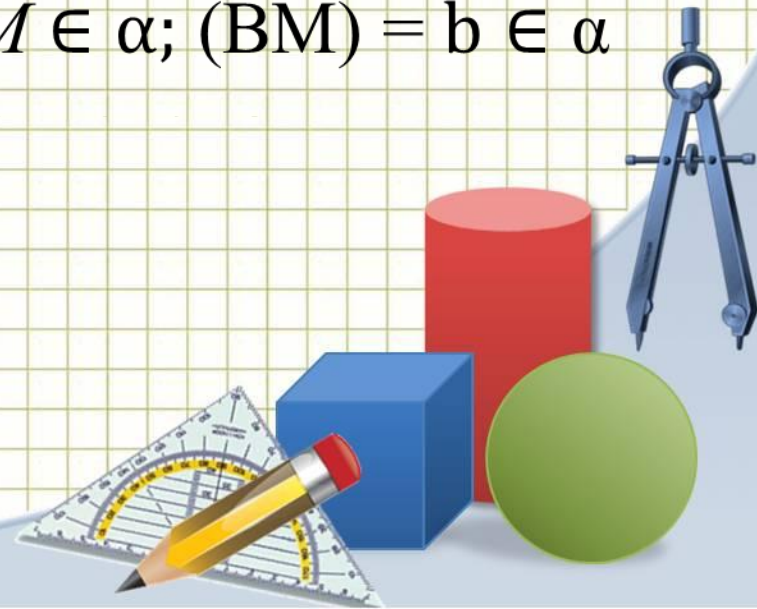
(через точку A и прямую b проведем плоскость α)

3) $A_3:$

$A \in \alpha ; M \in \alpha ; (AM) = a \in \alpha$

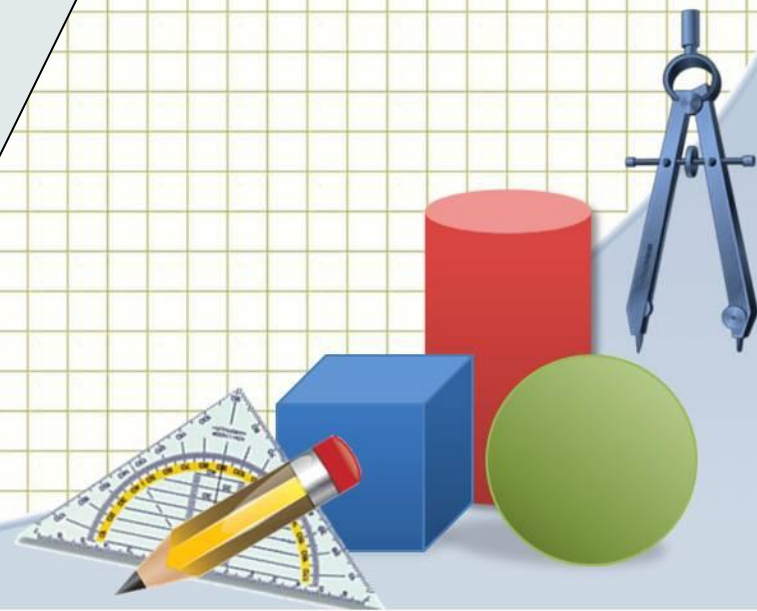
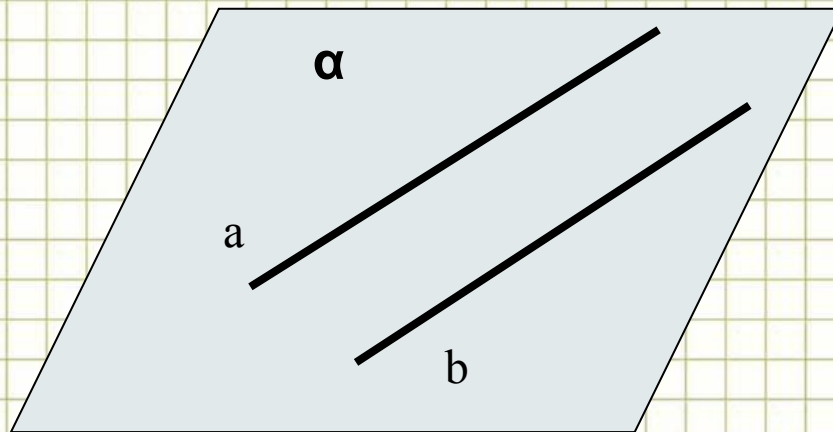
$B \in \alpha ; M \in \alpha ; (BM) = b \in \alpha$

$\therefore \alpha$



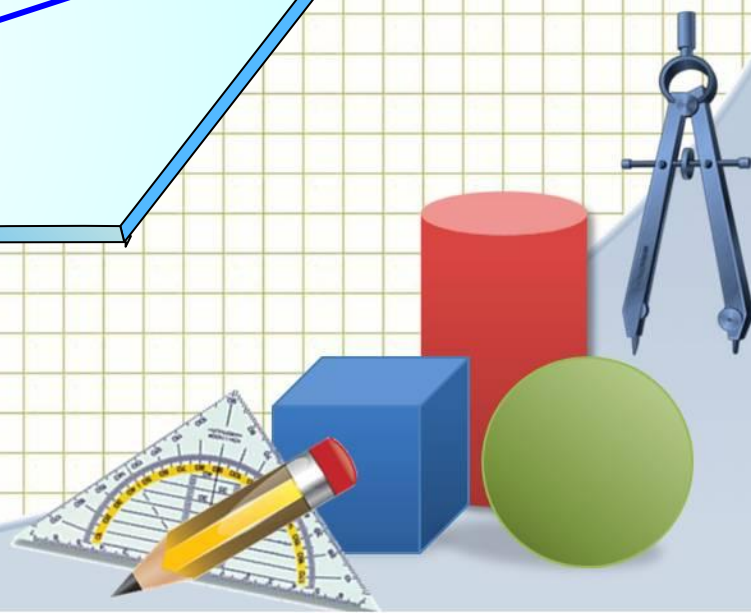
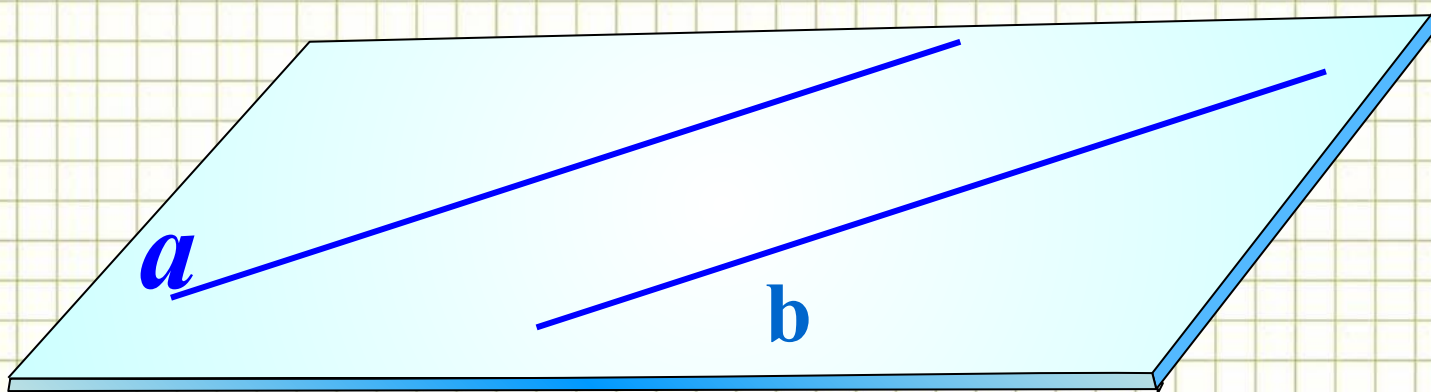
Определение:

Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки.



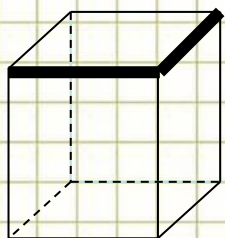
Следствие 3

*Через две различные параллельные
прямые можно провести только одну
плоскость.*

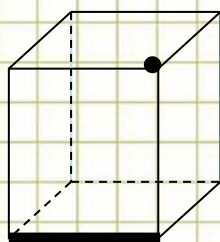


Ответьте на вопрос

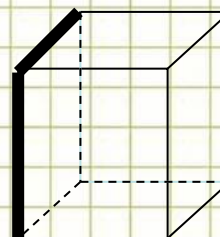
1. Сколько плоскостей можно провести через выделенные элементы?



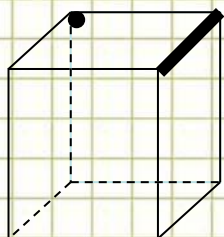
а)



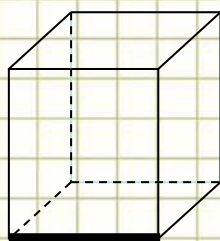
б)



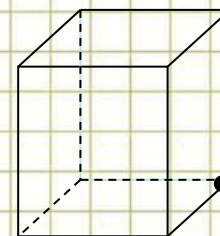
в)



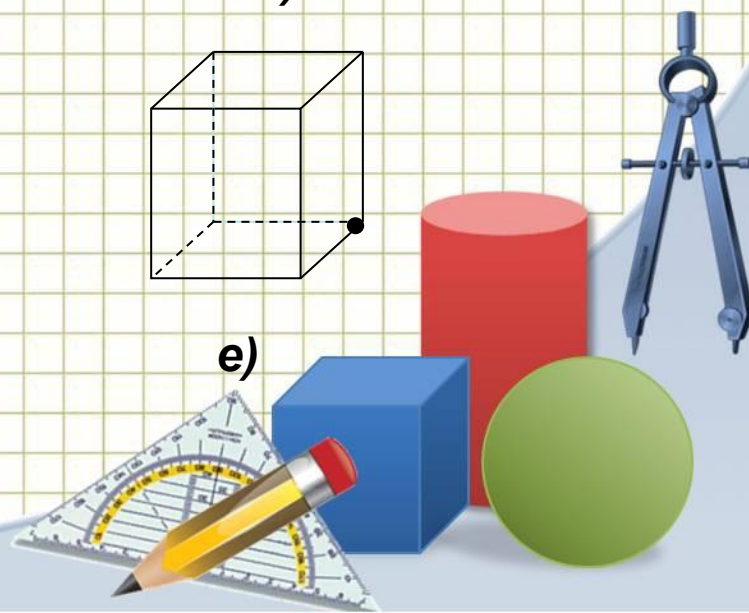
г)

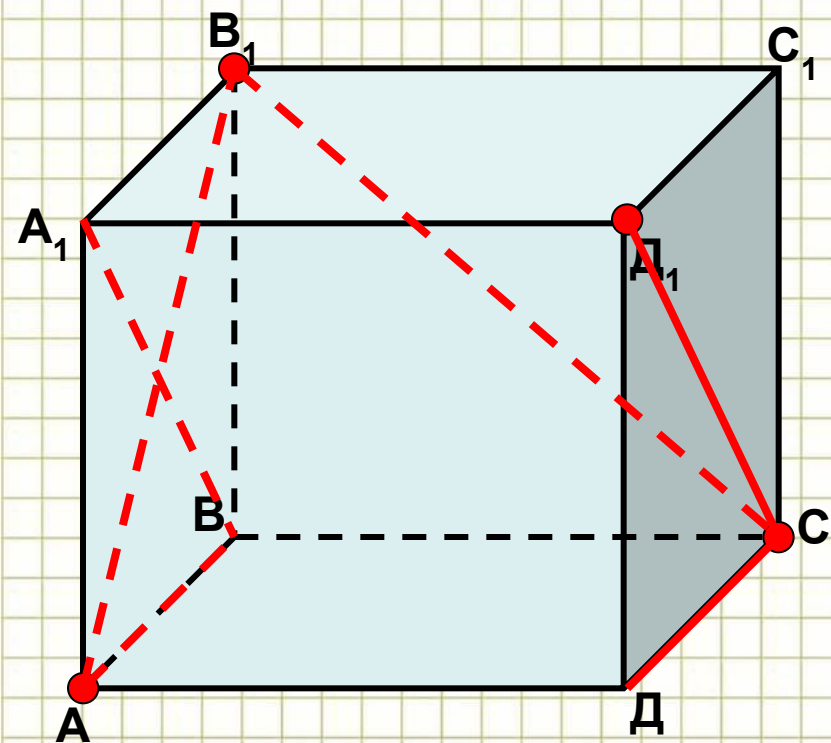


д)



е)





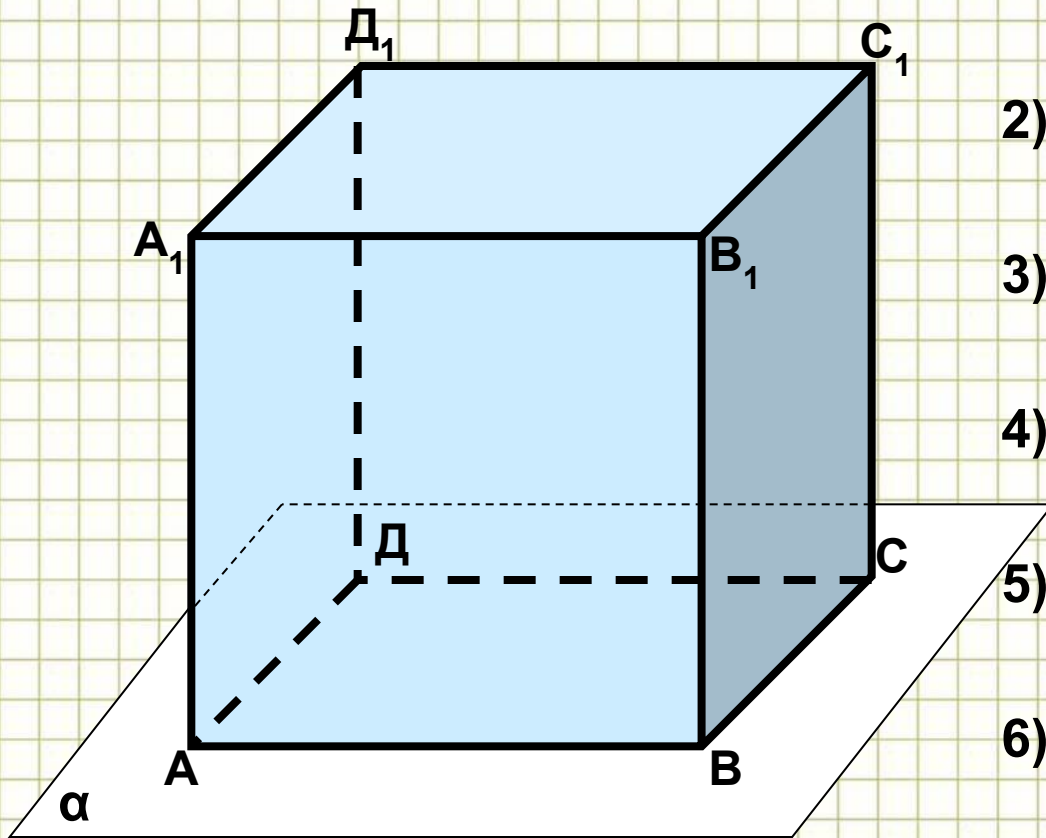
1. Изобразите в тетради куб (видимые линии – сплошной линией, невидимые – пунктиром).
2. Обозначьте вершины куба заглавными буквами $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
3. Выделите цветным карандашом:
 - вершины A, C, B_1, D_1
 - отрезки $AB, CD, B_1 C, D_1 C$
 - диагонали квадрата $AA_1 B_1 B$

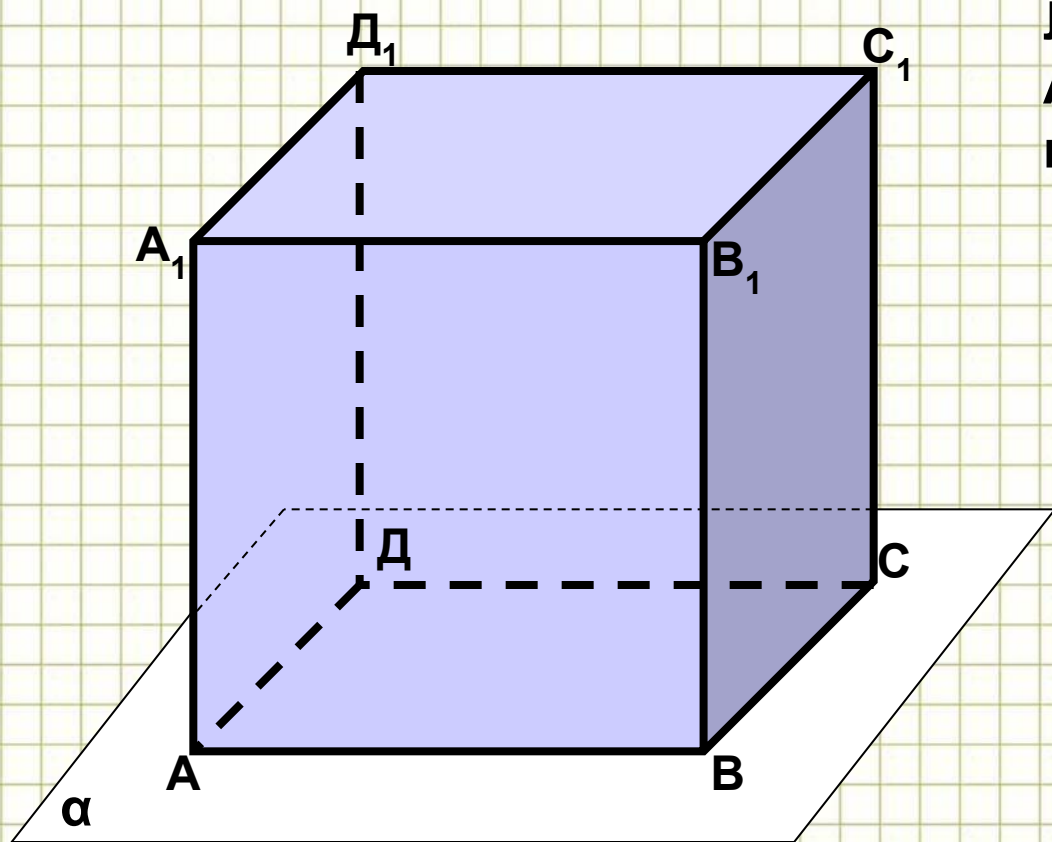


Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

Найдите:

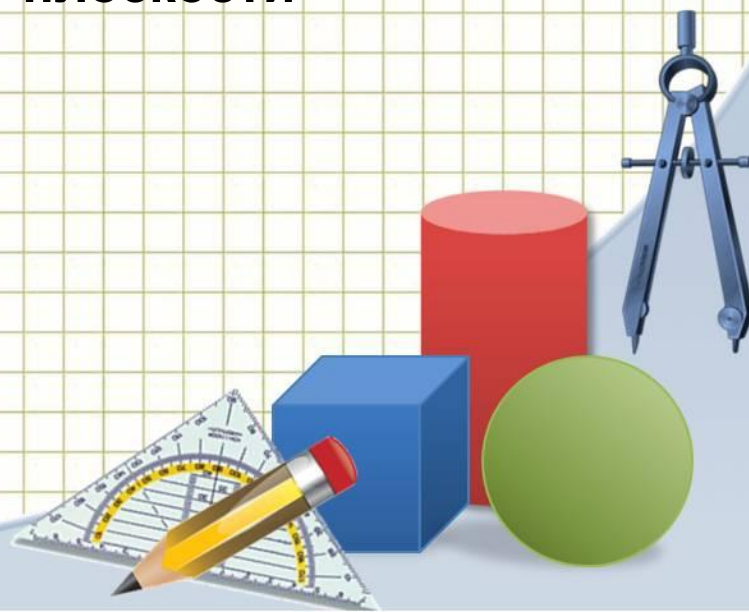
- 1) Несколько точек, которые лежат в плоскости α ;
- 2) Несколько точек, которые не лежат в плоскости α ;
- 3) Несколько прямых, которые лежат в плоскости α ;
- 4) Несколько прямых, которые не лежат в плоскости α ;
- 5) Несколько прямых, которые пересекают прямую BC ;
- 6) Несколько прямых, которые не пересекают прямую BC .





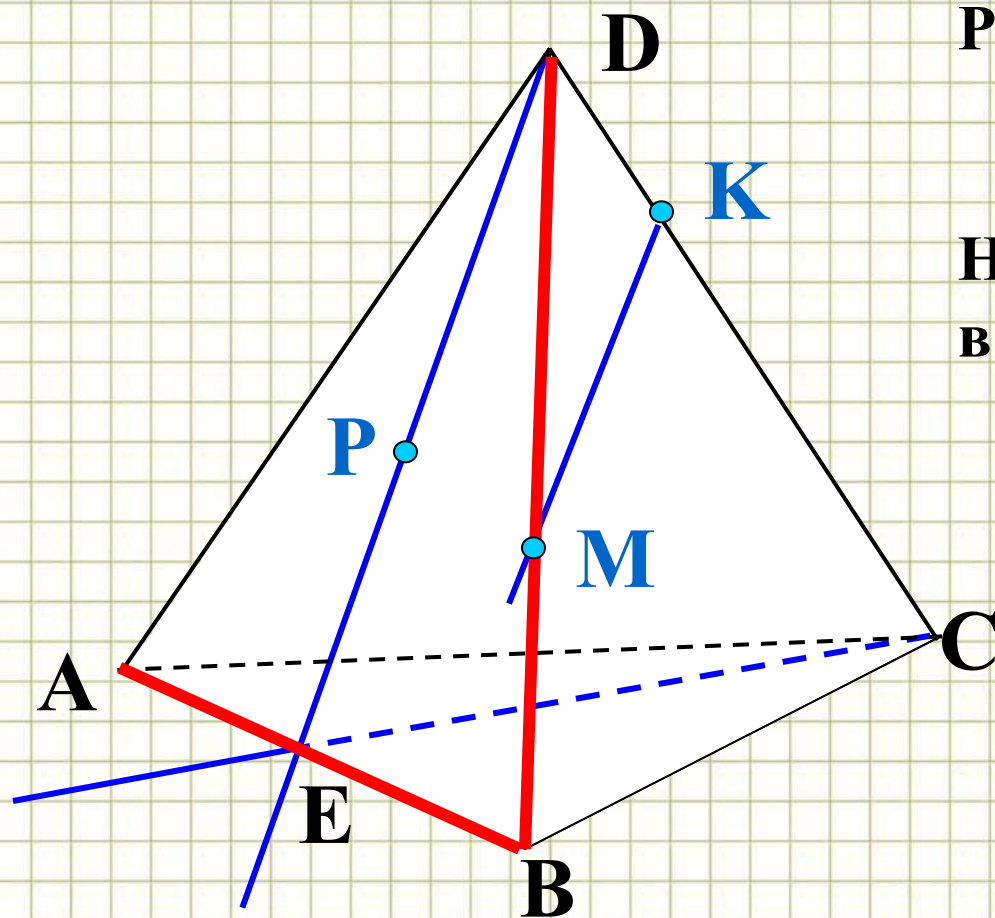
Лежат ли прямые AA_1 ,
 AB , AD в одной
плоскости?

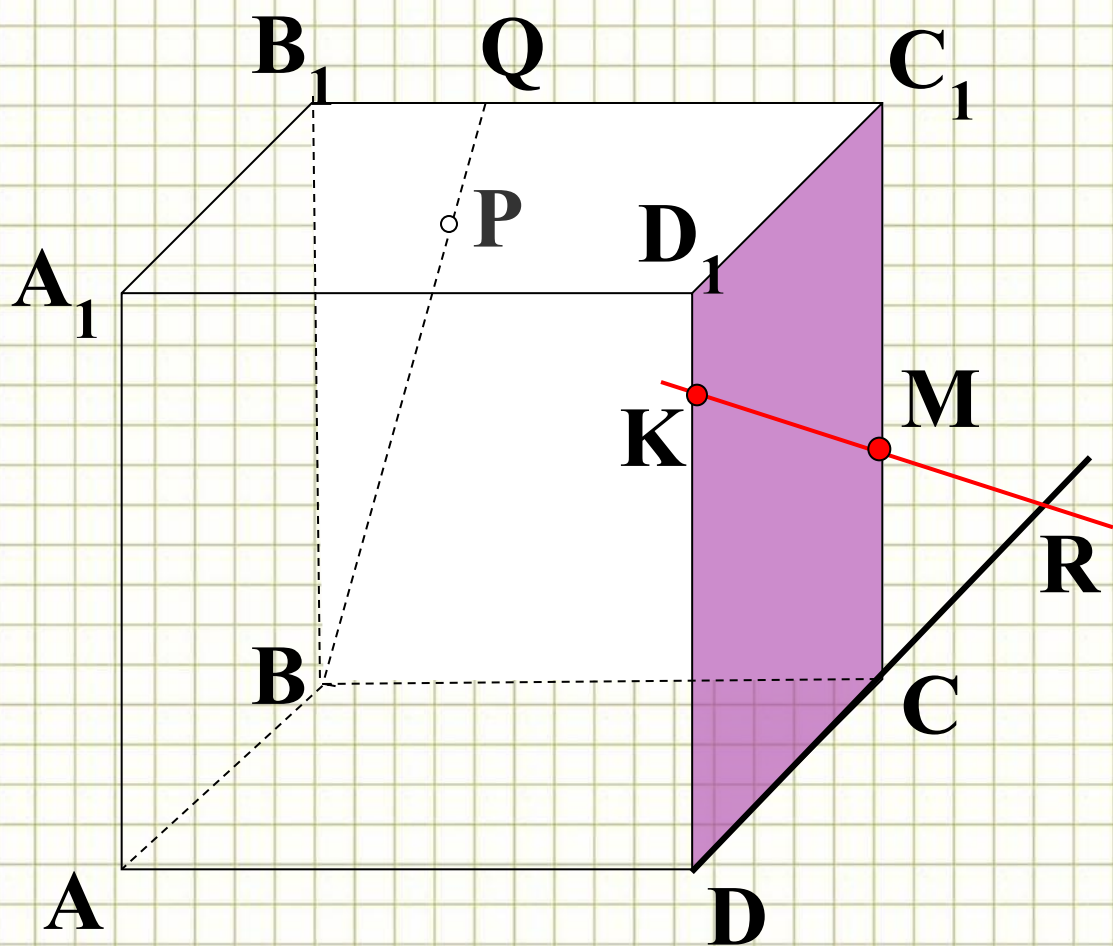
Прямые AA_1 , AB , AD
проходят через точку A ,
но не лежат в одной
плоскости



**Назовите плоскости, в
которых лежат прямые
PE, MK, DB, AB, EC**

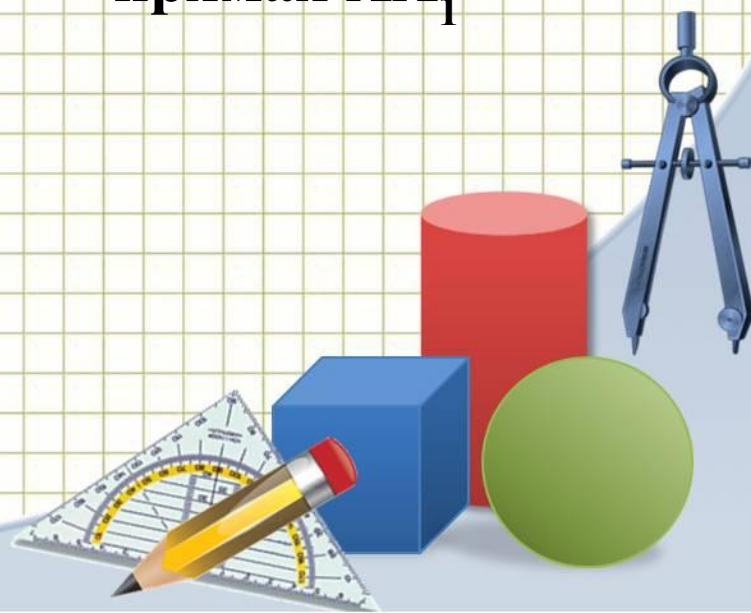
**Назовите точки, лежащие
в плоскостях ADB и DBC**





Назовите точки,
лежащие в
плоскостях DCC_1 и
 BQC

Назовите плоскости,
в которых лежит
прямая AA_1

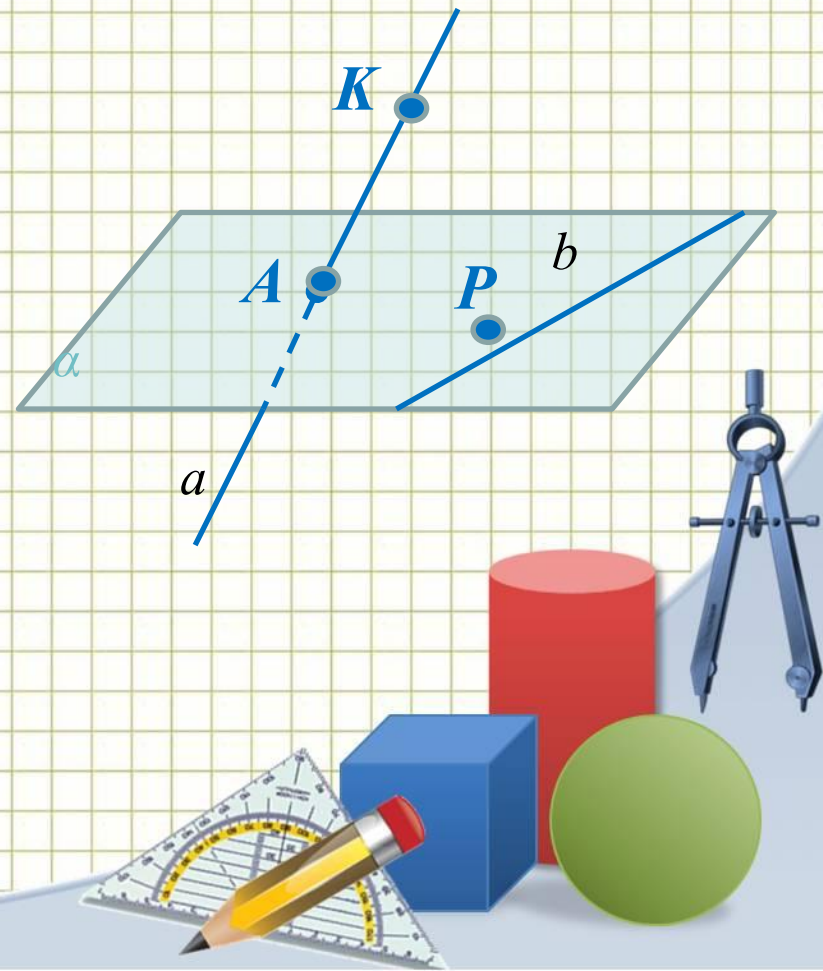


Задания

для самостоятельной работы:

- *Задание 1.*

Запишите с помощью символов взаимное расположение точек, прямых и плоскостей, изображенных на рисунке.



Задания

для самостоятельной работы:

• Задание 2.

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Запишите с помощью символики
ответы на вопросы:

а) По какой прямой пересекаются
плоскости:

- 1) (ABC) и $(AA_1 D_1)$;
- 2) $(AA_1 B_1)$ и $(AA_1 D)$;
- 3) $(BB_1 C_1)$ и $(CC_1 D_1)$.

б) Каким плоскостям принадлежат
точки: A , C_1 , D ?

в) Принадлежит ли B_1 плоскости:

- 1) (ABC) ; 2) $(BB_1 C_1)$; 3) $(A_1 B_1 C_1)$?

