

Преобразование тригонометрических выражений

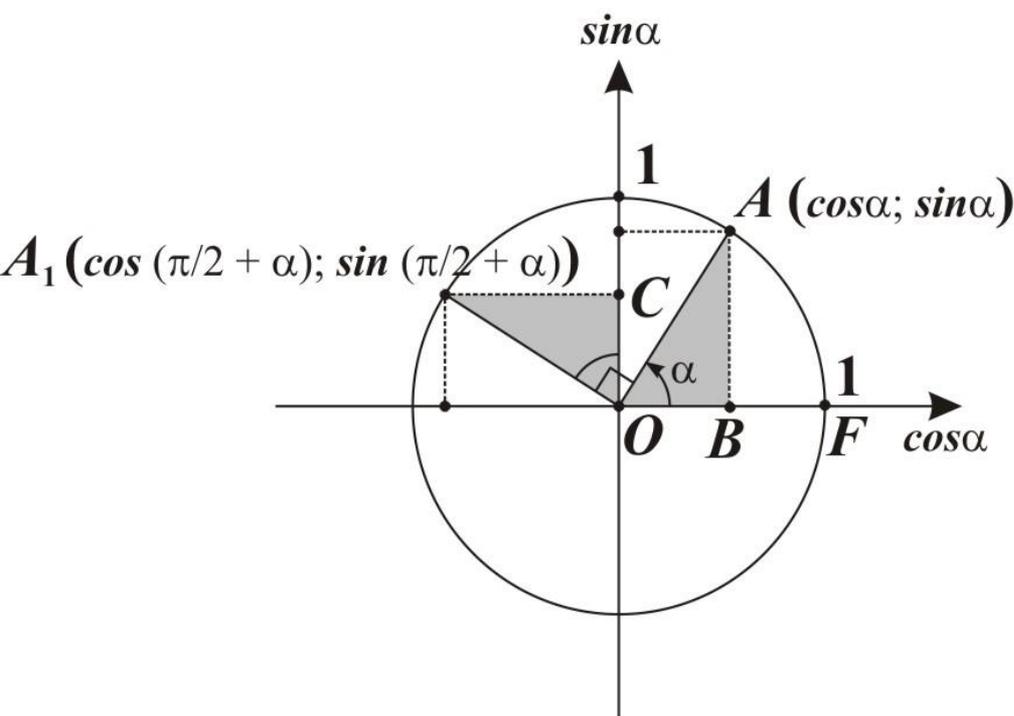
**(вывод тригонометрических
формул)**

I-а. Формулы приведения

Выведем вспомогательные формулы, позволяющие находить

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad \text{и} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

по тригонометрическим функциям угла α .

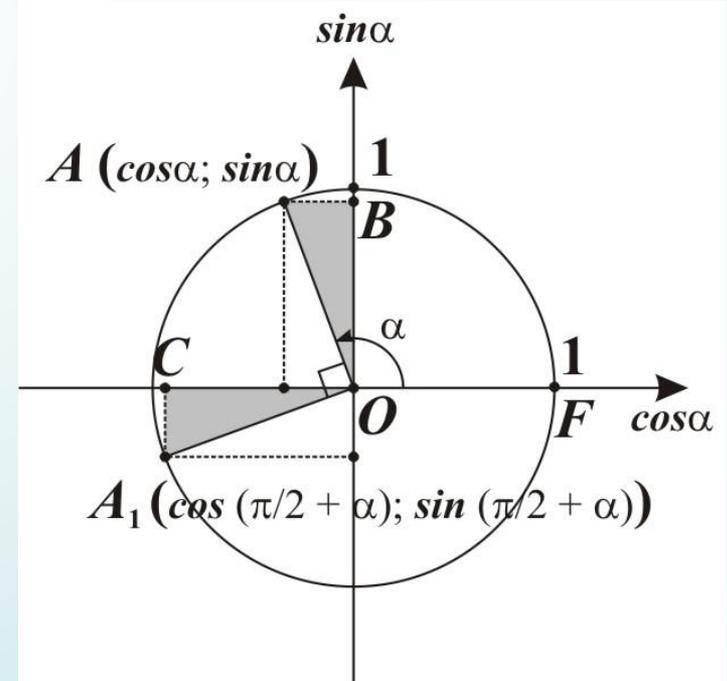


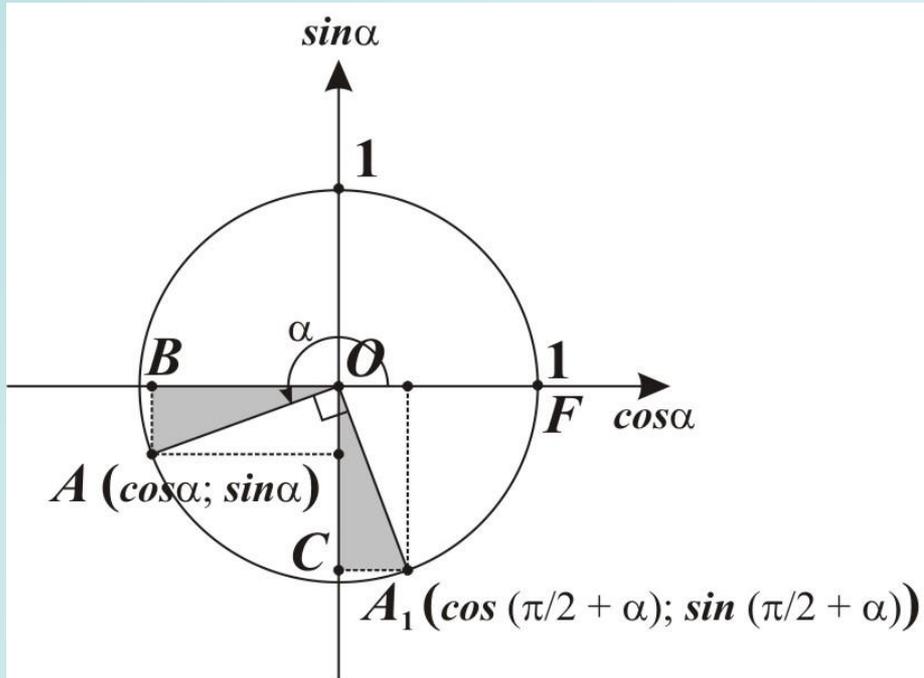
$$\alpha \in (0; \pi / 2)$$

$\Delta AOB = \Delta A_1OC$ по гипотенузе и острому углу: $AO = 1 = A_1O$.
 $\angle A_1OC = \pi / 2 - \angle COA = \angle AOB$;

$$\alpha \in (\pi / 2; \pi)$$

$\Delta AOB = \Delta A_1OC$ по гипотенузе и острому углу: $AO = 1 = A_1O$.
 $\angle A_1OC = \alpha + \pi / 2 - \pi = \alpha - \pi / 2 = \angle AOB$;





$$\alpha \in (\pi; 3\pi /$$

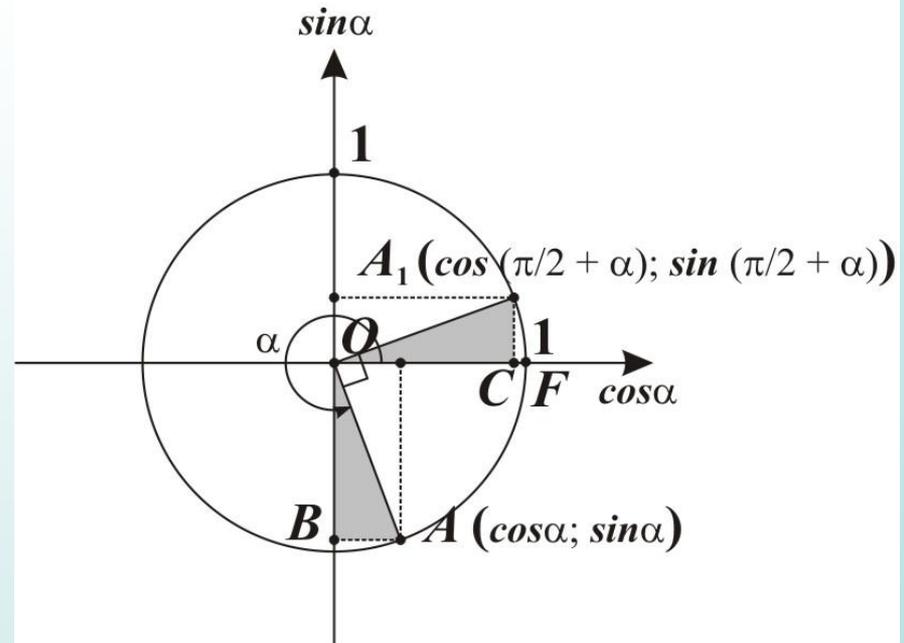
2)

Покажем, что $\triangle AOB = \triangle A_1OC$ по гипотенузе и острому углу: $AO = 1 = A_1O$. Кроме того, на $\angle A_1OC = \alpha + \pi / 2 - 3\pi / 2 = \alpha - \pi = \angle AOB$;

$$\alpha \in (3\pi / 2; 2$$

$\pi)$

Покажем, что $\triangle AOB = \triangle A_1OC$ по гипотенузе и острому углу: $AO = 1 = A_1O$. $\angle A_1OC = \alpha + \pi / 2 - 2\pi = \alpha - 3\pi / 2 = \angle AOB$.

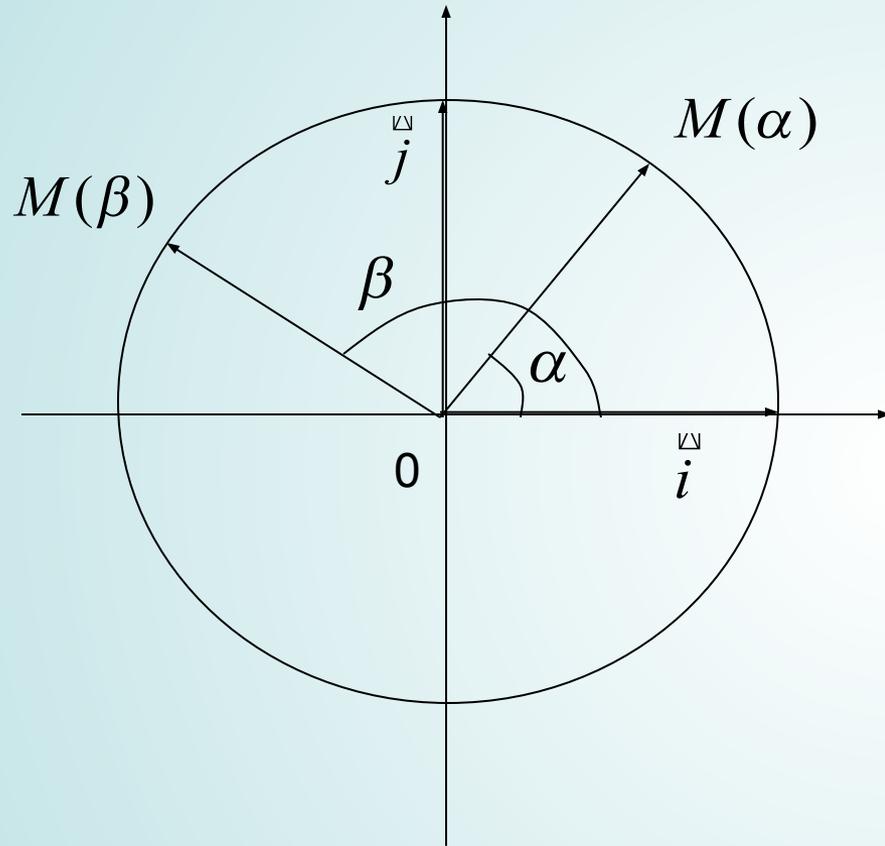


I-a. *Формулы приведения*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

II. Формулы сложения



1) Отметим на единичной окружности точки $M(\alpha)$ и $M(\beta)$

2) Введем единичные вектора \vec{i} и \vec{j}

3) $M(\alpha) = (\cos \alpha; \sin \alpha)$
 $M(\beta) = (\cos \beta; \sin \beta)$

4) $\vec{OM}(\alpha) = (\cos \alpha; \sin \alpha)$
 $\vec{OM}(\beta) = (\cos \beta; \sin \beta)$

4) Угол между векторами $\vec{OM}(\alpha)$ и $\vec{OM}(\beta)$ равен $|\alpha - \beta|$

5) По свойству скалярного произведения найдем

$$OM(\alpha) \cdot OM(\beta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos|\alpha - \beta| = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

6) Учитывая четность тригонометрических функций получаем

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\alpha) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad \sin(\alpha - \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

II. Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Поделим числитель и знаменатель полученной дроби на

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$\cos \alpha \neq 0$ и $\cos \beta \neq 0$, т.е. в случае,
когда

$tg \alpha$ и $tg \beta$ определены

$$\therefore tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg \alpha \pm tg \beta}{1 \mp tg \alpha \cdot tg \beta}$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{ctg \alpha \cdot ctg \beta \mp 1}{ctg \beta \pm ctg \alpha}$$

II. Формулы сложения

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta},$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

I-b. Формулы приведения

Выведенные формулы сложения позволяют получить **формулы приведения**, упрощающие тригонометрические функции углов вида

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_0 \cdot \cos\alpha - \underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{-1} \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$$

α	$\pi/2 - \alpha$	$\pi/2 + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$3\pi/2 - \alpha$	$3\pi/2 + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

III. Формулы двойных углов

Чтобы вывести формулы для вычисления тригонометрических функций двойного аргумента, подставим $\beta = \alpha$ в формулы сложения:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

\Rightarrow

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

III. Формулы двойных углов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

III. Формулы двойных углов

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \stackrel{\text{/: } \cos^2 \alpha}{}}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \stackrel{\cos \alpha \neq 0}{=} \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \stackrel{\text{/: } \sin^2 \alpha}{}}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \stackrel{\sin \alpha \neq 0}{=} \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \stackrel{\text{/: } \cos^2 \alpha}{}}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \stackrel{\cos \alpha \neq 0}{=} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \stackrel{\text{/: } \sin^2 \alpha}{}}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \stackrel{\sin \alpha \neq 0}{=} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

III. Формулы двойных углов

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$$

IV. Формулы тройных углов

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha} = \frac{3 \sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 4 \sin^3 \alpha}{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \\
 &= \frac{3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha} \stackrel{\text{!} : \cos^3 \alpha}{=} \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg} 3\alpha &= \frac{\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha} \stackrel{\text{!} : \sin^3 \alpha}{=} \\
 &= \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

IV. Формулы тройных углов

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

V. Формулы половинных углов

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha/2 \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha/2} = \frac{2 \sin \alpha/2 \cdot \cos \alpha/2}{2 \cos^2 \alpha/2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \alpha/2}{\cos^2 \alpha/2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha/2 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha/2} = \frac{2 \sin \alpha/2 \cdot \cos \alpha/2}{2 \sin^2 \alpha/2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \alpha/2}{\sin^2 \alpha/2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

V. Формулы половинных углов

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

VI. *Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму*

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta, & (1) \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta, & (2) \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, & (3) \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta. & (4) \end{cases}$$

Сложив почленно равенства (1) и (2),
получим:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

Сложив почленно равенства (3) и (4),
получим:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

Вычтя из равенства (4) равенство (3),
получим:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

VI. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta))$$

VII. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cancel{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \\ &\quad - \cancel{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \alpha - \sin \beta &= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cancel{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} - \cancel{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} + \\ &\quad + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cancel{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} +$$

$$\cancel{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cancel{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} - \cancel{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} -$$

$$- \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

VII. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}. \end{array} \right.$$