Перпендикулярность прямой и плоскости

Перпендикулярность прямой и плоскости

Опр. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90º.

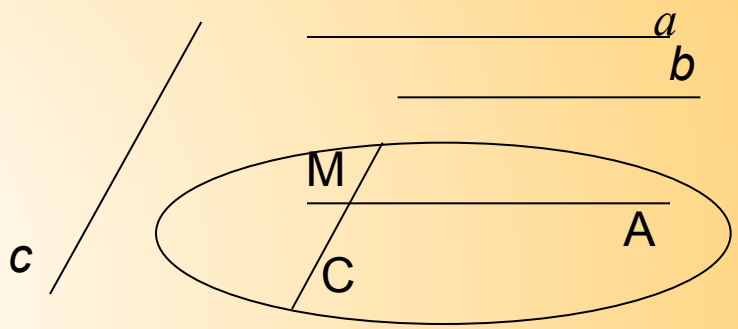
$$(\hat{a;b}) = 90^0$$

$$a \perp b$$

$$a \cap b = O \qquad a \overset{\bullet}{-} b$$

Лемма Если одна из 2-х параллельных прямых, перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

$$\frac{a \parallel b}{a \perp c}$$
$$b \perp c$$



Доказательство

$1. M, M \notin a, M \notin b, M \notin c$

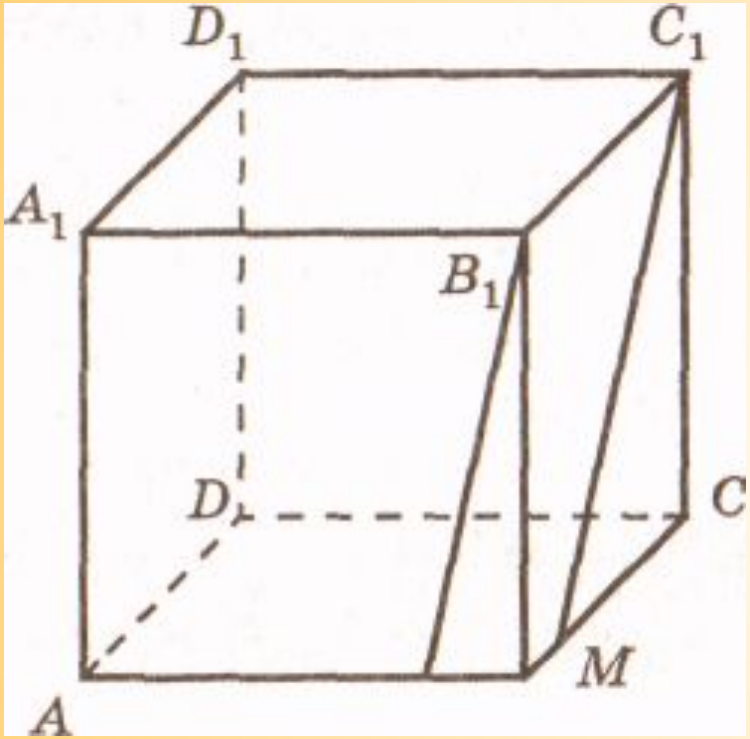
$2. MA \parallel a, MC \parallel c$

$a \perp c \Rightarrow \angle AMC = 90^0$

$3. a \parallel MA$

Задача №1

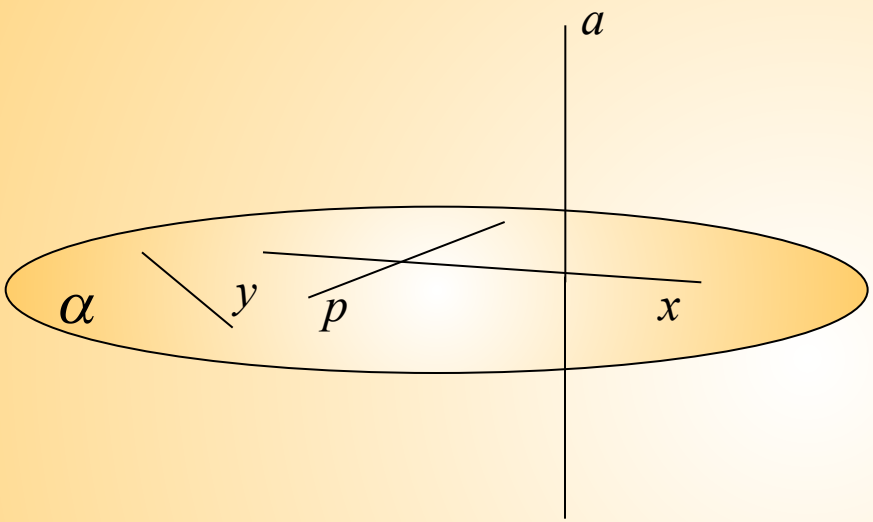
Дано: $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – параллелепипед, $\angle ДАВ=90^0$, $\angle АА_1В_1=90^0$, $\angle А_1Д_1Д=90^0$



Доказать: 1) $AA_1 \perp BC$;
2) $AB \perp BC$;
3) $СД \perp А_1Д_1$;
4) $BC \perp ДД_1$.

Прямая перпендикулярная плоскости

Опр. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна к ***<u>любой</u>*** прямой, лежащей в этой плоскости.

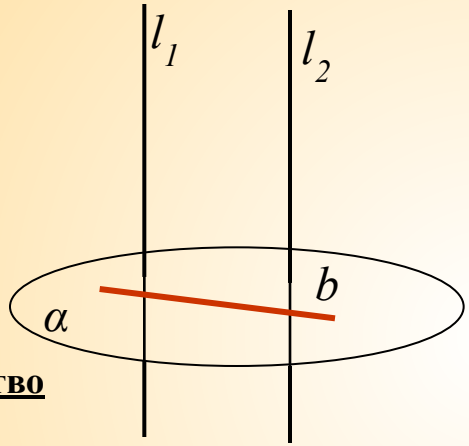


Утверждение: Если прямая перпендикулярна плоскости, то она её пересекает.

Теоремы о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью плоскости.

Th 14 Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая, перпендикулярна этой плоскости.

$$\frac{l_1 \parallel l_2,\quad l_1 \perp \alpha}{l_2 \perp \alpha}$$

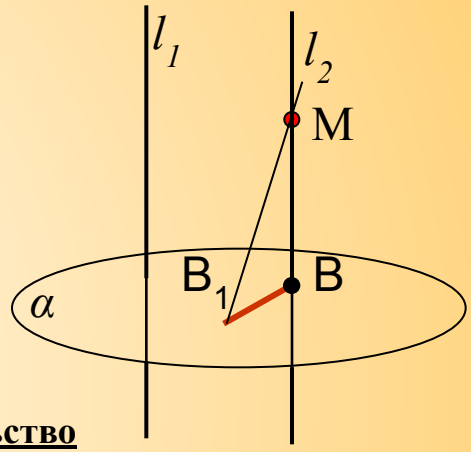


Доказательство

$$l_1 \perp \alpha \Rightarrow \left.\begin{matrix} l_1 \perp b \\ l_1 \parallel l_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow l_2 \perp b \Rightarrow l_2 \perp \alpha$$

Th 15 Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

$$\frac{l_1 \perp \alpha_2,\quad l_2 \perp \alpha}{l_1 \parallel l_2}$$



Доказательство

1. $M \in l_2$
2. $MB_1 \parallel l_1 \Rightarrow MB_1 \perp \alpha$
3. $MB_1 \perp BB_1$ (следует из определения)

$MB \perp BB_1$

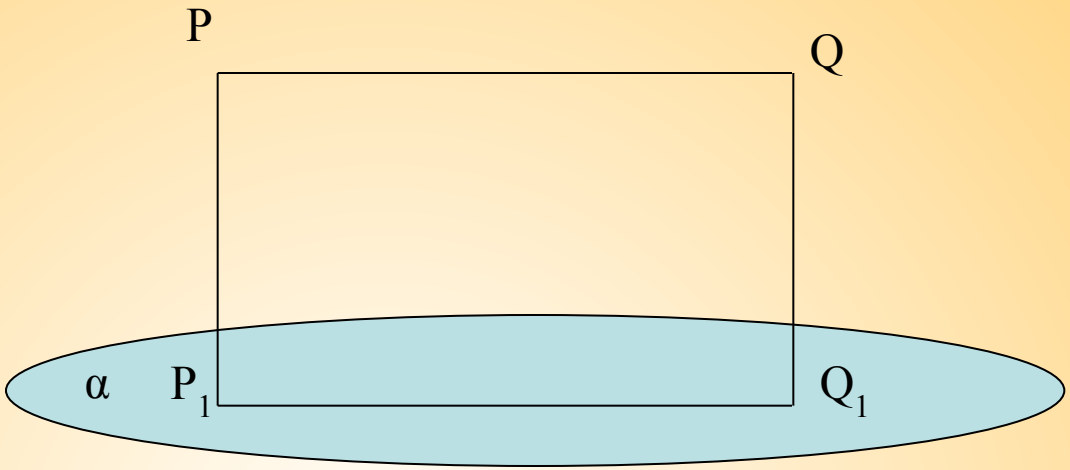
Задача №2

$$PQ \parallel \alpha$$

$$PP_1 \perp \alpha$$

$$QQ_1 \perp \alpha$$

$$PQ = P_1Q_1$$



Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Th 13 Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

$b \subset \alpha$

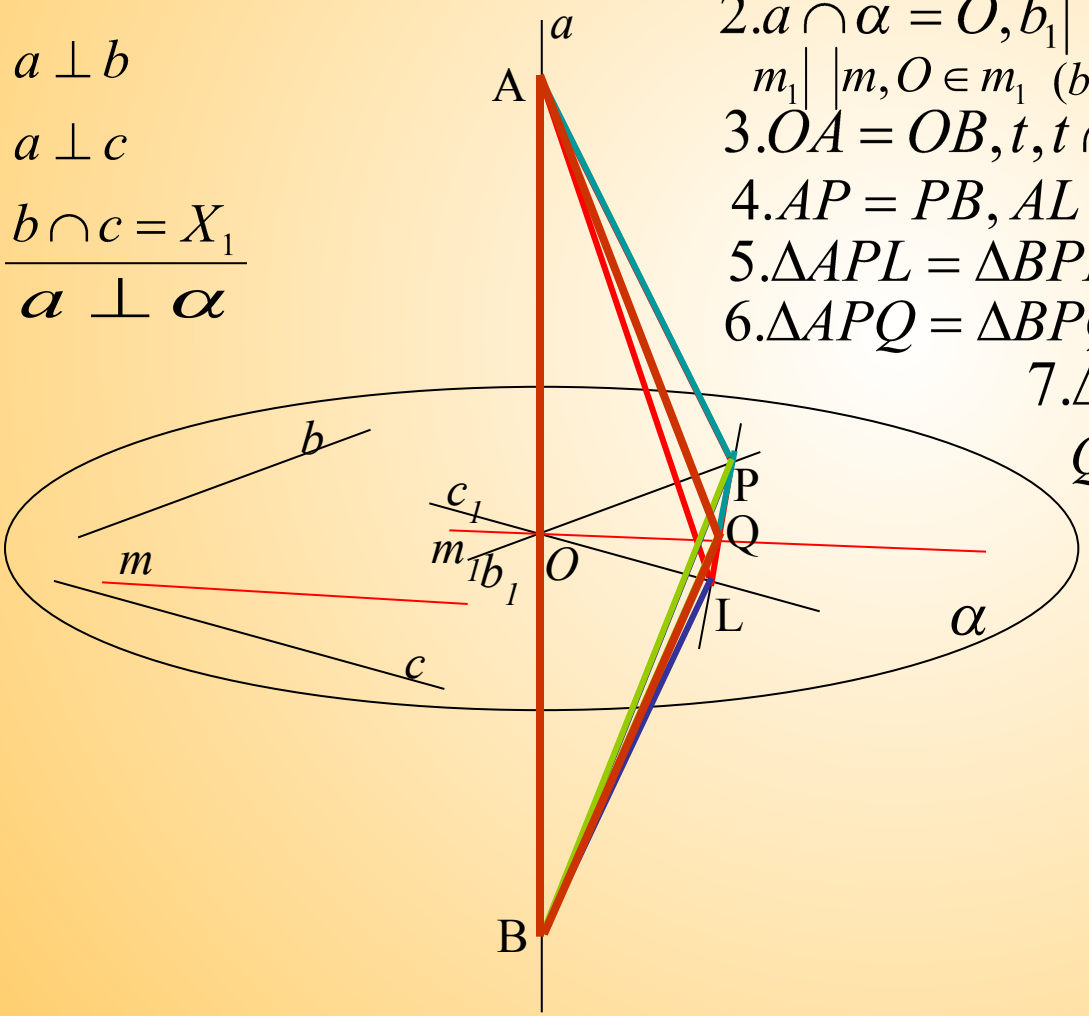
$c \subset \alpha$

$a \perp b$

$a \perp c$

$b \cap c = X_1$

$\overline{a \perp \alpha}$



Доказательство

$1. m - произвольно, m \subset \alpha$

$2. a \cap \alpha = O, b_1 \parallel b, c_1 \parallel c, O \in b_1, O \in c_1$

$m_1 \parallel m, O \in m_1 \quad (b_1 \parallel b, b \perp a \Rightarrow b_1 \perp a)$

$3. OA = OB, t, t \cap b_1 = P, t \cap c_1 = L, t \cap m_1 = Q$

$4. AP = PB, AL = LB$

$5. \Delta APL = \Delta BPL \Rightarrow \angle APL = \angle BPL$

$6. \Delta APQ = \Delta BPQ \Rightarrow AQ = BQ$

$7. \Delta AQB - равнобедренный$

$QO - медиана \Rightarrow QO - высота$

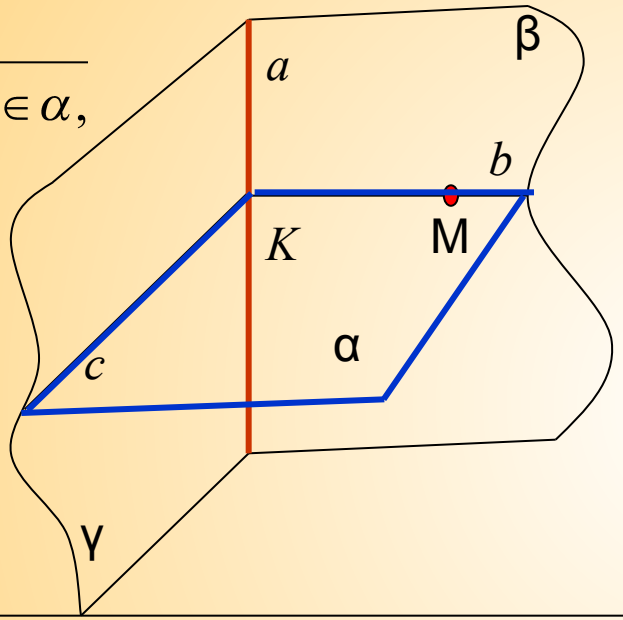
$m_1 \perp a$

$8. \left.\begin{array}{l} m_1 \parallel m \\ m_1 \perp a \end{array}\right| \Rightarrow m \perp a \xrightarrow{o} a \perp \alpha$

Построения

I. Через любую точку пространства можно провести плоскость, перпендикулярную данной прямой и притом только одну.

$$\frac{a, M}{\exists!\alpha, M \in \alpha,\ a \perp \alpha}$$



Построение

$I. M \notin a$

$1. \beta : M \in \beta, a \subset \beta$

$b \perp a, M \in b, b \cap a = K$

$2. \gamma : a \subset \gamma, \gamma \neq \beta$

$c \perp a, K \in c$

$3. \alpha : b \subset \alpha, c \subset \alpha, b \cap c = K$

$4. a \perp \alpha (по_признаку)$

Единственность

$5. \exists \delta, a \subset \delta, M \in \delta, \Rightarrow \delta \cap \beta = b_1$

$\delta \perp a$

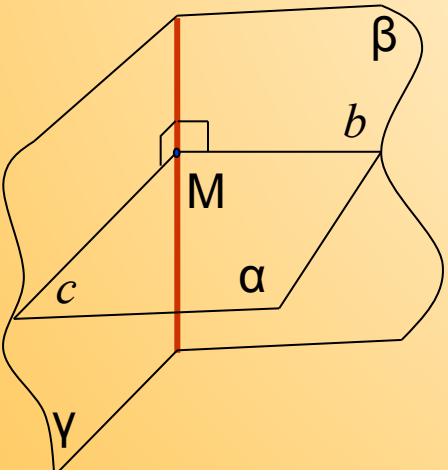
(т.к. M –их общая точка)

$b_1 \perp a (a \perp \delta, b_1 \subset \delta)$

$6. в_плоскости_\beta_через_$

$точку_M_b_1 \perp a, b \perp a,$

$что_невозможно.$

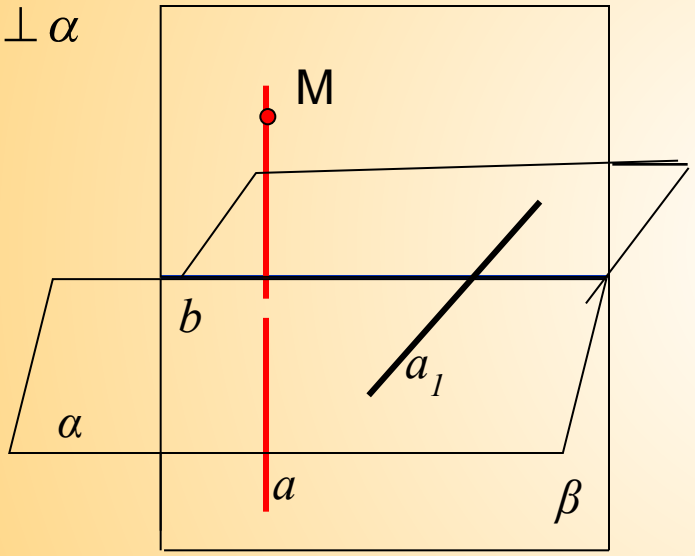


$II. M \in a$

Построения

II. Через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости и притом только одну.

$$\frac{\alpha, M}{\exists! a, M \in a,\ a \perp \alpha}$$



Построение

$I. M \notin a$

$1. a_1, a_1 \subset \alpha$

$2. \beta, M \in \beta, \beta \perp a_1$

$3. \beta \cap \alpha = b$

$4. a, M \in a, a \subset \beta, a \perp b$

$5. a \perp \alpha _(по_признаку)$

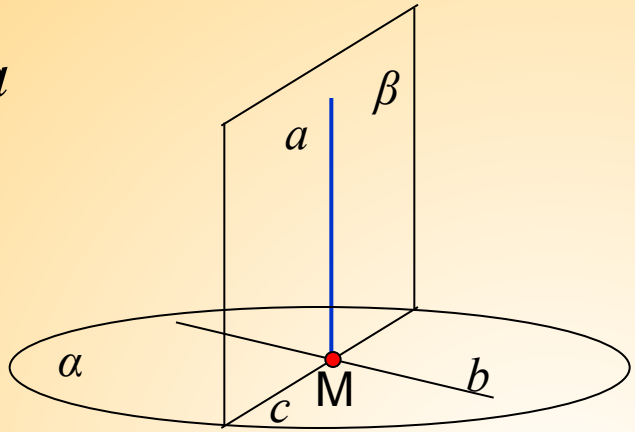
Единственность

$6. \exists c, c \perp \alpha, M \in c$

$$\left.\begin{array}{l} 7. c \perp \alpha \\ a \perp \alpha \end{array}\right| \Rightarrow a \| c \quad \left| \begin{array}{l} \\ a \cap c = M \end{array} \right| \Rightarrow a = c$$

Построения

$II. M \in a$



Построение

$1. b, b \subset \alpha, M \in b$

$2. \beta : M \in \beta, \beta \perp b$

$(по_задаче_№1)$

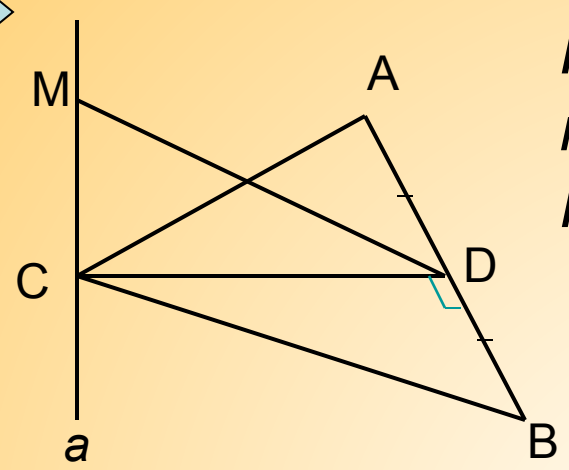
$\beta \cap \alpha = c, c \perp b$

$3. a, a \subset \beta, M \in a, a \perp c$

$4. a - искомая$

Единственность

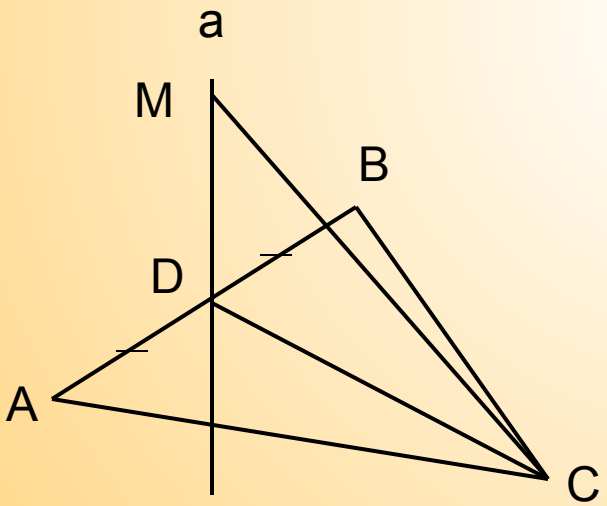
1.



Прямая а перпендикулярна плоскости АВС, ∠АСВ= 90º, АС= 4, MD = 3. Найти МС.

Ответ: МС = 3

2.

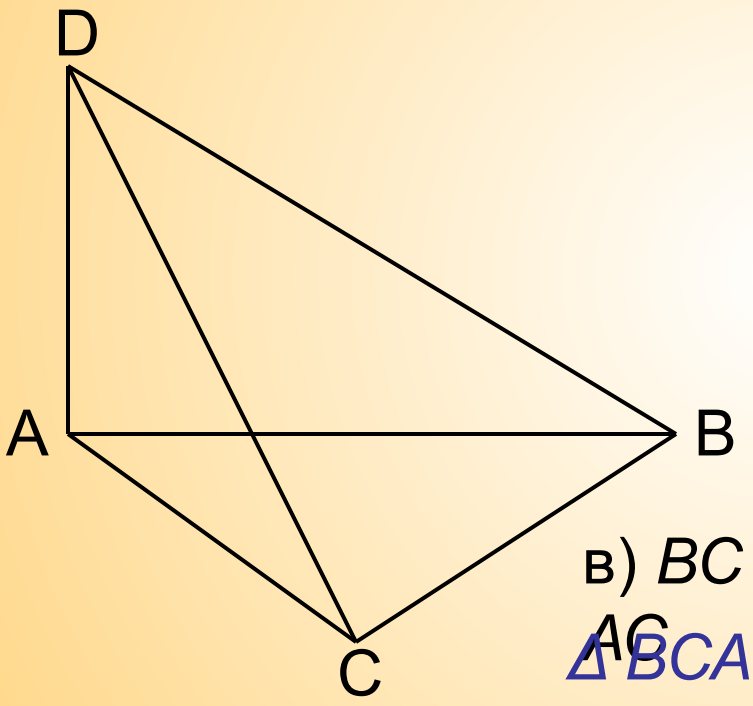


Прямая а перпендикулярна плоскости АВС, ΔАВС – равносторонний, АВ =2√3, MD = 4. Найти МС.

Ответ: МС = 5

№ 1

В тетраэдре DABC AD ⊥ AC, AD ⊥ AB, DC ⊥ CB.а) Докажите, что AD ⊥ BC; б) Докажите, что прямая BC ⊥ плоскости ADC; в) Найдите площадь Δ BCA, если BC= 4, AC = 3.



Решение:

а) $AD \perp AC$, $AD \perp AB \rightarrow AD \perp ABC$, $BC \subset ABC \rightarrow AD \perp BC$

б) $DC \perp CB$, $AD \perp BC \rightarrow BC \perp ADC$

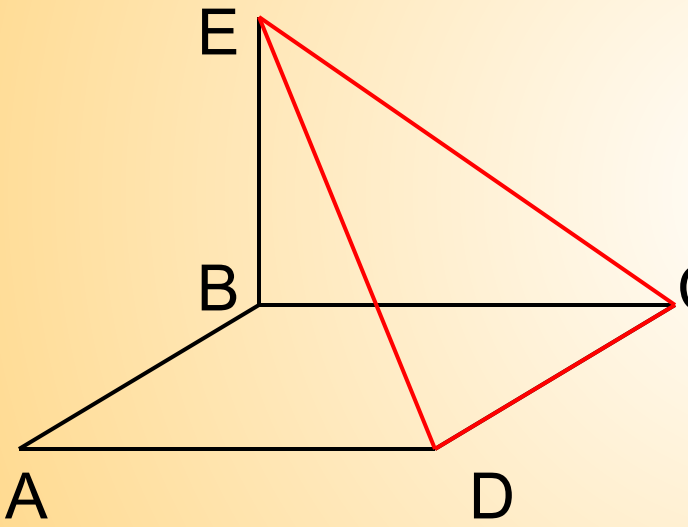
в) $BC \perp ADC$, $AC \subset ADC \rightarrow BC \perp AC$

ΔBCA - прямоугольный

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

№ 2

Точка E не принадлежит плоскости прямоугольника ABCD, BE ⊥AB, BE⊥BC. а)Докажите, что BE⊥CD; б) Докажите, что прямая CD ⊥BCE; в)Найдите площадь Δ ECD, если CD =6, CE = 8.



Решение

а) *BE ⊥AB, BE⊥BC→BE⊥ ABC, CD⊂ ABC→ BE⊥CD*

б)ABCD -прямоугольник →

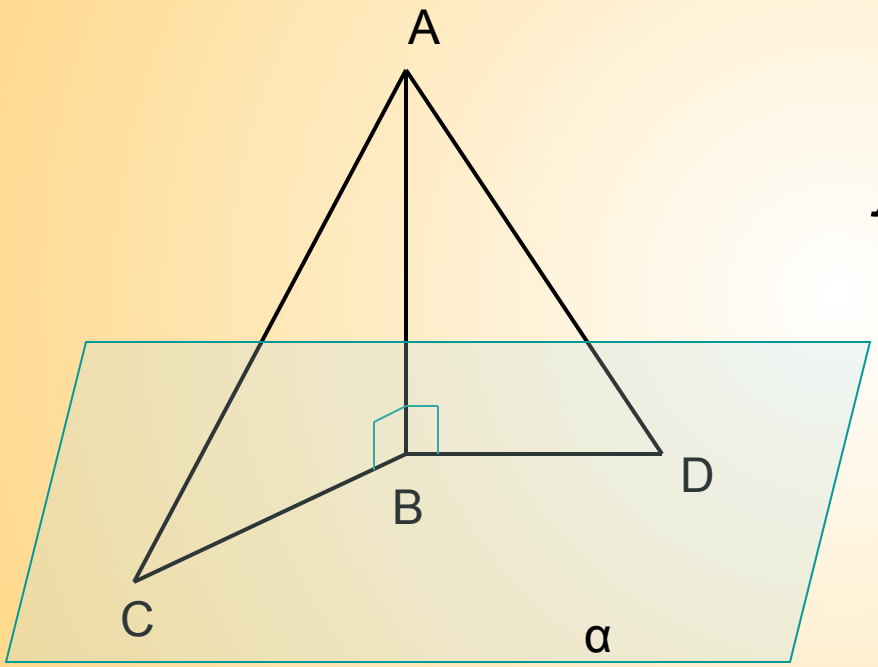
$$\left.\begin{array}{l} CD \perp BC \\ CD \perp BE \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp BCE$$

в) CD ⊥BCE→ CD ⊥CE→ΔECD - прямоугольный

$$S = \frac{CD \cdot CE}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

№3

Через катеты BD и BC прямоугольных треугольников ABD и ABC проведена плоскость α, не содержащая их общий катет. Будет ли AB ⊥ α?



Решение

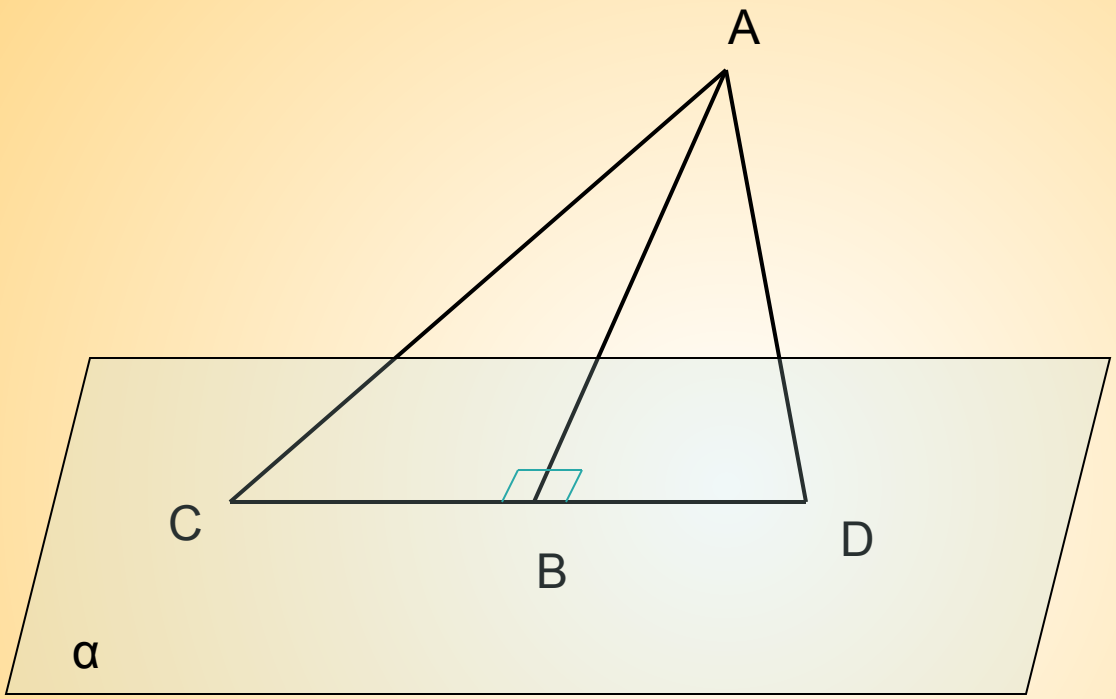
1) Точки B,C, D – не лежат на одной прямой

ΔABC- прямоугольный, AB и BC – катеты → AB ⊥ BC

ΔABD – прямоугольный, AB и BD катеты → AB ⊥ BD

Плоскость α совпадает с плоскостью BCD→ AB ⊥ α

2) *Точки B, C и D лежат на одной прямой*



Прямая AB может быть не перпендикулярна плоскости α

Задача №1

ΔABC – *равносторонний*

ΔAB_1C_1

$BB_1 \perp AB_1C_1$

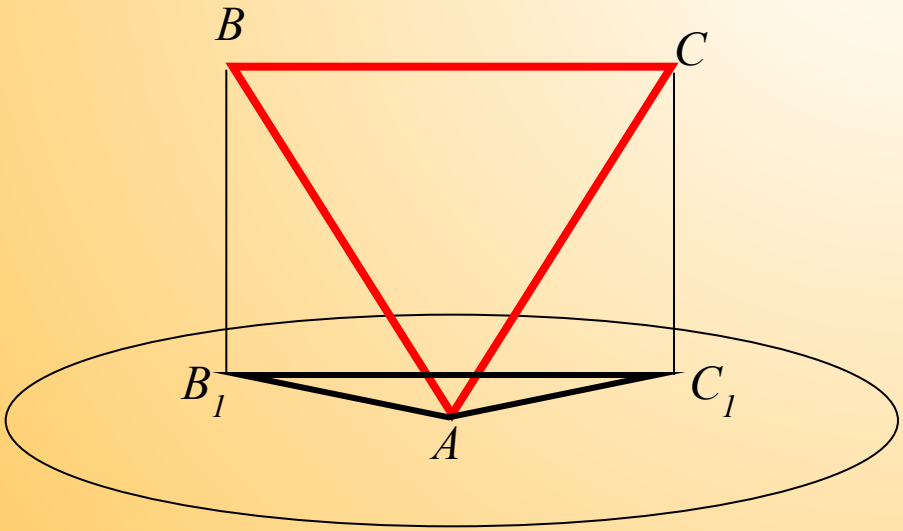
$CC_1 \perp AB_1C_1$

$B_1C_1 \subset \alpha$

$BB_1 = CC_1$

$\angle BAB_1 = 30^0$

$B_1C_1 - ?$



Задача №2

$ABCД$ – *квадрат*

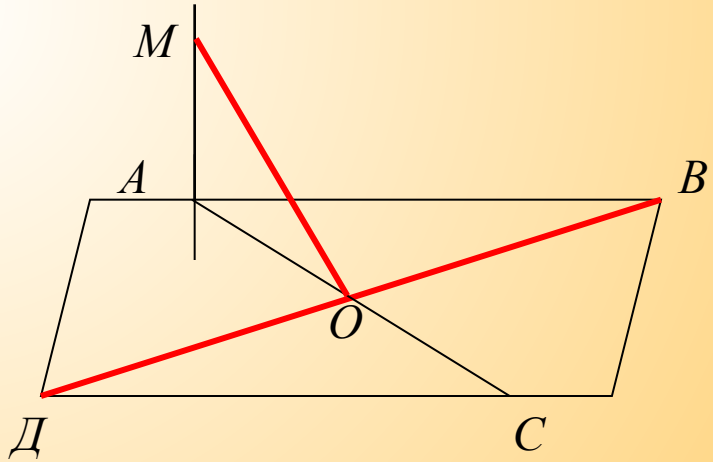
$AC \cap BД = O$

$AM \perp ABC$

---

1) $BД \perp AMO$

2) $MO \perp BД$



Домашнее задание **Глава 2. §1стр. теорию учить, №116, 123**