

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕГЭ

“При изучении наук примеры не менее поучительны, нежели правила”

Ньютон

“Примеры учат больше, чем теория”

Ломоносов

Геометрический смысл производной



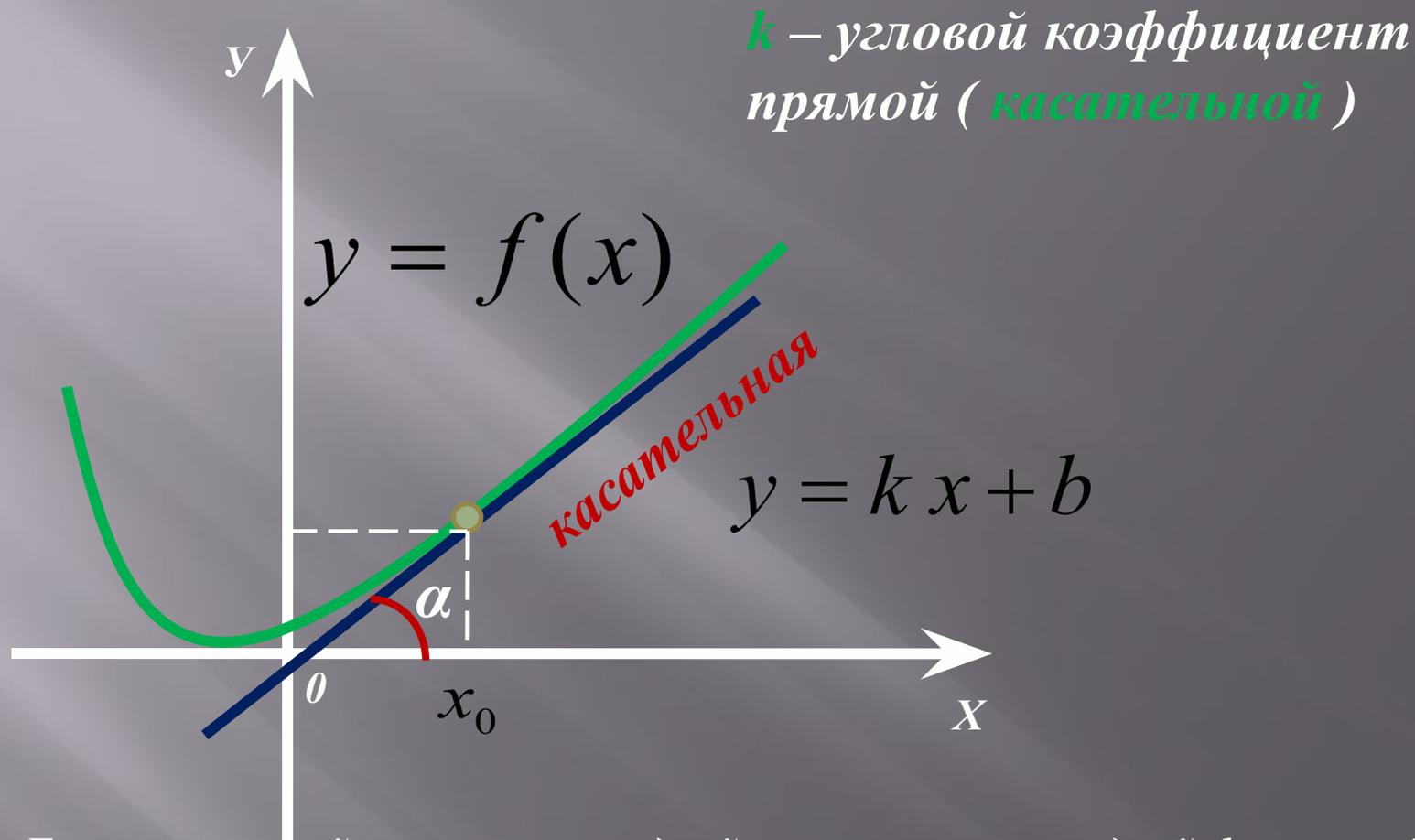
ц

Готфрид
Вильгельм
Лейбниц
(1646-1716)

Механический смысл производной

Исаак Ньютон
(1643 – 1727)





Геометрический смысл производной: значение производной функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, т.е. $f'(x_0) = k$

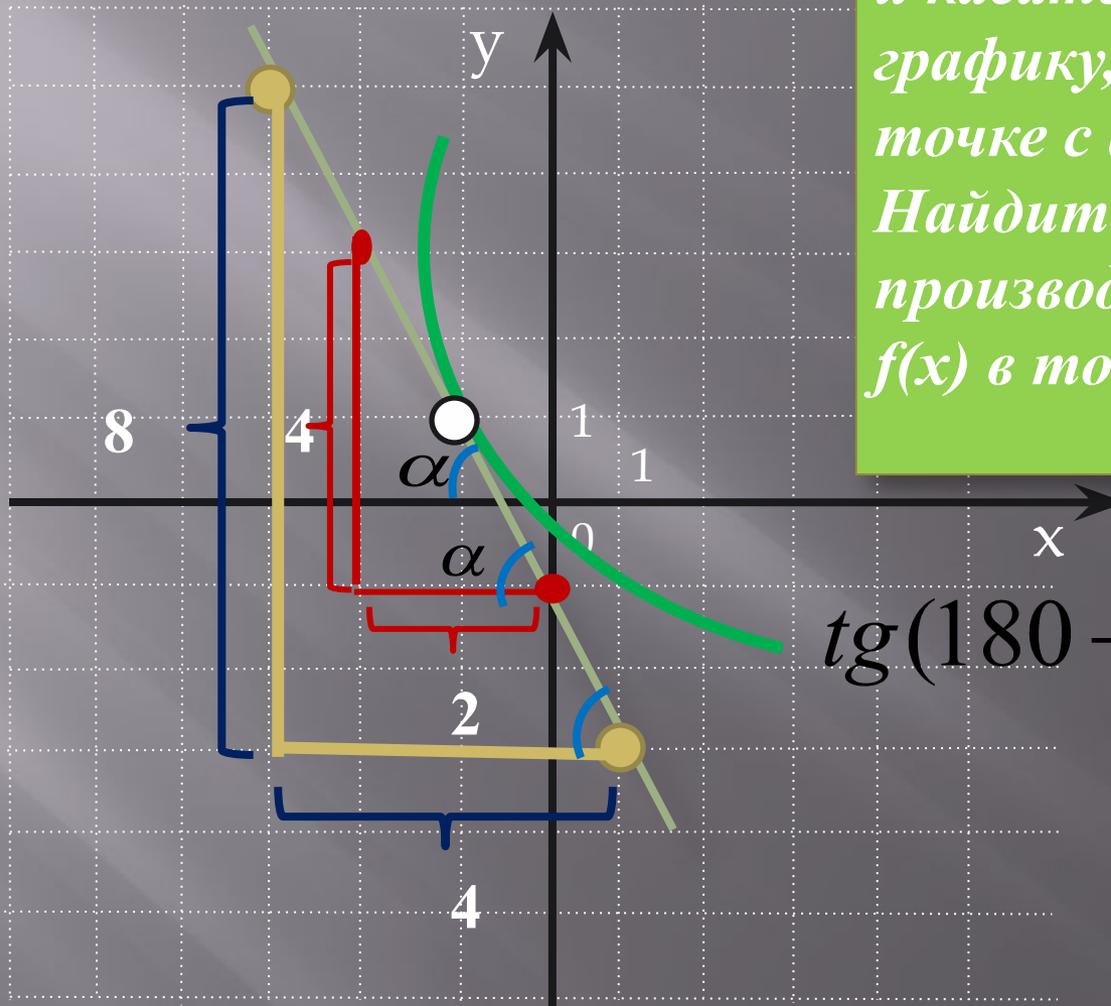
Поскольку $k = \operatorname{tg} \alpha$, то верно равенство $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$

□ *Острый или тупой угол образует касательная к графику функции в точке x_0 с положительной полуосью Ox ?*

□ *Чему равен тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = x^2 + 2$ в точке $x_0 = -1$?*

Задание №1

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой -1 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = -1$.

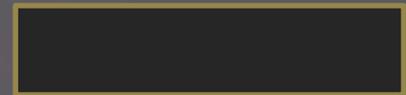


$$\operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$$

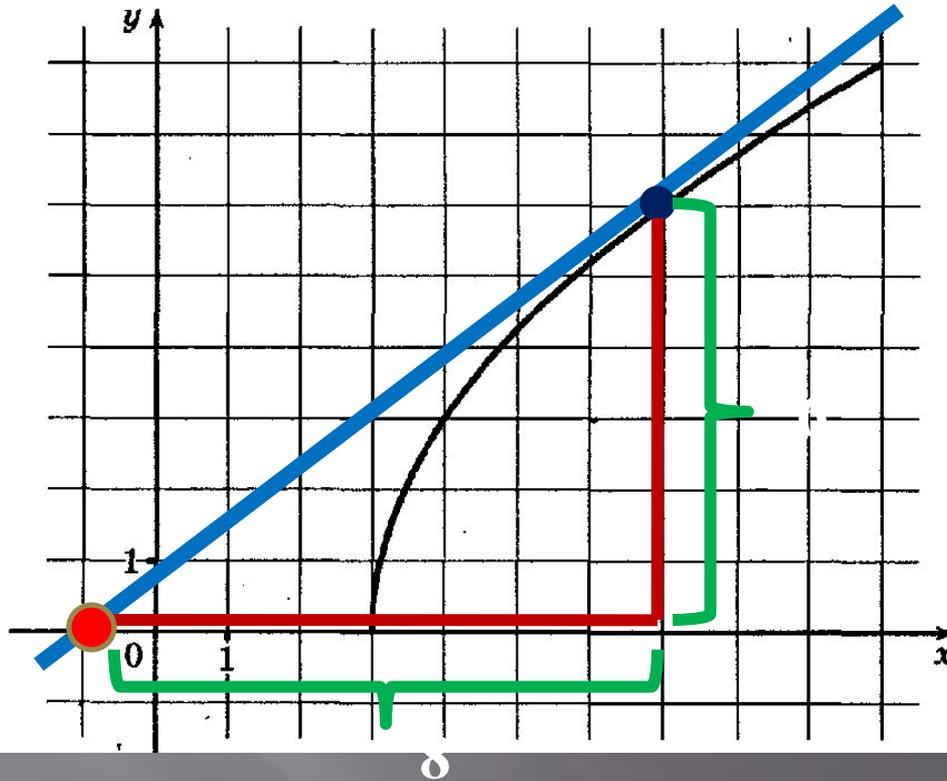
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{2}$$

$$f'(x_0) = -2$$



Задание №2

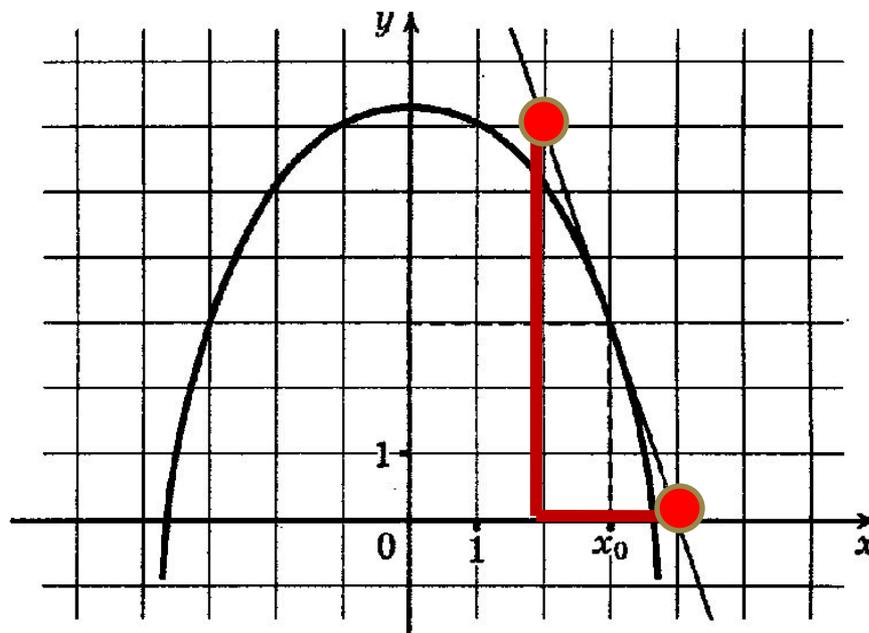
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-1; 0)$, касается графика этой функции в точке с абсциссой 7. Найдите $f'(7)$.



Ответ: В 8 0 , 7 5

Задание №3

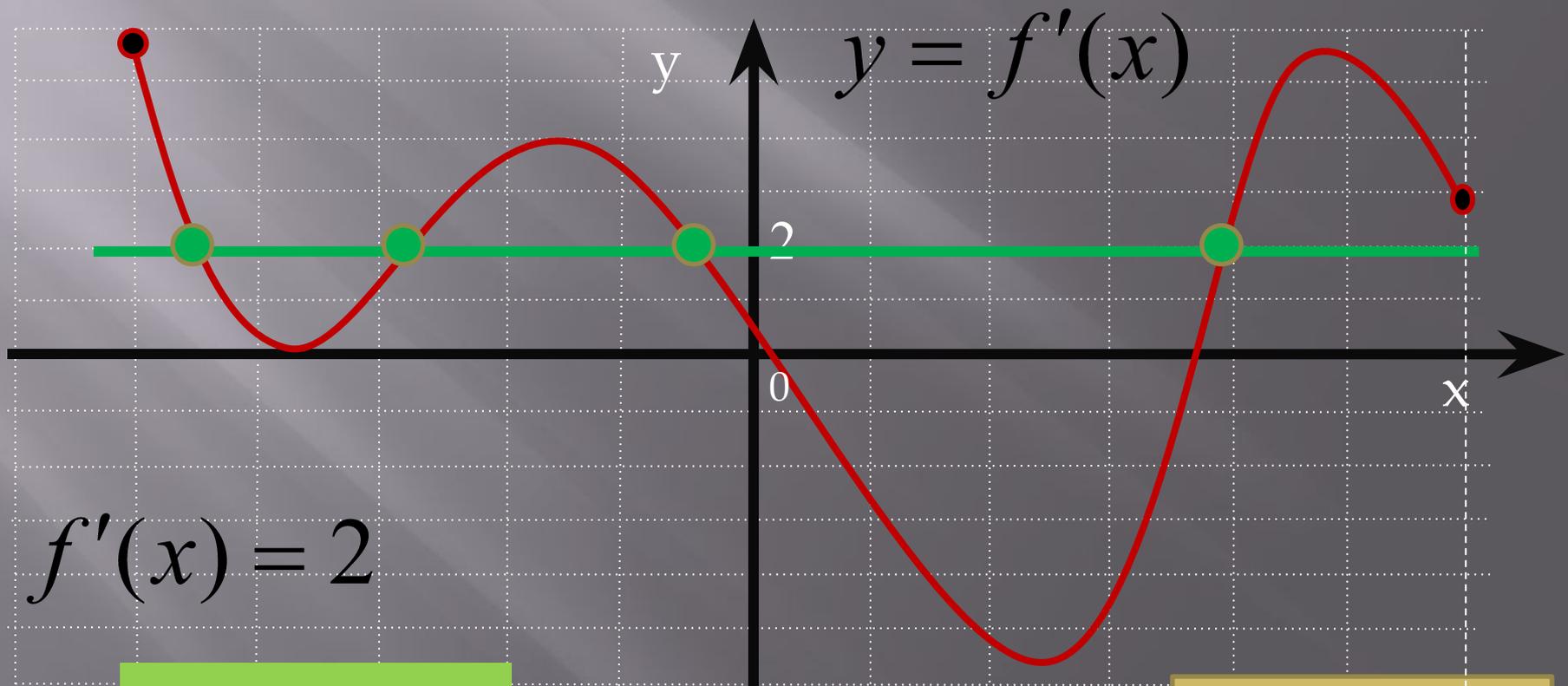
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0 .



Ответ: В 8 - 3

Задание №4

На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 5$ или совпадает с ней.

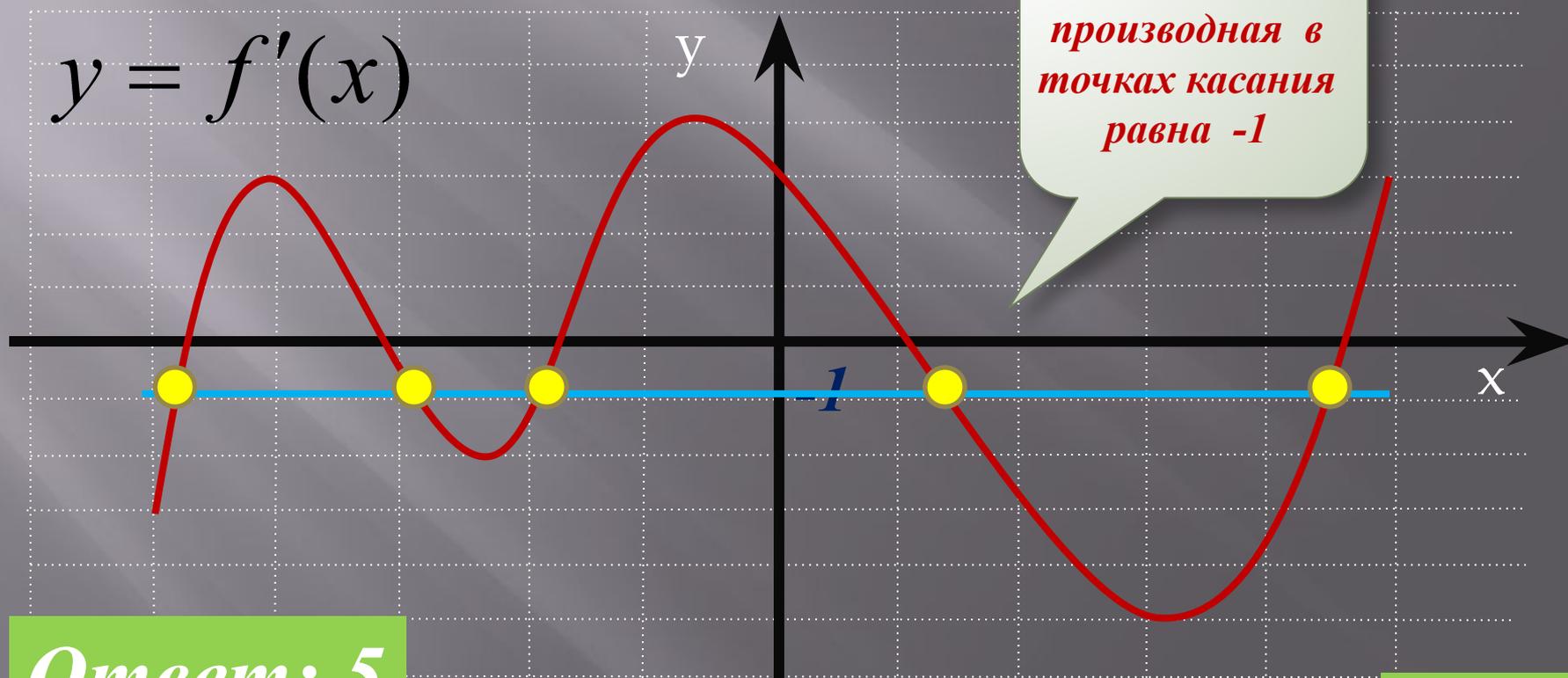


Ответ: 4

ПОДСКАЗКА

Задание №5

К графику функции $y = f(x)$ провели касательные под углом 135° к положительному направлению оси Ox . На рисунке изображён график производной функции. Укажите количество точек касания.

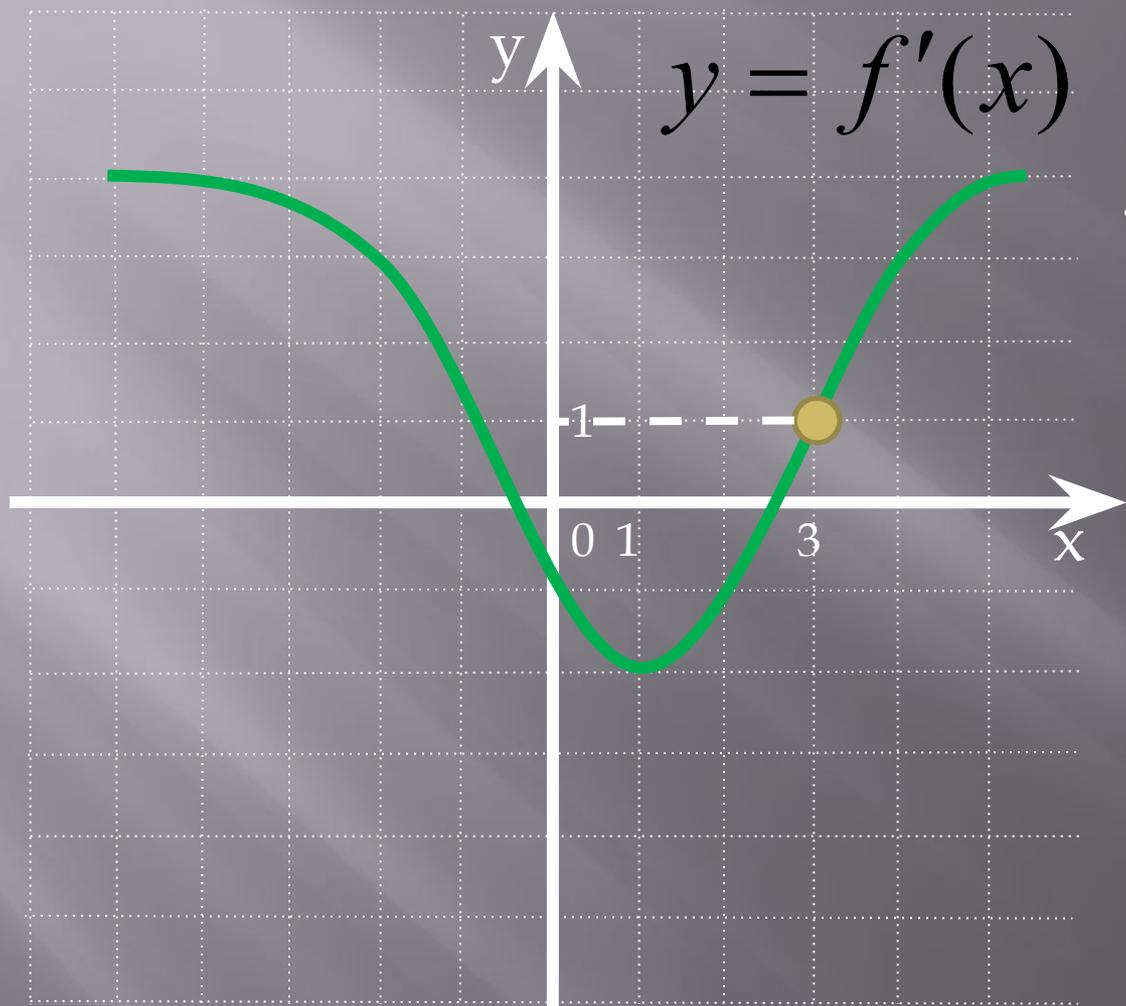


Ответ: 5

подсказк

а

Задание №6



К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = 3$. Определите градусную меру угла наклона касательной, если на рисунке изображён график производной этой функции.

$$f'(x_0) = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

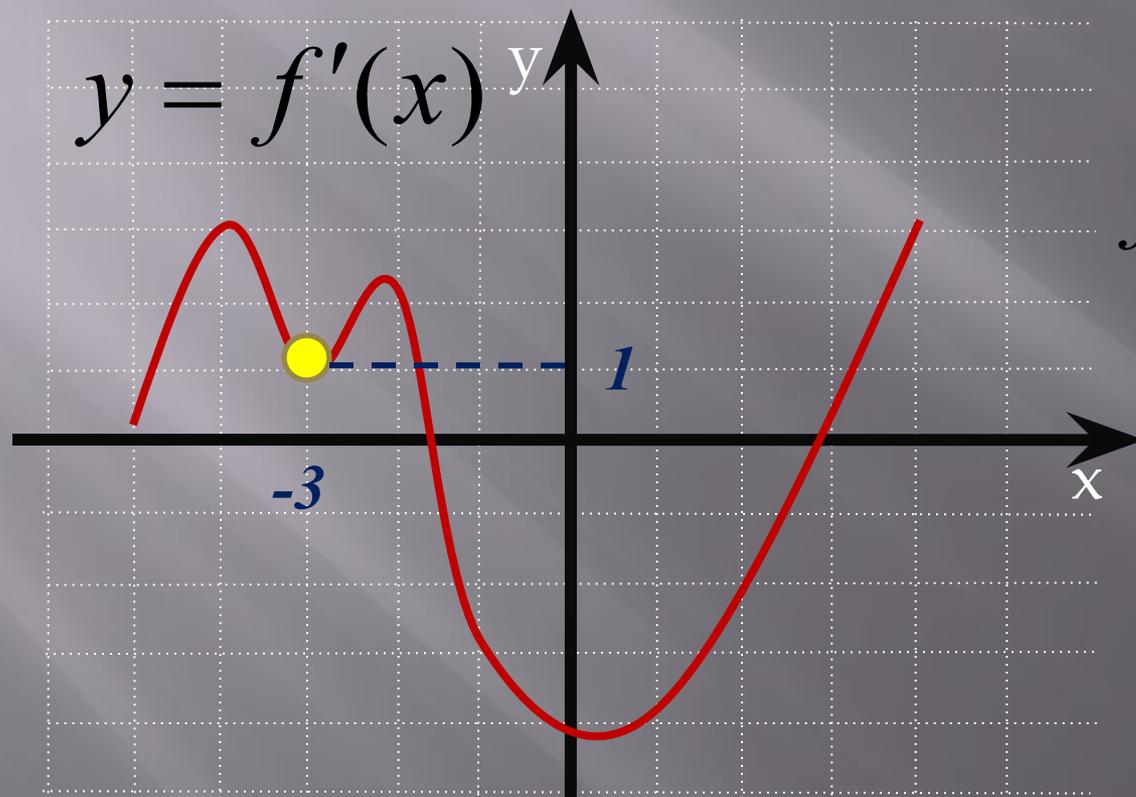
$$\alpha = 45^\circ$$

Ответ:

В8 4 5

Задание №7

По графику производной функции определите величину угла в градусах между положительным направлением оси Ox и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = -3$.



$$f'(-3) = 1 = \operatorname{tg} \alpha$$

Ответ:

В8 4 5

Задание №8

Прямая $y = 8x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

В8 0 , 5

Ответ:

подсказка

Задание №9

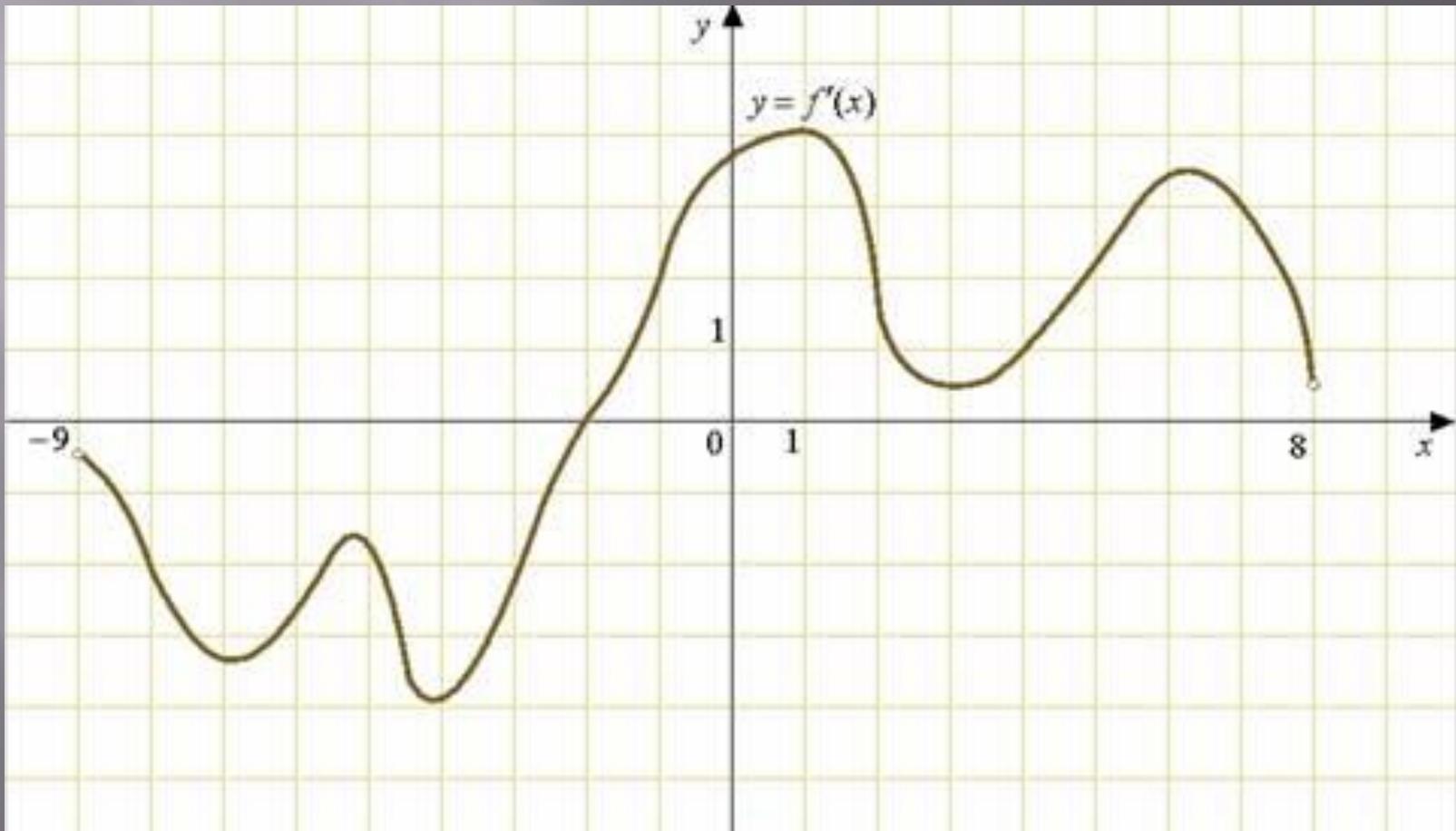
Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

В8 - 1

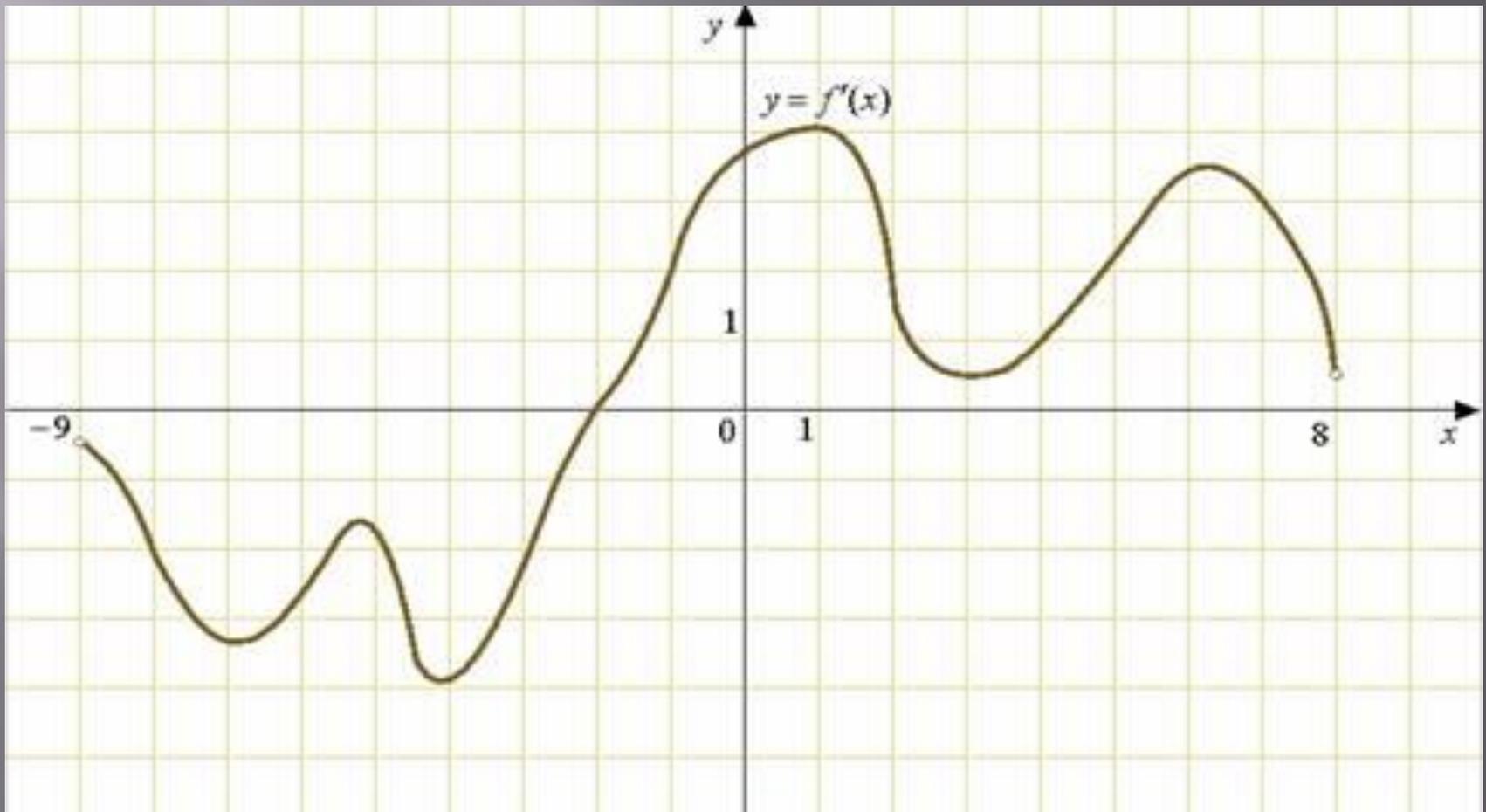
Ответ:

подсказка

1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=x-7$ или совпадает с ней.

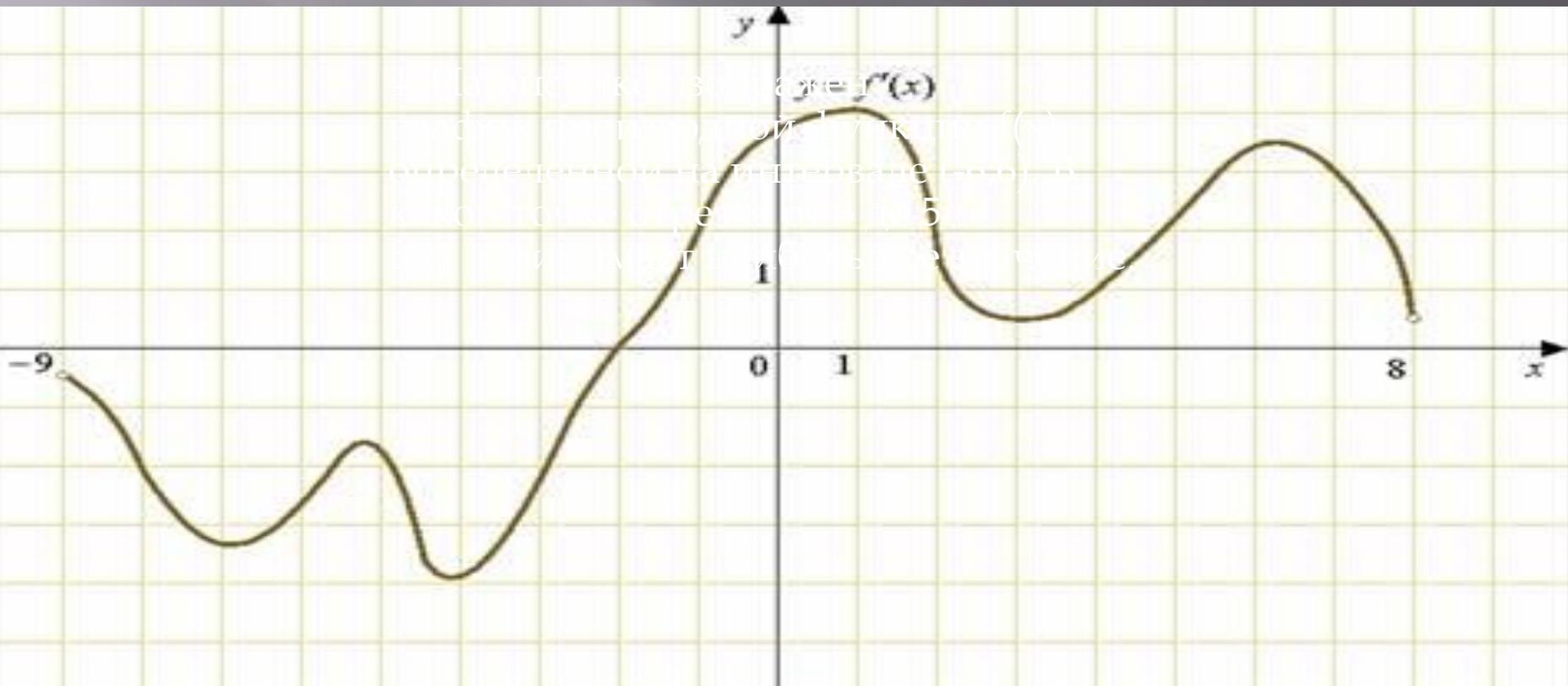


2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$.. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-x+8$ или совпадает с ней.

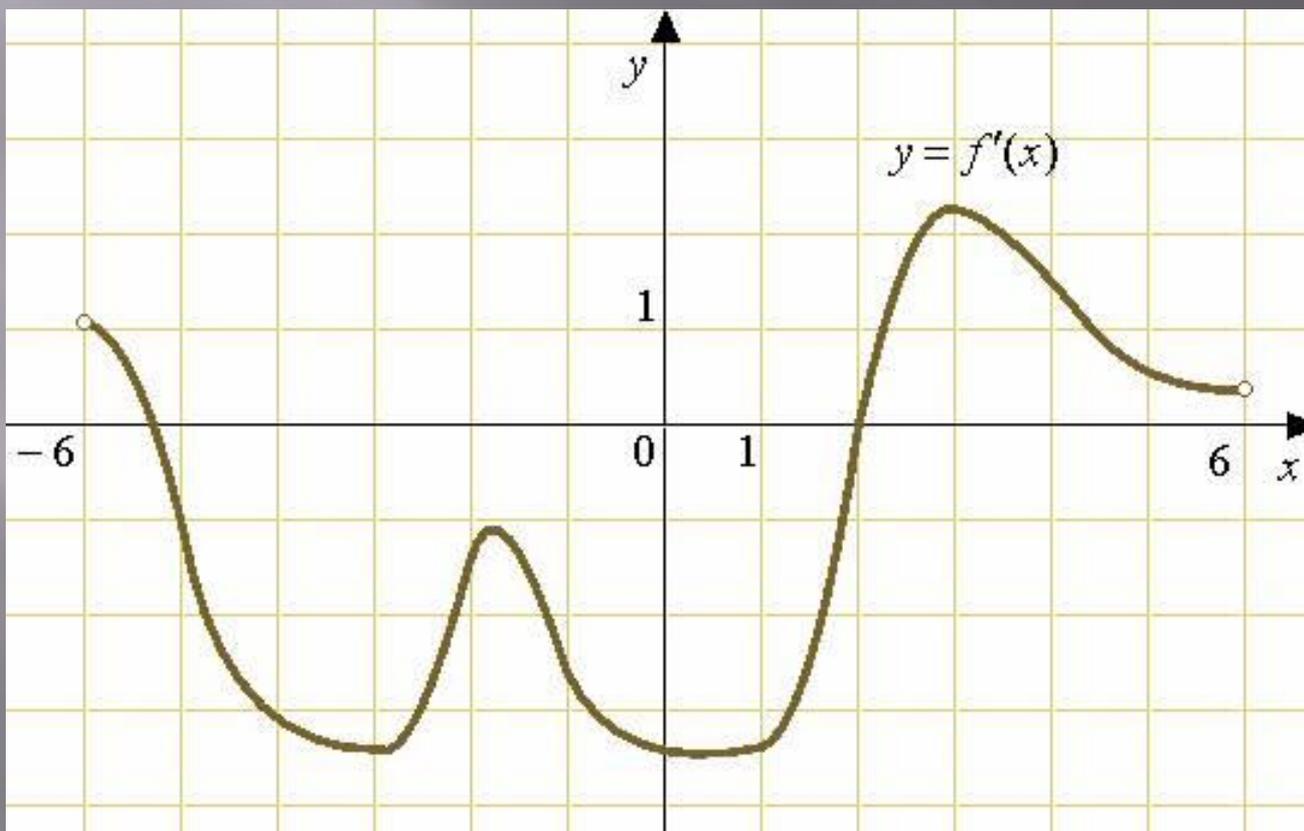


3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. В какой точке отрезка от -5 до -3 $f(x)$ принимает наименьшее значение .

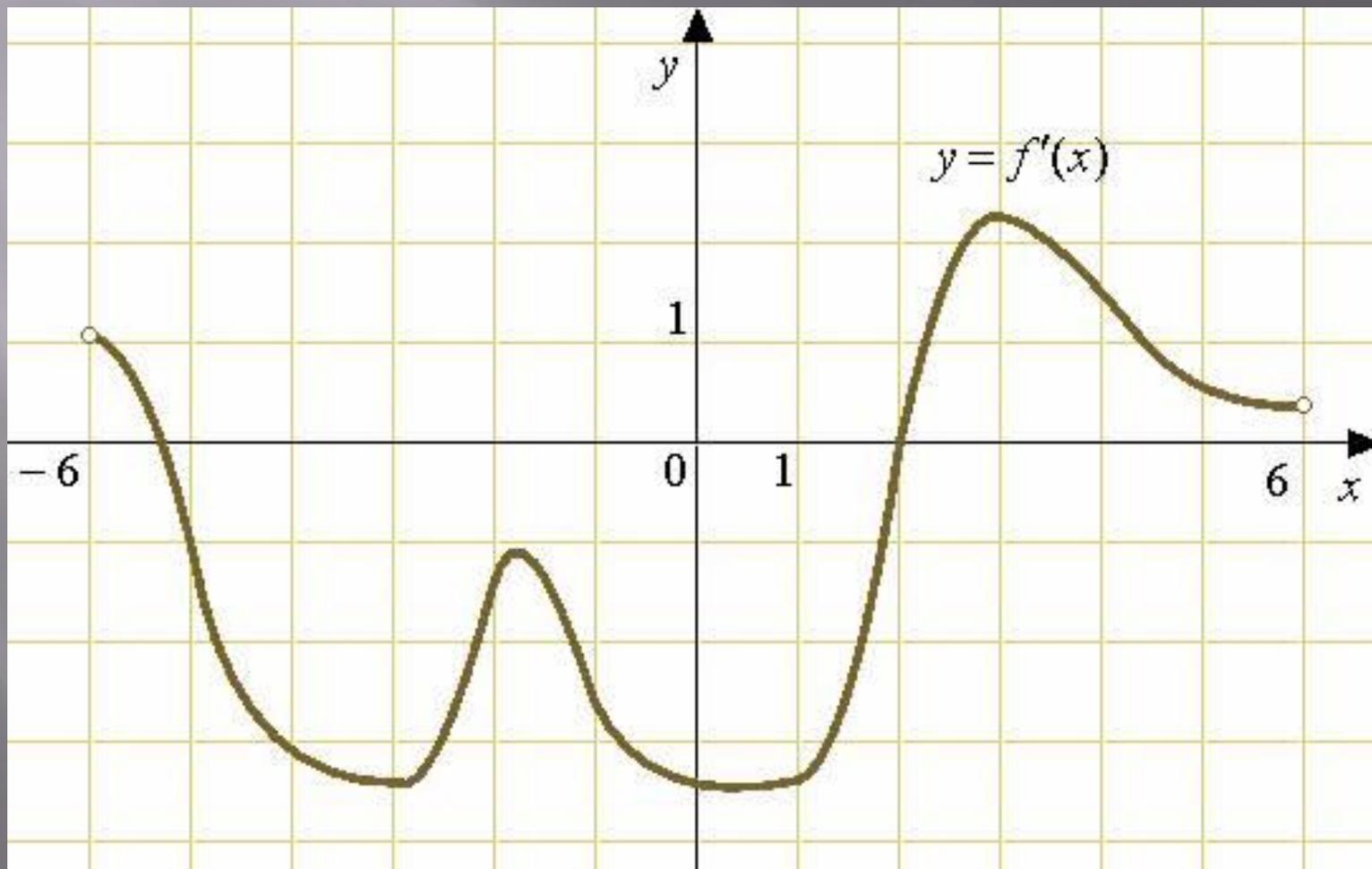
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. В какой точке отрезка от -5 до -3 $f(x)$ принимает наименьшее значение .



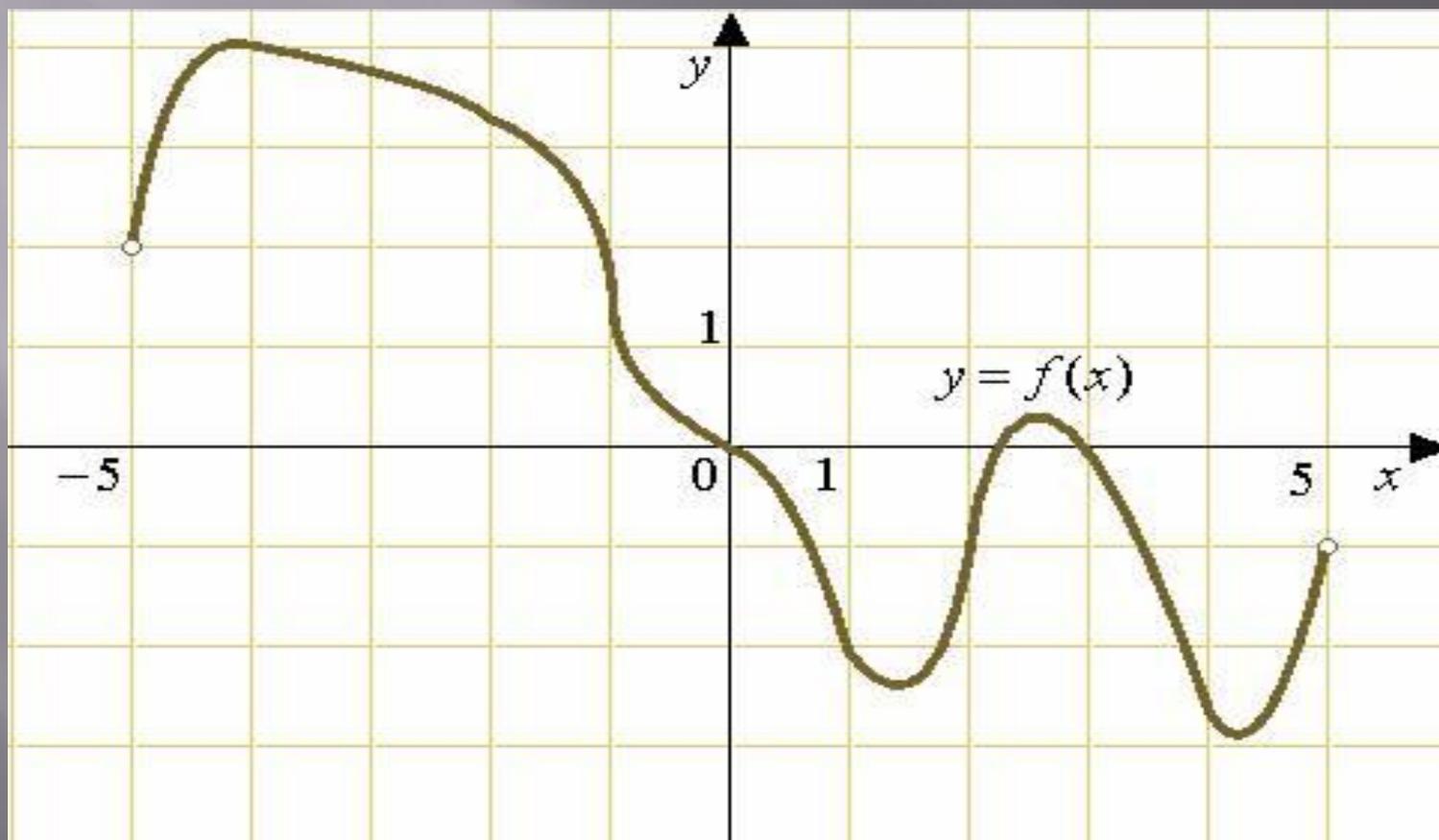
4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. В какой точке отрезка от 3 до 5 $f(x)$ принимает наибольшее значение.



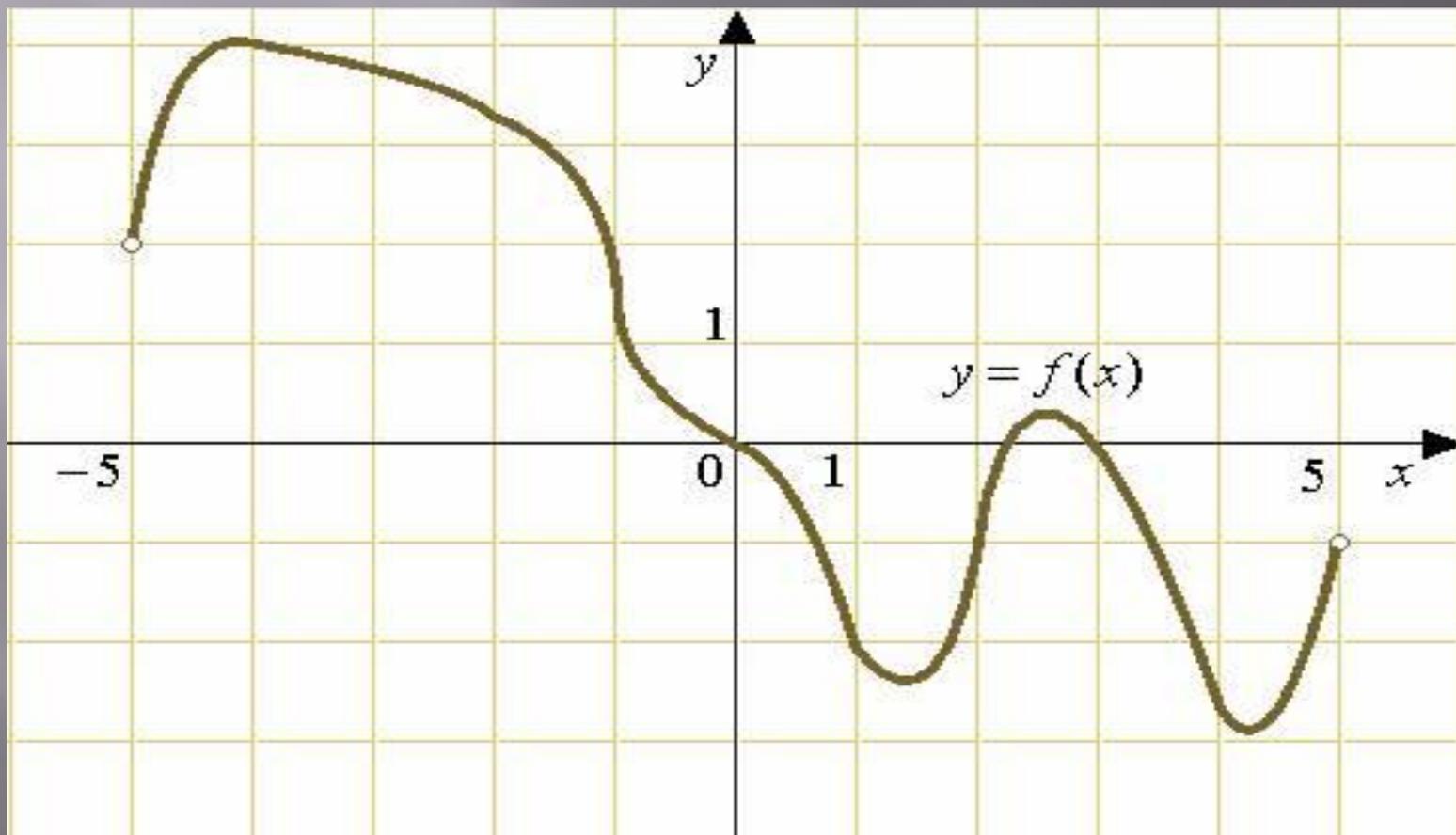
5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-4;5)$.



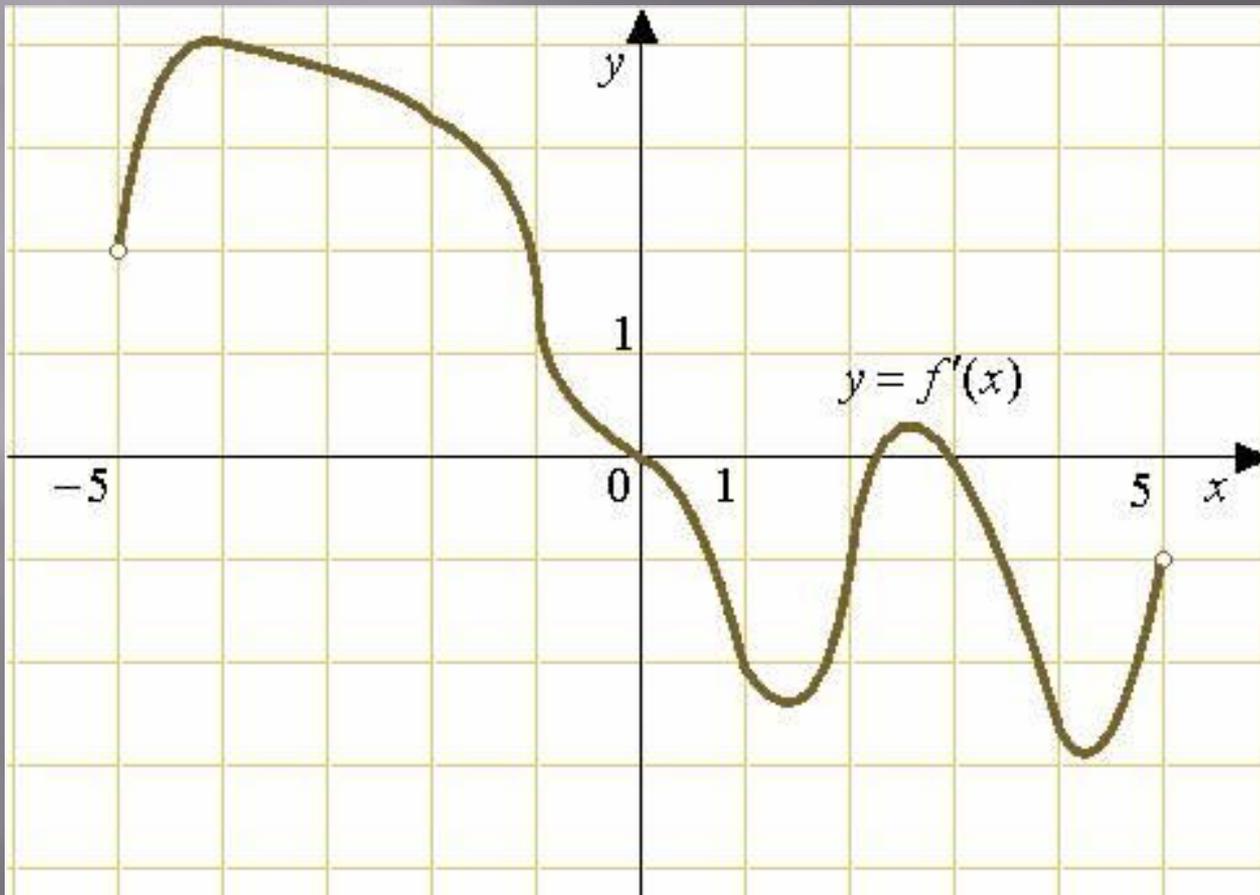
6. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=6$.



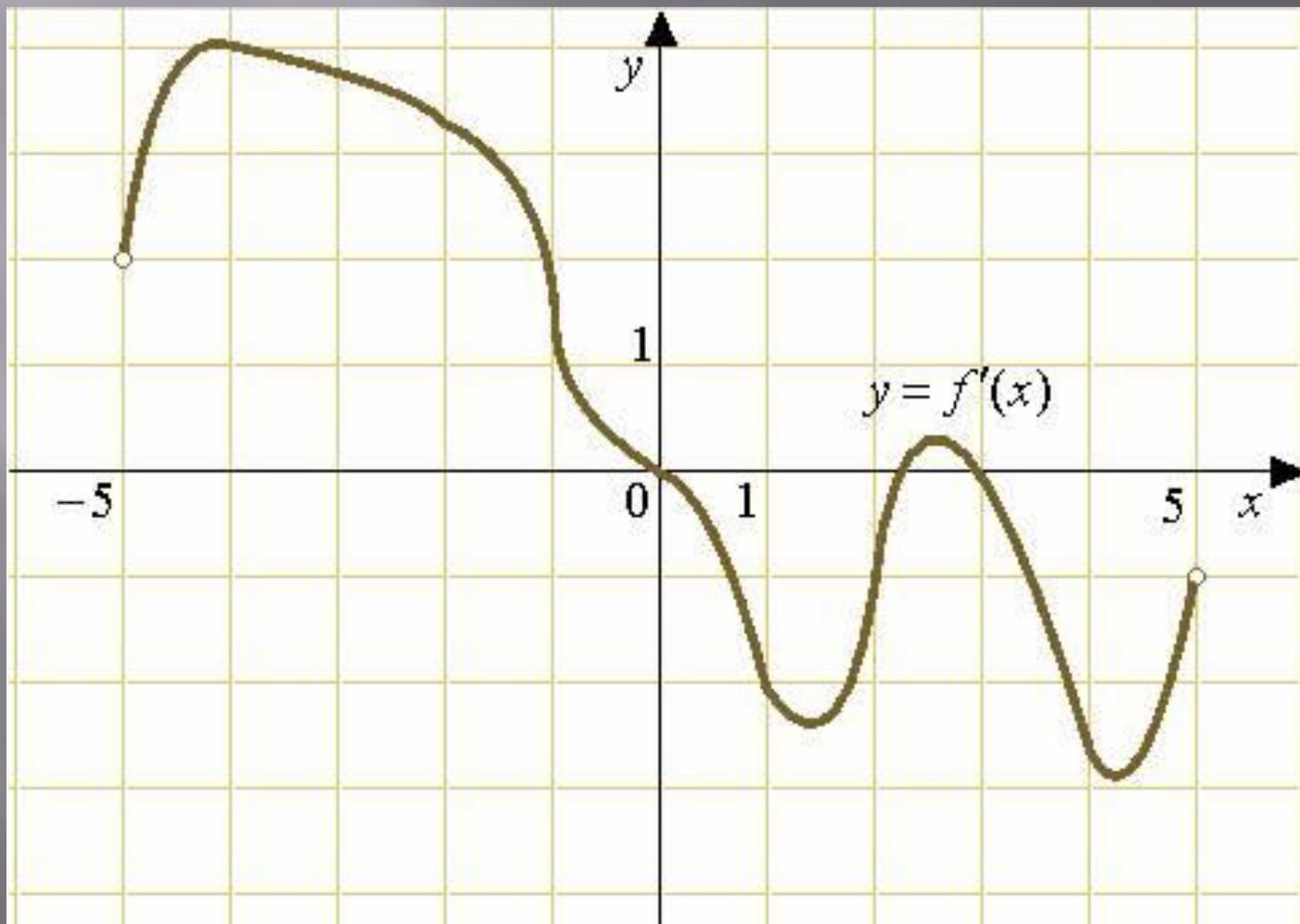
7. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



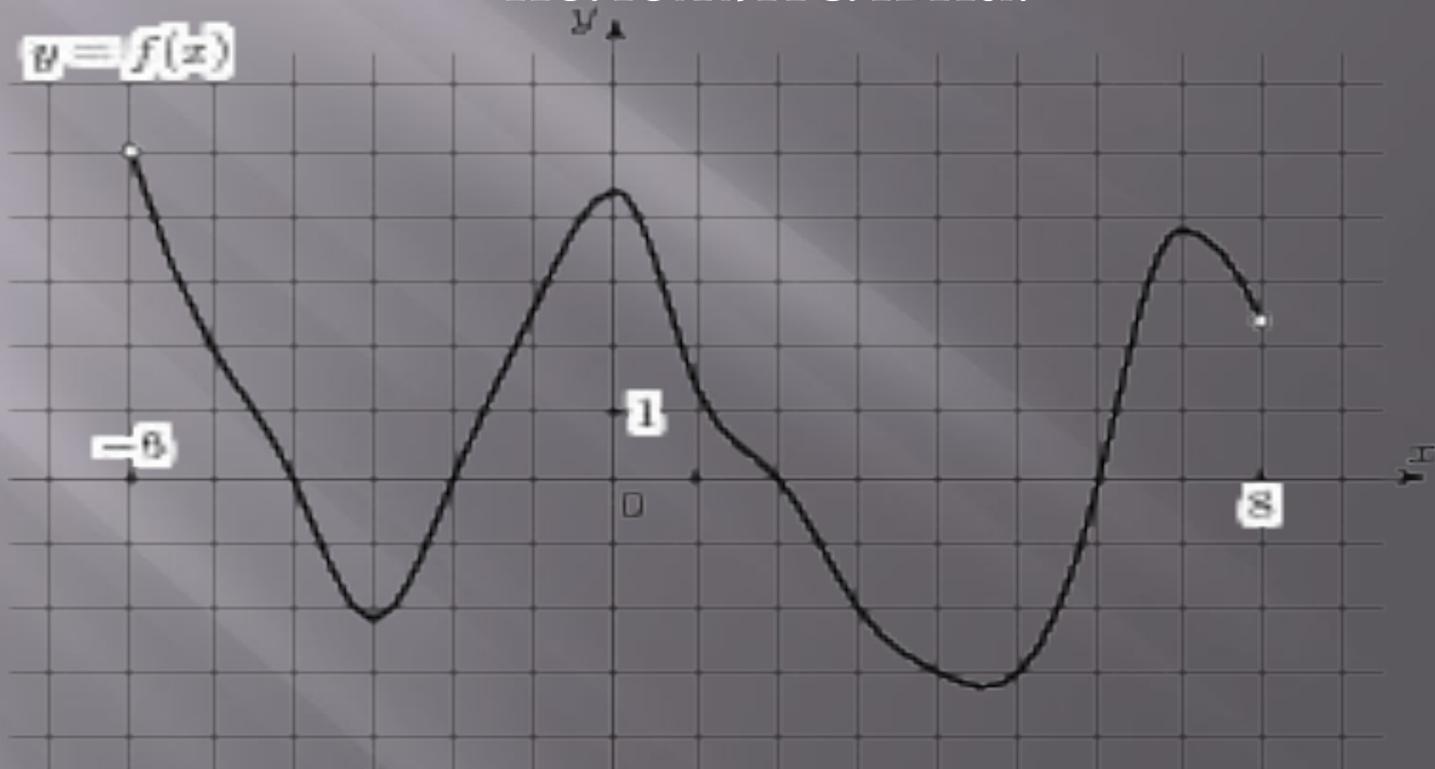
8. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. В какой точке отрезка от -4 до -1 $f(x)$ принимает наименьшее значение.



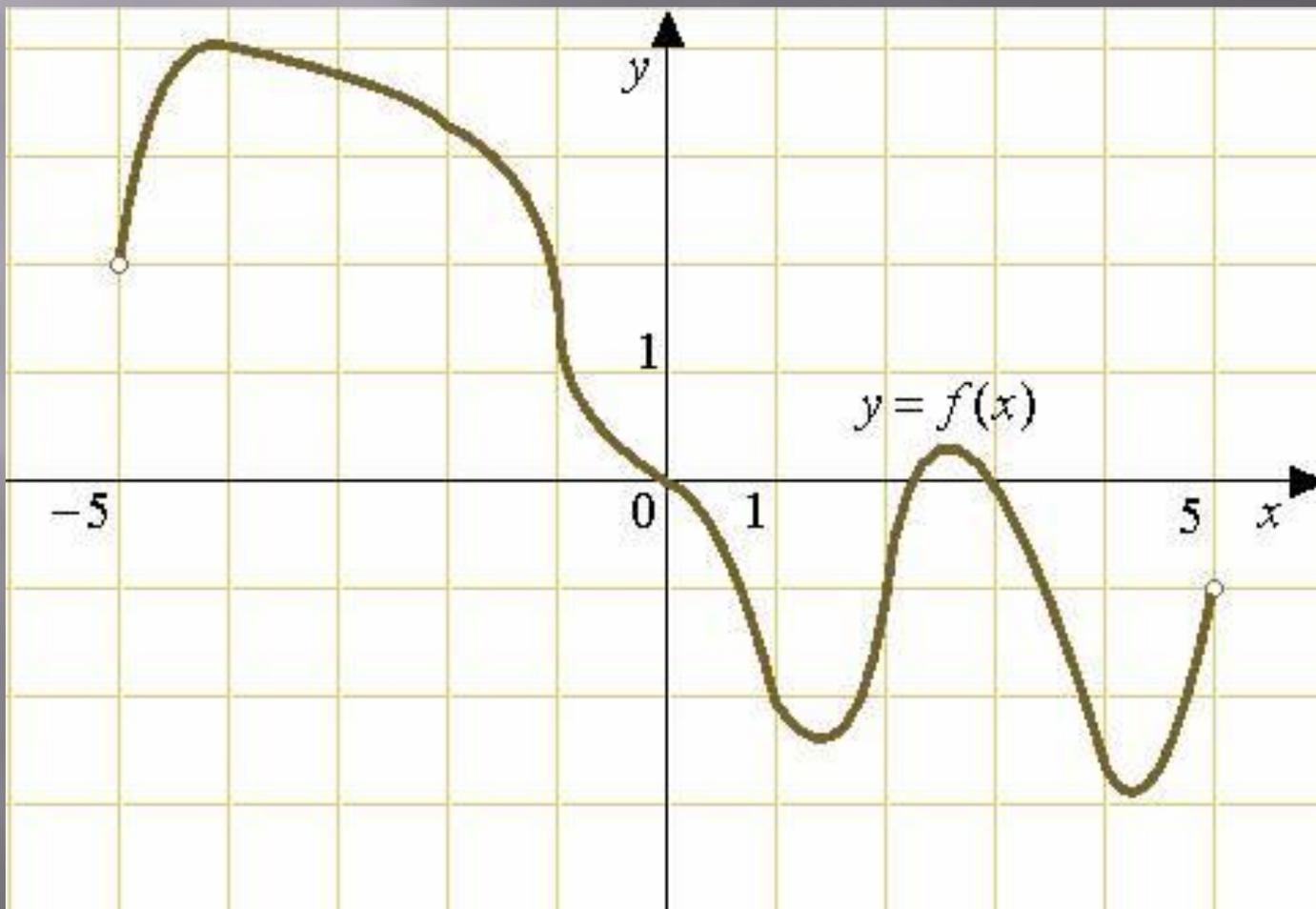
9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке от -4 до 4 .



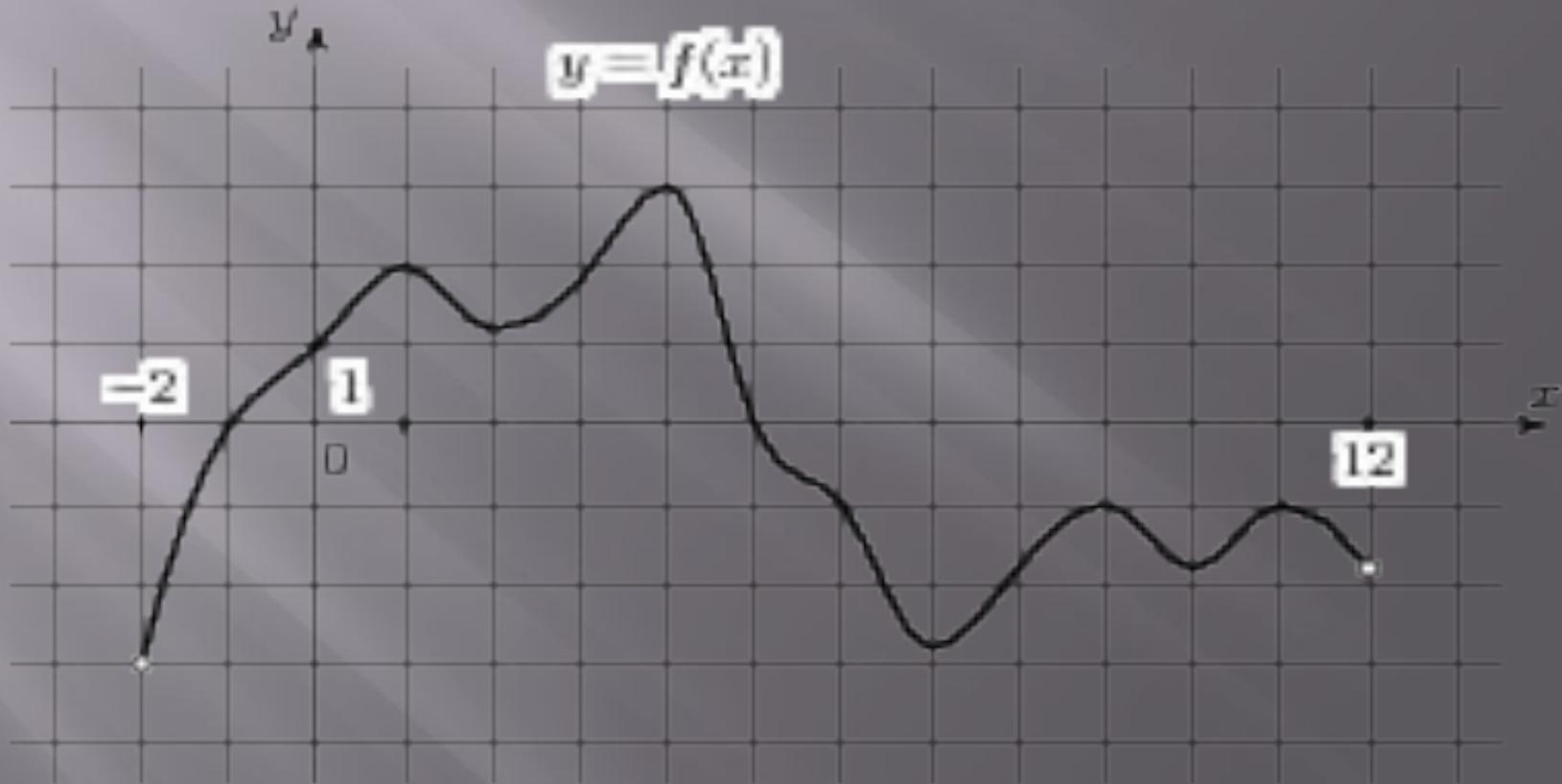
10. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



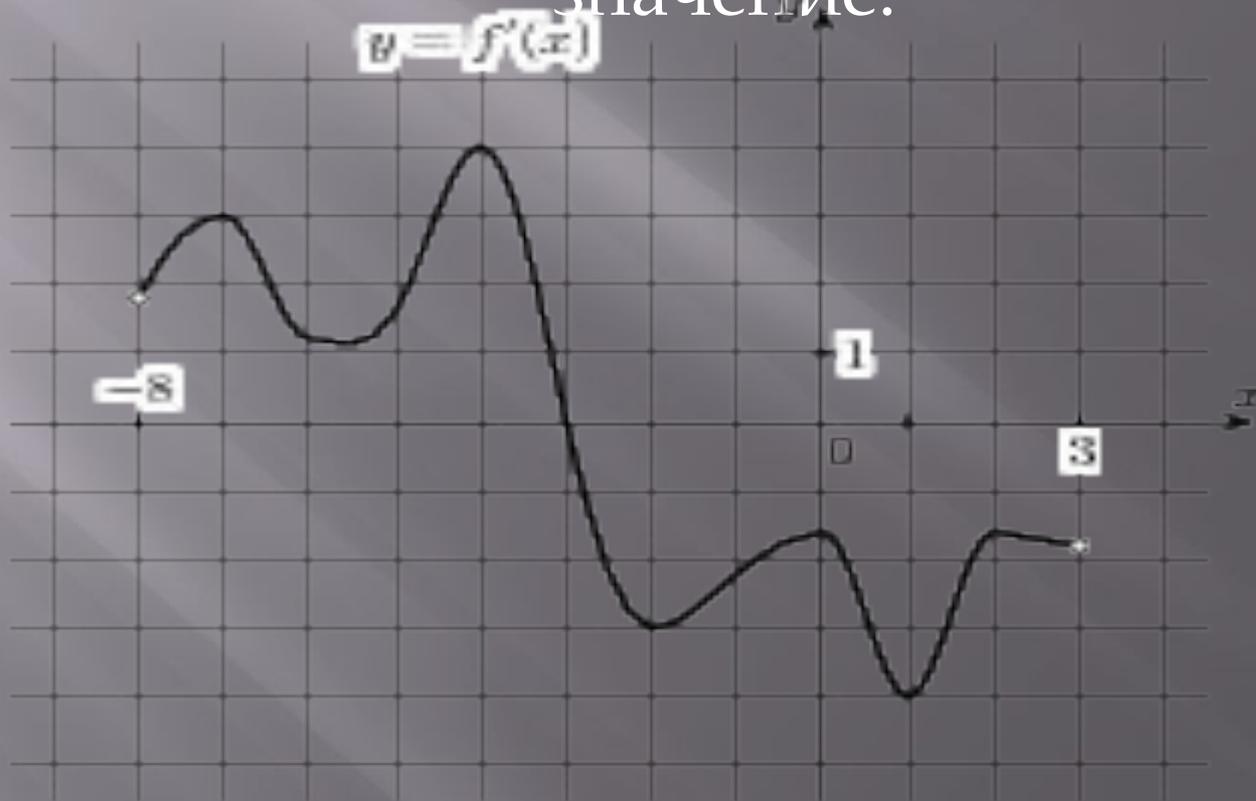
11. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



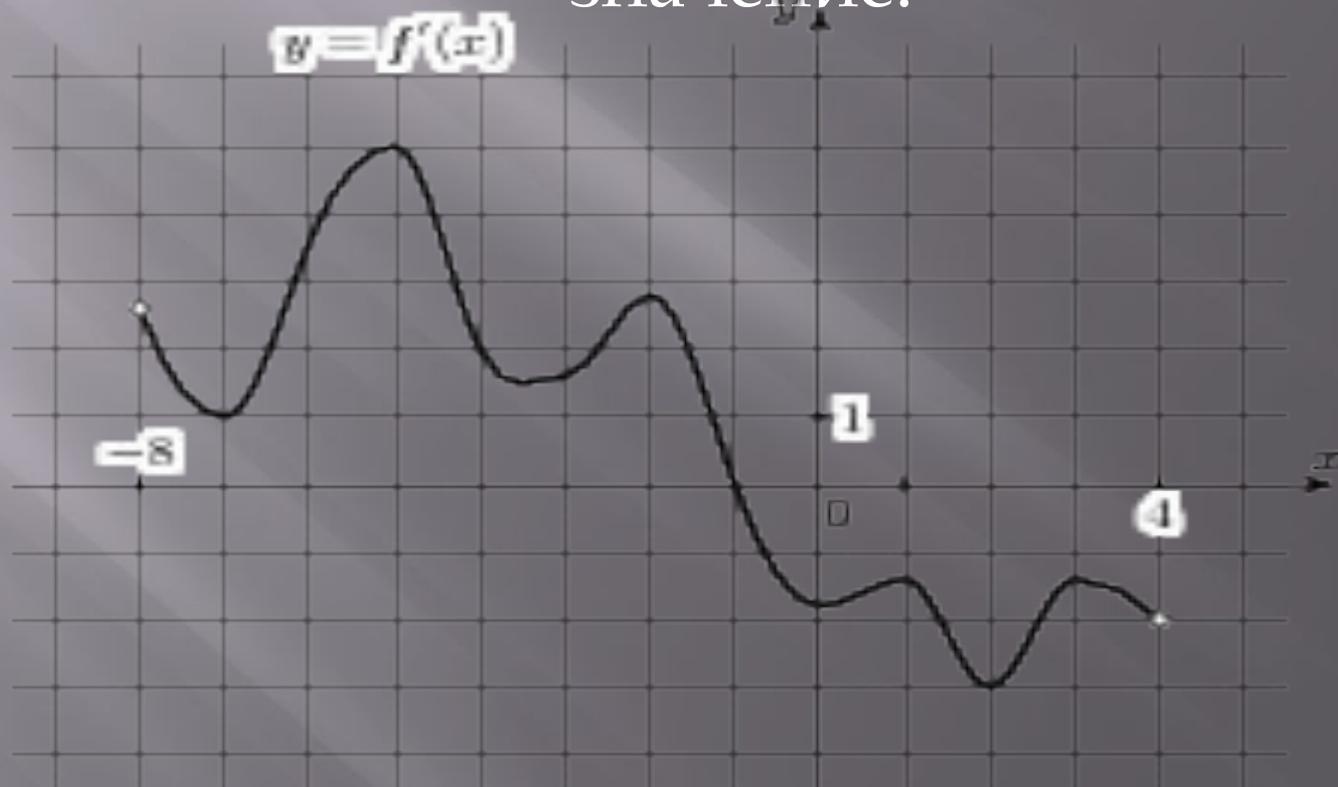
12. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;12)$.
Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



13. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. В какой точке отрезка от -3 до 2 $f(x)$ принимает наибольшее значение.



14. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;4)$. В какой точке отрезка от -7 до -3 $f(x)$ принимает наименьшее значение.



*Рано или поздно всякая
математическая
идея находит применение в том или
ином деле.
А. Н. Крылов*



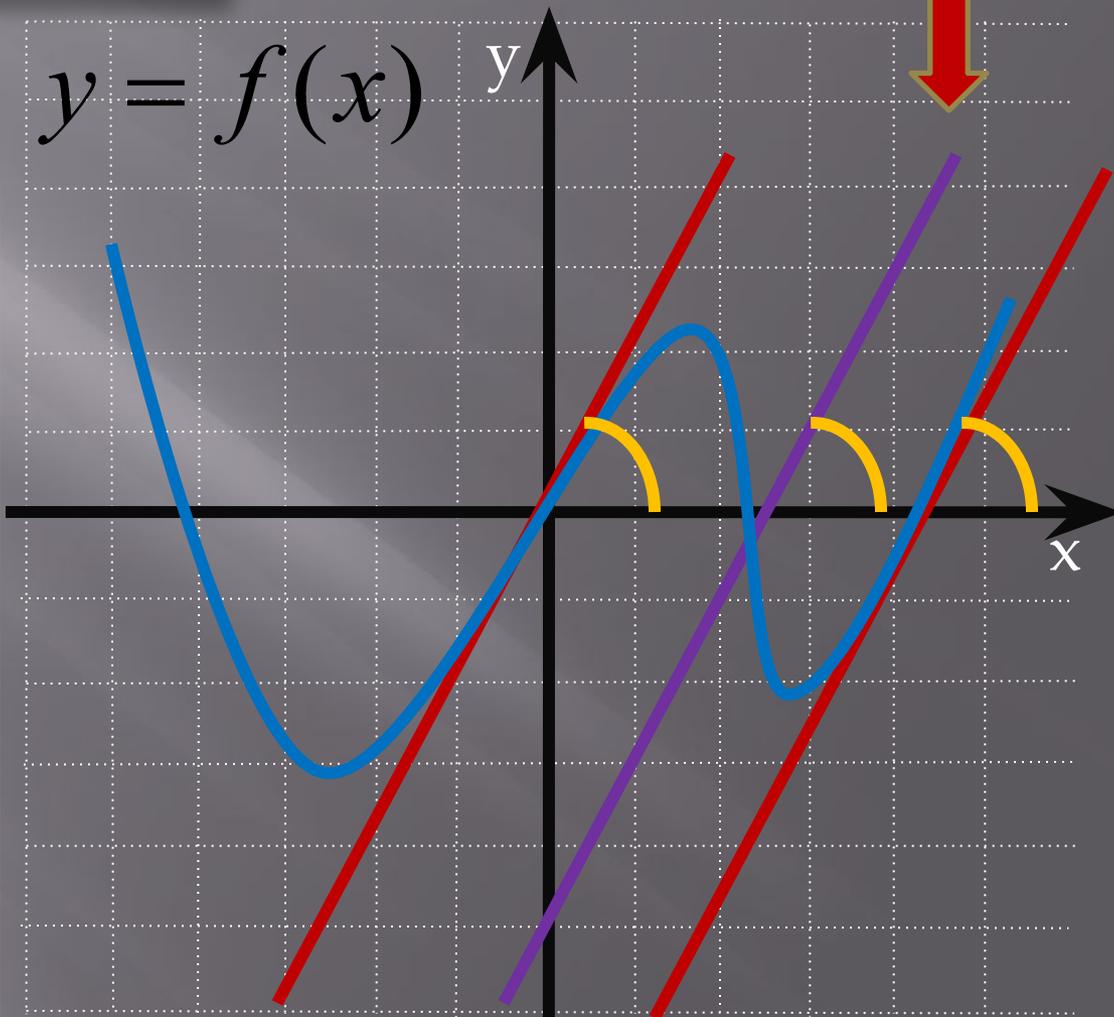
Угловые коэффициенты параллельных прямых

равны
 $k_1 = k_2 = k_3 = 2$

$$y = 2x - 5$$



$$y = f(x)$$



$$y = 2x + b$$



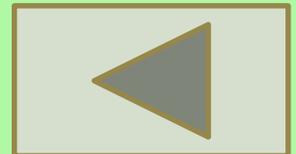
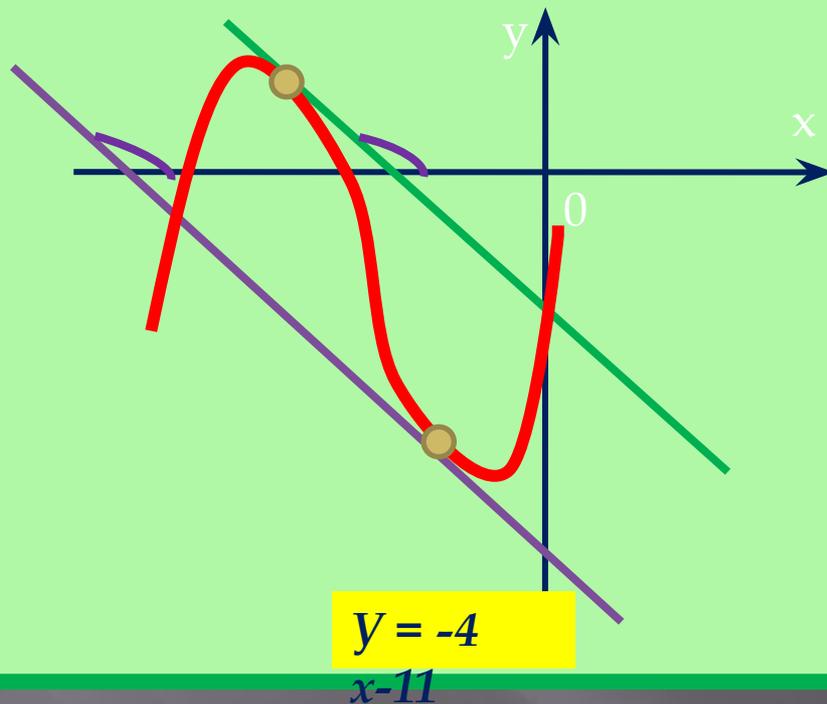
- ▣ Так как касательная параллельна прямой $y=8x+11$, то их угловые коэффициенты совпадают, т.е. угловой коэффициент касательной равен восьми **$k = 8$** .

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

x_0 – абсцисса искомой точки касания



- ▣ В результате решения будут найдены абсциссы двух точек касания, которые принадлежат графику данной функции.
- ▣ Но только одна из этих точек принадлежит касательной $y = -4x - 11$, чтобы определить какая, нужно найденные абсциссы подставить в оба из данных уравнений. Должны получиться верные равенства.



Найти производные функций:

$$y = 2x - 3$$

$$y = \sqrt{x-2}$$

$$y = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + \pi$$

$$y = \sin(3-2x)$$

$$y = (2x+1)^2$$

$$y = 3\operatorname{tg}x + 2$$

$$y = \cos 5x$$

$$y = \sqrt{x} - 16x$$