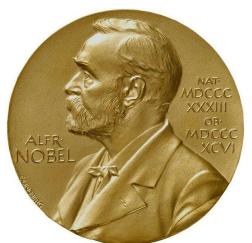
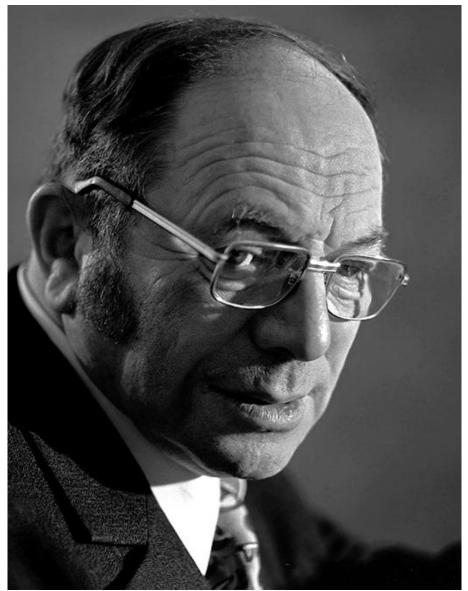
## Канторович Леонид Витальевич

6 января 1912 — 7 апреля 1986



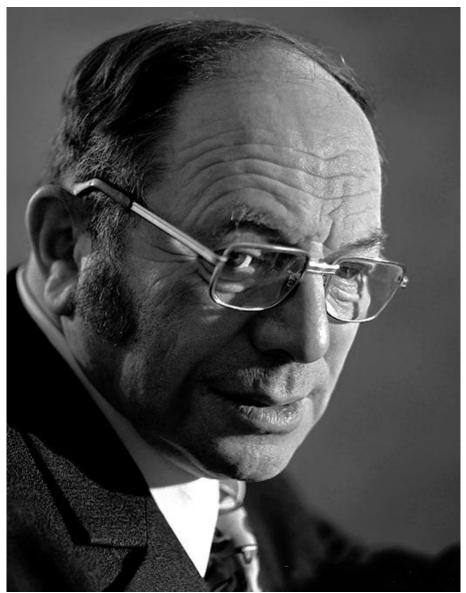








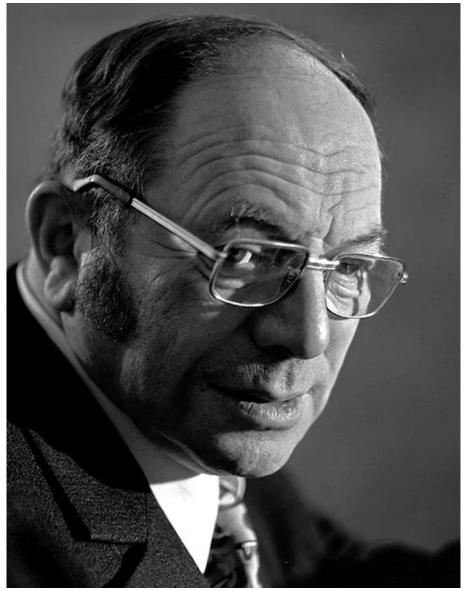




"Удостоен премии за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов известный сегодня как метод линейного программирования"







"Удостоен премии за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов известный сегодня как метод линейного программирования"

$$t_n = \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = q_v(x, y) \quad (a \le x \le b; c \le y \le d)$$
 (4.68)

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = q_v(x, y) \quad (a \le x \le b; c \le y \le d)$$

$$t_n = \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y), \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = q_v(x, y) \quad (a \le x \le b; c \le y \le d)$$
 (4.68)

$$t_n = \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y),$$

$$I(t_n) = \iint_G \left[ \left( \frac{\partial t_n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t_n}{\partial y} \right)^2 + 2q_v t_n \right] dx dy = \iint_a^b \int_a^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x)}{\partial x} \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = q_v(x, y) \quad (a \le x \le b; c \le y \le d)$$

$$t_n = \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y), \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = q_v(x, y) \quad (a \le x \le b; c \le y \le d)$$

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \varphi_k(y), \qquad (4.68)$$

$$F_{f'_s} = \frac{\partial F}{\partial f'_s} = \int_{-\infty}^{d} 2 \left[ \sum_{k=1}^{n} f'_k(x) \varphi_k(y) \right] \varphi_s(y) dy = \sum_{k=1}^{n} f'_k(x) A_{ks},$$

$$A_{ks} = \int_{0}^{d} 2\varphi_{k}(y)\varphi_{s}(y)dy,$$

TO

$$\frac{d}{dx}F_{f'_s} = \sum_{k=1}^n f''_k(x)A_{ks};$$

$$F_{f_s} = \frac{\partial F}{\partial f_s} = \int_0^d \left[ 2\left(\sum_{k=1}^n f_k(x)\frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y}\right) \frac{\partial \varphi_s(y)}{\partial y} + 2q_v\varphi_s(y)\right] dy = \sum_{k=1}^n f_k(x)B_{ks} + C_s,$$

$$B_{ks} = \int_{c}^{d} 2 \frac{\partial \varphi_{k}(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{s}(y)}{\partial y} dy;$$

$$C_{s} = \int_{c}^{d} 2q_{v} \varphi_{s}(y) dy.$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = q_v(x, y) \quad (a \le x \le b; c \le y \le d)$$

$$t_n = \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y), \tag{4.68}$$

$$I(t_n) = \iint_G \left[ \left( \frac{\partial t_n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t_n}{\partial y} \right)^2 + 2q_v t_n \right] dx dy = \iint_a^b \int_c^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x)}{\partial x} \varphi_k(y) \right)^2 + F(x, f_k, f_k') = F(x, f_1, f_2, ..., f_n, f_1', f_2', ..., f_n') \right] dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx = \int_c^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dy$$

$$(k = 1, 2, ..., n).$$

$$F_{f_s'} = \frac{\partial F}{\partial f_s'} = \int_{0}^{d} 2 \left[ \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \varphi_k(y) \right] \varphi_s(y) dy = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) A_{ks},$$

$$I(t_n) = \int_{a}^{a} \int_{b}^{b} \left[ \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 - 2t \right] dx dy$$

$$A_{ks} = \int_{0}^{d} 2\varphi_{k}(y)\varphi_{s}(y)dy,$$

TO

$$\frac{d}{dx}F_{f'_{s}} = \sum_{k=1}^{n} f''_{k}(x)A_{ks};$$

$$F_{f_s} = \frac{\partial F}{\partial f_s} = \int_{a}^{d} \left[ 2 \left[ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right] \frac{\partial \varphi_s(y)}{\partial y} + 2q_v \varphi_s(y) \right] dy = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) B_{ks} + C_s,$$

$$B_{ks} = \int_{c}^{d} 2 \frac{\partial \varphi_{k}(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{s}(y)}{\partial y} dy;$$

$$C_{s} = \int_{c}^{d} 2q_{v} \varphi_{s}(y) dy.$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = q_v(x, y) \quad (a \le x \le b; c \le y \le d)$$

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \varphi_k(y), \qquad (4.68)$$

$$I(t_n) = \iint_G \left[ \left( \frac{\partial t_n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t_n}{\partial y} \right)^2 + 2q_v t_n \right] dx dy = \iint_a^b \int_a^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x)}{\partial x} \varphi_k(y) \right)^2 + F(x, f_k, f_k') = F(x, f_1, f_2, ..., f_n, f_1', f_2', ..., f_n') \right] dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx = \int_c^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dy$$

$$(k = 1, 2, ..., n).$$

$$F_{f_s'} = \frac{\partial F}{\partial f_s'} = \int_{0}^{d} 2 \left[ \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \varphi_k(y) \right] \varphi_s(y) dy = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) A_{ks},$$

$$I(t_n) = \int_{a}^{a} \int_{b}^{b} \left[ \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 - 2t \right] dx dy$$

TO

$$A_{ks} = \int_{c}^{d} 2\varphi_{k}(y)\varphi_{s}(y)dy,$$

$$A_{11} = 2\int_{b}^{b} \varphi_{1}^{2}(y)dy = \frac{32}{15}b^{5}; \quad B_{11} = 2\int_{b}^{b} \left[\frac{\partial \varphi_{1}(y)}{\partial y}\right]^{2}dy = \frac{16}{3}b^{2};$$

 $\frac{d}{dx}F_{f'_s} = \sum_{k=1}^{n} f''_k(x)A_{ks};$ 

$$C_1 = 2 \int_{a}^{b} (-1) \varphi_1(y) dy = -\frac{8}{3} b^3.$$

 $F_{f_s} = \frac{\partial F}{\partial f_s} = \int_{c}^{d} \left[ 2 \left[ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right] \frac{\partial \varphi_s(y)}{\partial y} + 2q_v \varphi_s(y) \right] dy = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) B_{ks} + C_s,$ 

$$B_{ks} = \int_{c}^{d} 2 \frac{\partial \varphi_{k}(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{s}(y)}{\partial y} dy;$$
$$C_{s} = \int_{c}^{d} 2q_{v} \varphi_{s}(y) dy.$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = q_v(x, y) \quad (a \le x \le b; c \le y \le d)$$
(4.68)

$$t_n = \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y),$$

$$F_{f_s'} = \frac{\partial F}{\partial f_s'} = \int_{0}^{d} 2 \left[ \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \varphi_k(y) \right] \varphi_s(y) dy = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) A_{ks},$$

$$I(t_n) = \int_{a}^{a} \int_{b}^{b} \left[ \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 - 2t \right] dx dy$$

$$A_{ks} = \int_{c}^{d} 2\varphi_{k}(y)\varphi_{s}(y)dy,$$

$$A_{11} = 2 \int_{-b}^{b} \varphi_1^2(y) dy = \frac{32}{15} b^5; \quad B_{11} = 2 \int_{-b}^{b} \left[ \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y} \right]^2 dy = \frac{16}{3} b^2;$$

TO

$$\frac{d}{dx}F_{f'_s} = \sum_{k=1}^n f''_k(x)A_{ks};$$

 $F_{f_s} = \frac{\partial F}{\partial f_s} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2 \left[ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial u} \right] \frac{\partial \varphi_s(y)}{\partial u} + 2q_v \varphi_s(y) \right] dy = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) B_{ks} + C_s,$ 

$$C_1 = 2 \int_{-b}^{b} (-1) \varphi_1(y) dy = -\frac{8}{3} b^3.$$

$$C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b} + \frac{1}{2} = 0,$$

$$B_{ks} = \int_{c}^{d} 2 \frac{\partial \varphi_{k}(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{s}(y)}{\partial y} dy;$$

$$C_{s} = \int_{c}^{d} 2q_{v} \varphi_{s}(y) dy.$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = q_v(x, y) \quad (a \le x \le b; c \le y \le d)$$

$$\frac{n}{2}$$
(4.68)

$$t_n = \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y),$$

$$F_{f'_s} = \frac{\partial F}{\partial f'_s} = \int_0^d 2 \left[ \sum_{k=1}^n f'_k(x) \varphi_k(y) \right] \varphi_s(y) dy = \sum_{k=1}^n f'_k(x) A_{ks},$$

$$I(t_n) = \int_{a}^{a} \int_{b}^{b} \left[ \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 - 2t \right] dx dy$$

$$A_{ks} = \int_{c}^{d} 2\varphi_{k}(y)\varphi_{s}(y)dy,$$

$$A_{11} = 2 \int_{-b}^{b} \varphi_1^2(y) dy = \frac{32}{15} b^5; \quad B_{11} = 2 \int_{-b}^{b} \left[ \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y} \right]^2 dy = \frac{16}{3} b^2;$$
$$C_1 = 2 \int_{-b}^{b} (-1) \varphi_1(y) dy = -\frac{8}{3} b^3.$$

$$\frac{d}{dx}F_{f'_s} = \sum_{k=1}^n f''_k(x)A_{ks};$$

$$C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b} + \frac{1}{2} = 0, \qquad C_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}}$$

$$F_{f_s} = \frac{\partial F}{\partial f_s} = \int_{0}^{d} \left[ 2 \left( \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_s(y)}{\partial y} + 2q_v \varphi_s(y) \right] dy = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) B_{ks} + C_s,$$

$$B_{ks} = \int_{c}^{d} 2 \frac{\partial \varphi_{k}(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{s}(y)}{\partial y} dy;$$

$$C_{s} = \int_{c}^{d} 2q_{v} \varphi_{s}(y) dy.$$

TO

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = q_v(x, y) \quad (a \le x \le b; c \le y \le d)$$
(4.68)

$$t_n = \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y),$$

$$I(t_n) = \iint_G \left[ \left( \frac{\partial t_n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t_n}{\partial y} \right)^2 + 2q_v t_n \right] dx dy = \iint_a^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x)}{\partial x} \varphi_k(y) \right)^2 + F(x, f_k, f_k') = F(x, f_1, f_2, ..., f_n, f_1', f_2', ..., f_n') \right] dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx = \int_c^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dy dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx = \int_c^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dy dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx = \int_c^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx = \int_c^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx = \int_c^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx = \int_c^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx = \int_a^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx = \int_a^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) \right] dx dy = \int_a^b F(x, f_k, f_k') dx dy dx = \int_a^b \left[ \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n f_k'(x) \varphi_k(y) \right)^2 + 2q_v \sum_{k=1}^n f_k(x) \varphi_k(y) dx dy dx dy$$

$$F_{f'_s} = \frac{\partial F}{\partial f'_s} = \int_{-\infty}^{d} 2 \left[ \sum_{k=1}^{n} f'_k(x) \varphi_k(y) \right] \varphi_s(y) dy = \sum_{k=1}^{n} f'_k(x) A_{ks},$$

$$I(t_n) = \int_{a}^{a} \int_{t}^{b} \left[ \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 - 2t \right] dx dy$$

TO

$$A_{ks} = \int_{0}^{d} 2\varphi_{k}(y)\varphi_{s}(y)dy,$$

 $F_{f_s} = \frac{\partial F}{\partial f_s} = \int_{s}^{a} \left[ 2 \left[ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right] \frac{\partial \varphi_s(y)}{\partial y} + 2q_v \varphi_s(y) \right] dy = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) B_{ks} + C_s,$ 

$$A_{11} = 2 \int_{-b}^{b} \varphi_1^2(y) dy = \frac{32}{15} b^5; \quad B_{11} = 2 \int_{-b}^{b} \left[ \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y} \right]^2 dy = \frac{16}{3} b^2;$$

$$\frac{d}{d}F_{f'} = \sum_{k=0}^{n} f_k''(x)A_k;$$

$$C_1 = 2 \int_{b}^{b} (-1) \varphi_1(y) dy = -\frac{8}{3} b^3.$$

$$\frac{d}{dx}F_{f_s'} = \sum_{k=1}^n f_k''(x)A_{ks};$$

$$C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b} + \frac{1}{2} = 0,$$
  $C_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}}$ 

где 
$$B_{ks} = \int\limits_{c}^{d} 2 \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_s(y)}{\partial y} dy;$$
 
$$C_s = \int\limits_{c}^{d} 2 q_v \varphi_s(y) dy.$$

$$t_1 = \frac{1}{2}(b^2 - y^2) \left( 1 - \frac{\cosh\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}}{\cosh\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}} \right).$$



Для решения задачи используется особый метод приближений, основанный на последовательном составлении вариантов с выбором наилучшего из них. Линейным оно называется потому, что основывается на решении линейных уравнений, ни одно неизвестное в которых не перемножается на другое неизвестное. Такие уравнения отражают зависимости, которые могут быть изображены на графике прямыми линиями. Цель линейного программирования распределение ограниченных ресурсов наилучшим способом, с соблюдением при этом норм и поставленных целей. Типичная задача для линейного программирования — как с наименьшими затратами перевезти грузы от четырех поставщиков к шести потребителям.

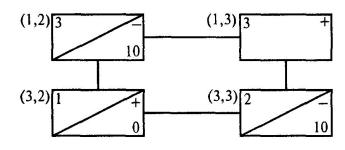
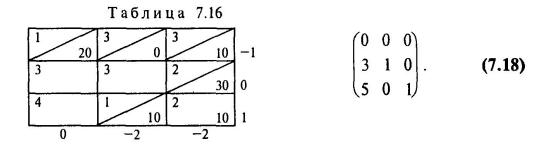


Рис. 7.6



Определяя матрицу оценок (7.18), видим, что среди оценок свободных клеток найденного распределения нет отрицательных, т.е. найденное распределение (см. табл. 7.16) оптимально.

#### 7.5. Открытая модель транспортной задачи

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_{l}$	2 30	3 10	1 20	60
$A_2$	4	30	5	30
Потребности	30	40	20	90



Л.В.Канторович

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НАИЛУЧШЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Л.В.Канторович

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НАИЛУЧШЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

1941

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК ССС

Л.В.Канторович



Л.В.Канторович

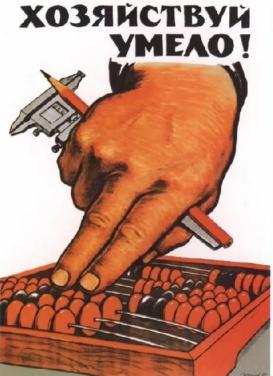




А.В.Канторович







А.В.Канторович





А.В.Канторович

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НАИЛУЧШЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

1959

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР



Вся дальнейшая деятельность талантливого математика была неразрывно связана с решением насущных народно-<mark>хозяйственных</mark> проблем, экономическими исследованиями и их пропагандой. После признания открытия Леонид Витальевич был избран <mark>членом-корреспондентом</mark> по отделению экономики Академии наук СССР и стал одним из преподавателей знаменитого шестого курса экономического факультета ЛГУ, на который зачисляли выпускников университета. Они впервые изучали математические методы в экономике и ЭВМ.

### Спасибо за внимание