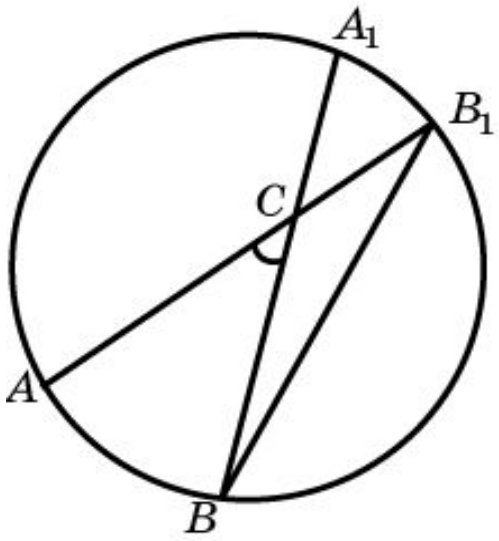
Теорема 1

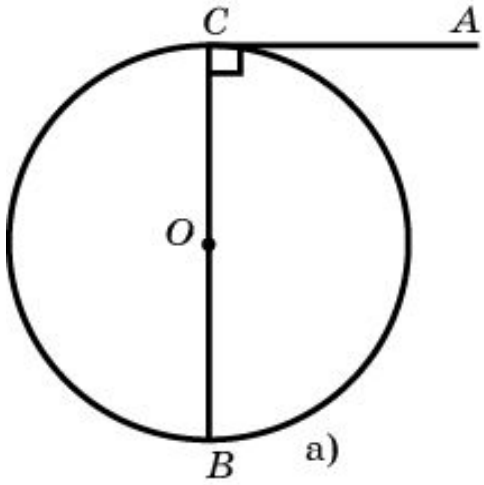
Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.



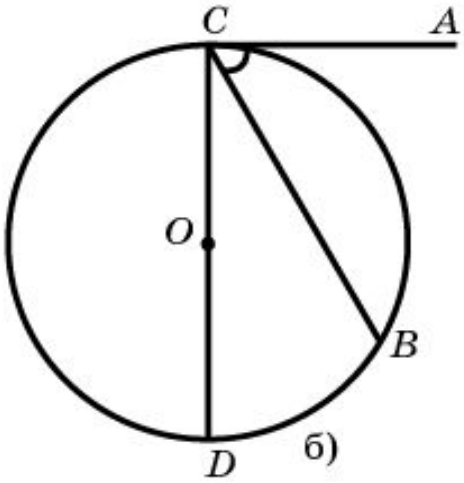
Доказательство. Рассмотрим угол ACB с вершиной C внутри круга и точками A и B на окружности. Пусть A_1, B_1 – точки пересечения с окружностью сторон вертикального к нему угла. Проведем хорду BB_1. Угол ACB является внешним углом треугольника B_1CB. Следовательно, $\angle ACB = \angle AB_1B + \angle B_1BA_1$. Углы, стоящие в правой части равенства измеряются половинами соответствующих дуг, что и завершает доказательство.

Теорема 2

Угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри этого угла.



а)



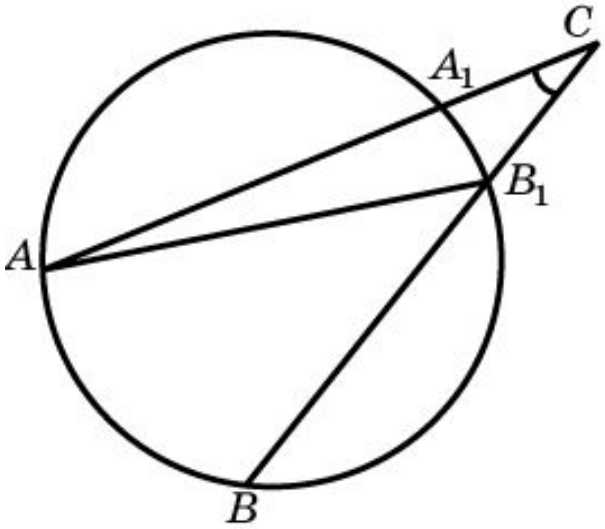
б)

Доказательство. Пусть угол ACB образован касательной AC и хордой BC окружности. Если этот угол – прямой, то BC – диаметр окружности и, следовательно, угол ACB измеряется половиной дуги полуокружности, заключенной внутри этого угла. Если угол ACB – острый, то проведем диаметр CD. Имеем $\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD$. Угол ACD измеряется половиной дуги CBD окружности. Угол BCD измеряется половиной дуги BD окружности. Следовательно, их разность (угол ACB) измеряется половиной дуги CB окружности, заключенной внутри этого угла.

Самостоятельно рассмотрите случай тупого угла.

Теорема 3

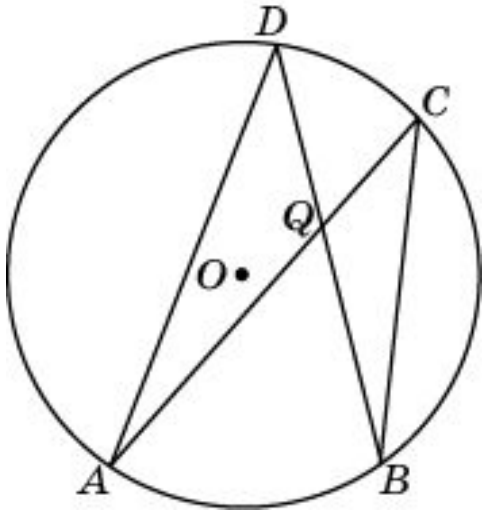
Угол с вершиной вне круга, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла.



Доказательство. Рассмотрим угол ACB с вершиной C вне окружности и точками A и B на окружности. Пусть A_1, B_1 – точки пересечения с окружностью сторон AC и BC. Проведем хорду AB_1. Угол AB_1B является внешним углом треугольника AB_1C. Следовательно, $\angle ACB = \angle AB_1B - \angle B_1AA_1$. Углы, стоящие в правой части равенства измеряются половинами соответствующих дуг, что и завершает доказательство.

Упражнение 1

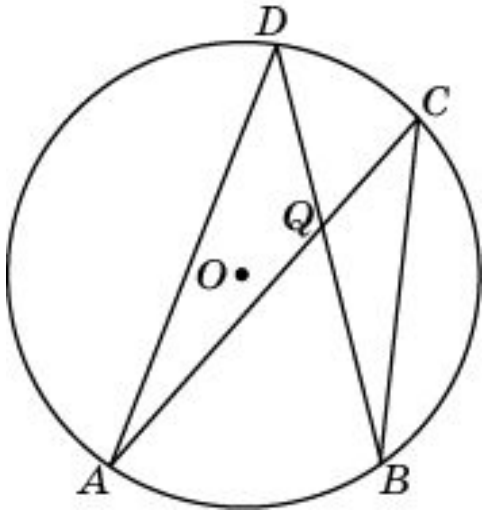
Вписанные углы ACB и CAD равны соответственно 36^o и 20^o. Найдите угол AQB, образованный пересекающимися хордами AC и BD.



Ответ: 56^o.

Упражнение 2

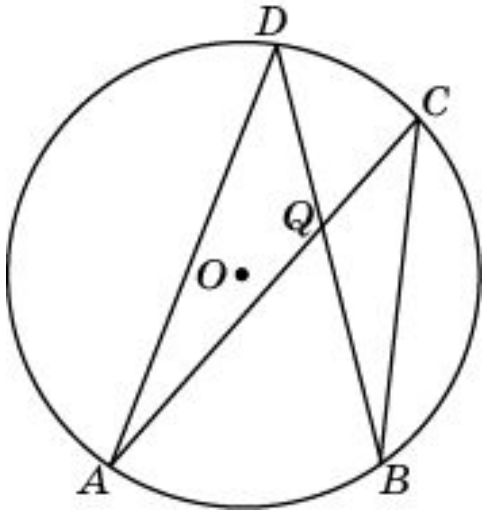
Угол AQB, образованный пересекающимися хордами AC и BD окружности, равен 54^o. Вписанный угол ACB равен 34^o. Найдите вписанный угол CAD.



Ответ: 20^o.

Упражнение 3

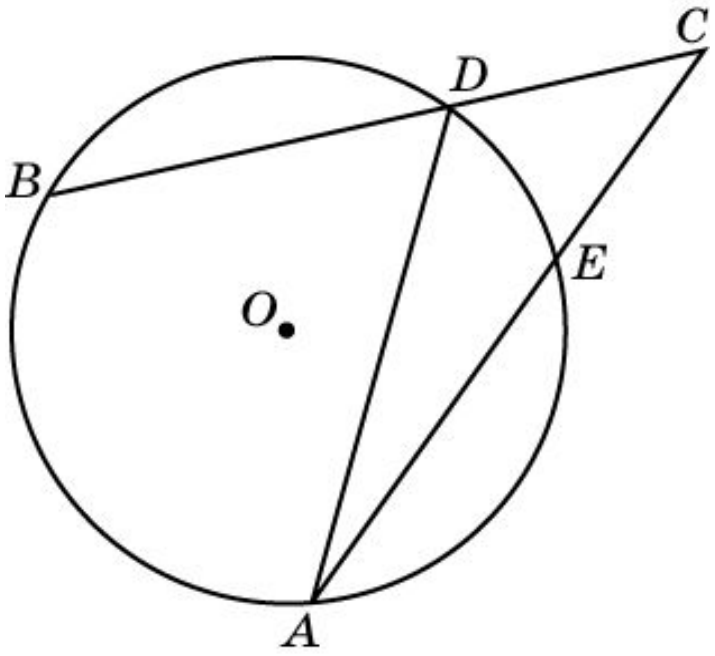
Дуги AB и CD окружности составляют соответственно 72° и 38°. Найдите угол AQB, образованный пересекающимися хордами AC и BD.



Ответ: 55°.

Упражнение 4

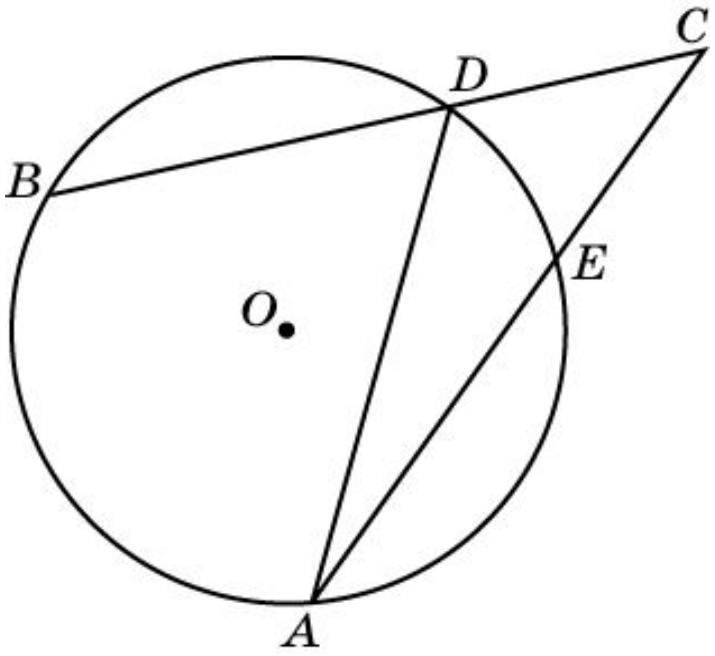
Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118^o и 38^o.



Ответ: 40^o.

Упражнение 5

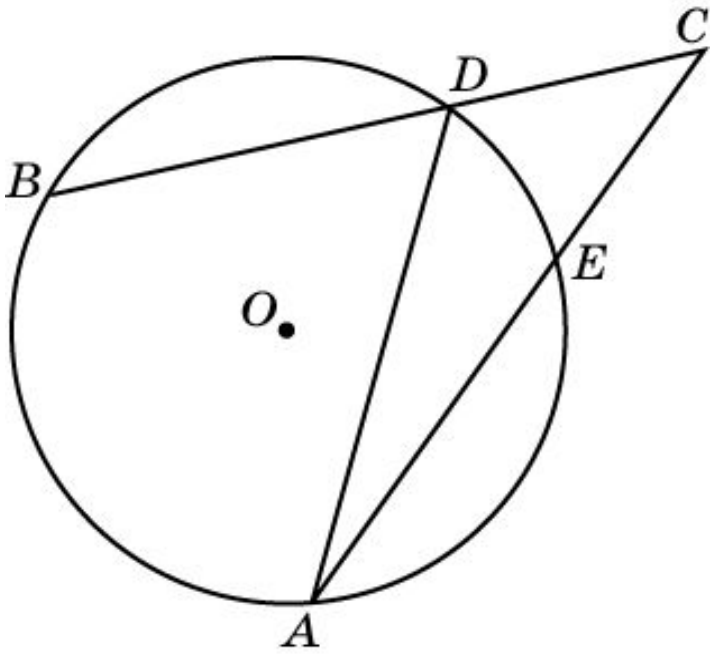
Угол ACB равен 42º. Градусная величина дуги AB окружности равна 124º. Найдите угол DAE.



Ответ: 40º.

Упражнение 6

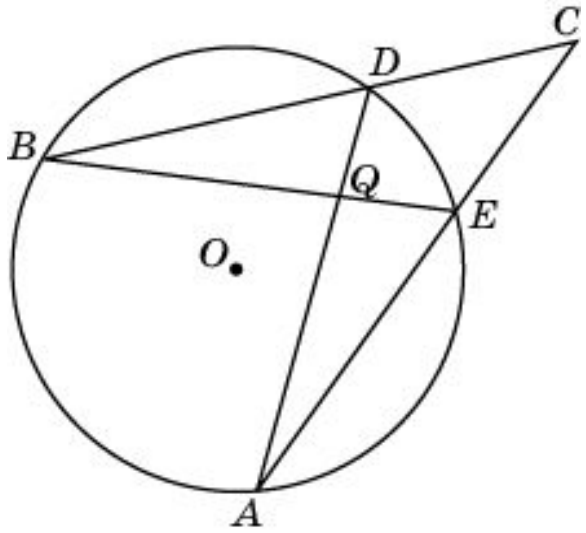
Угол ACB равен 42º. Градусная величина дуги DE окружности равна 38º. Найдите угол ADB.



Ответ: 61º.

Упражнение 7

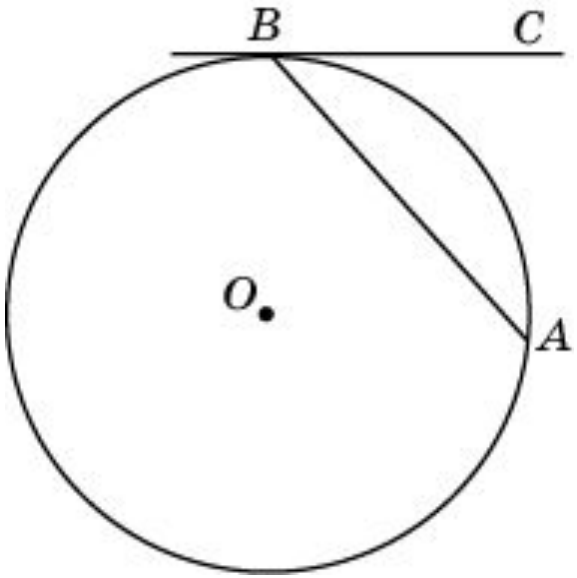
Найдите угол ACB, если вписанный угол ADB равен 62^o, а угол AQB равен 80^o.



Ответ: 44^o.

Упражнение 8

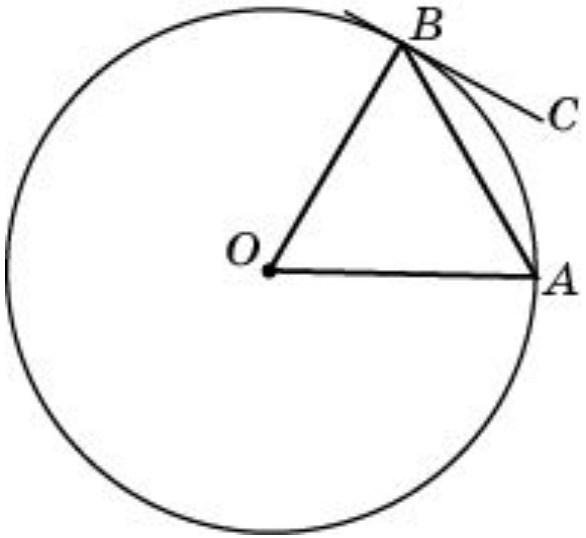
Хорда AB стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B.



Ответ: 46°.

Упражнение 9

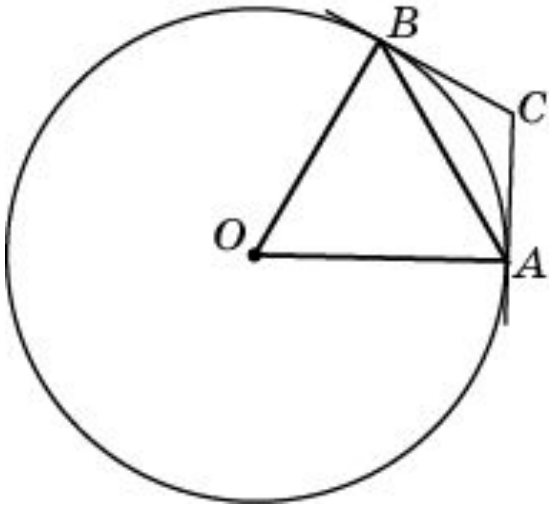
Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 32°. Найдите градусную величину дуги, стягиваемую хордой AB.



Ответ: 64°.

Упражнение 10

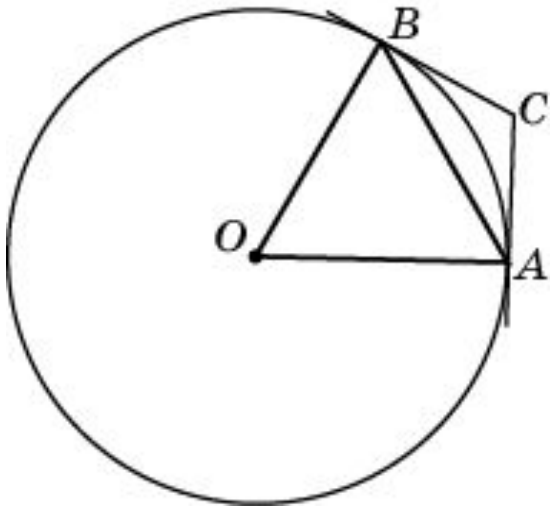
Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB.



Ответ: 118°.

Упражнение 11

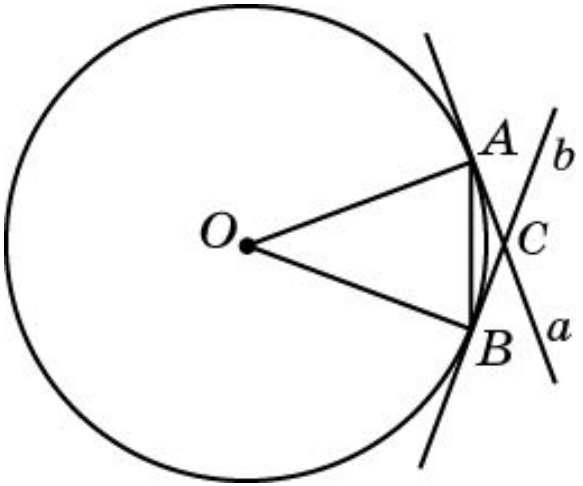
Касательные CA и CB к окружности образуют угол ACB, равный 122°. Найдите градусную величину дуги AB, стягиваемую точками касания.



Ответ: 58°.

Упражнение 12

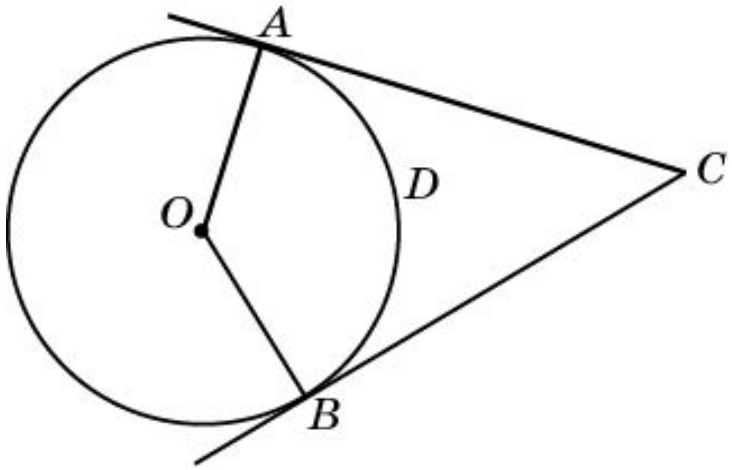
Хорда AB стягивает дугу окружности в 44°. Найдите углы, которые образует эта хорда с касательными к окружности, проведенными через ее концы.



Ответ: 22°.

Упражнение 13

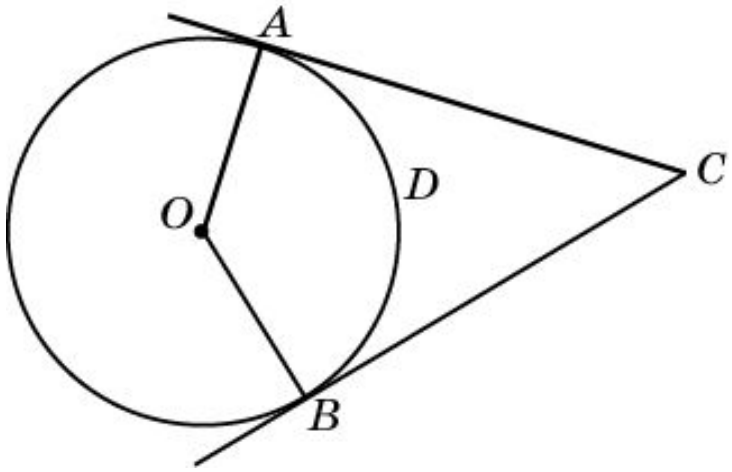
Найдите угол ACB, если его стороны CA и CB касаются окружности, а дуга ADB окружности, заключенная внутри этого угла, равна 132°.



Ответ: 48°.

Упражнение 14

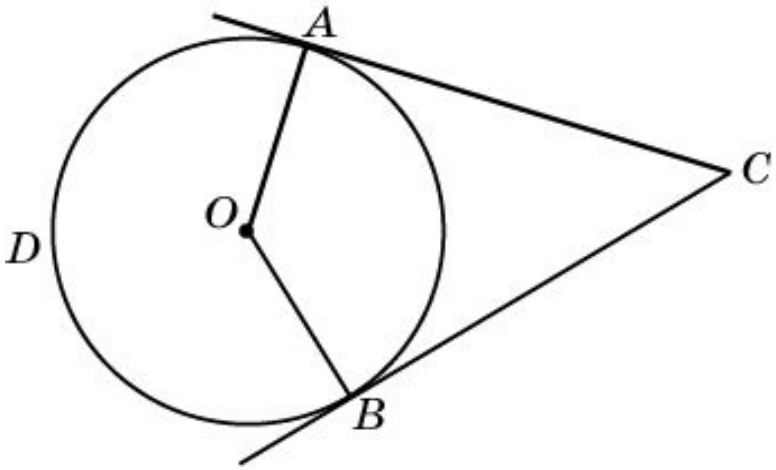
Угол ACB равен 52º. Его стороны CA и CB касаются окружности. Найдите градусную величину дуги ADB окружности, заключенной внутри этого угла.



Ответ: 128º.

Упражнение 15

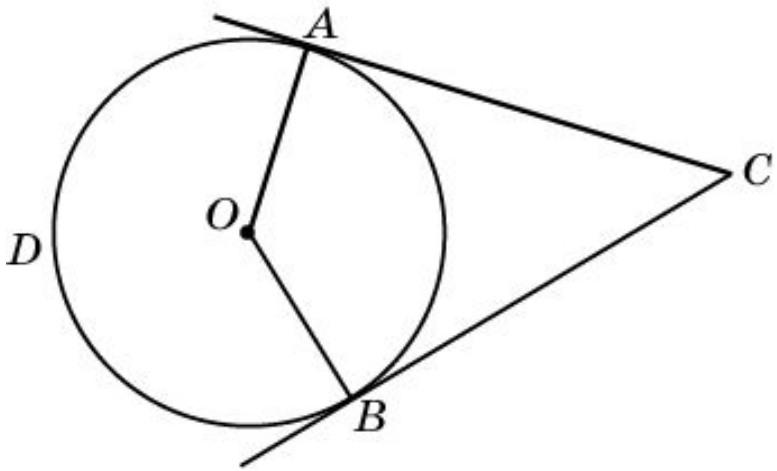
Найдите угол ACB, если его стороны CA и CB касаются окружности, а дуга ADB окружности, заключенная внутри этого угла, равна 232°.



Ответ: 52°.

Упражнение 16

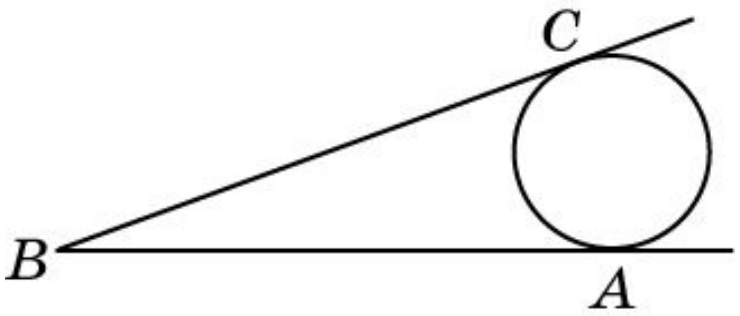
Угол ACB равен 48º. Его стороны CA и CB касаются окружности. Найдите градусную величину дуги ADB окружности, заключенной внутри этого угла.



Ответ: 228º.

Упражнение 17

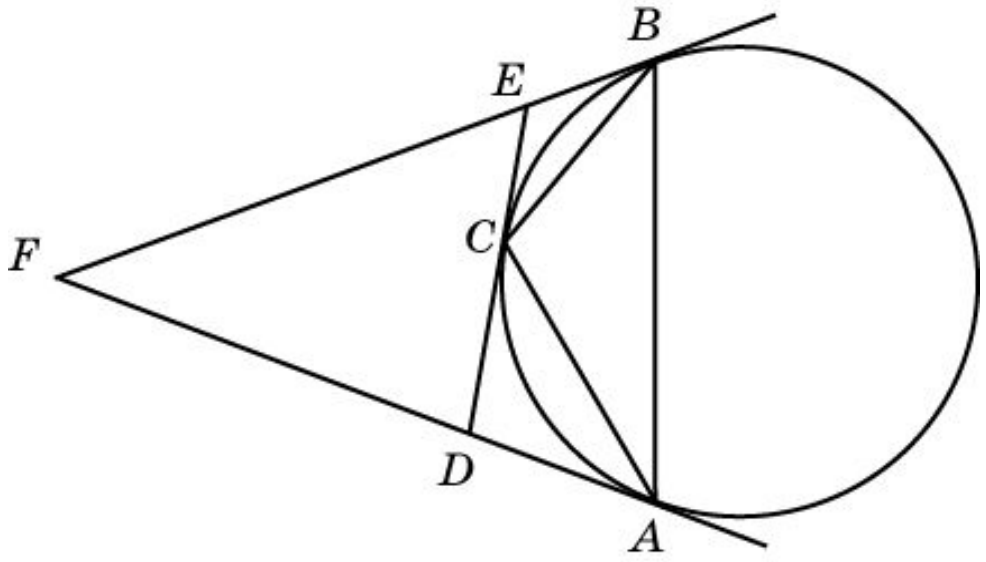
В угол ABC вписана окружность. Точки касания делят окружность на дуги, градусные величины которых относятся как 5:4. Найдите величину угла ABC.



Ответ: 20°.

Упражнение 18

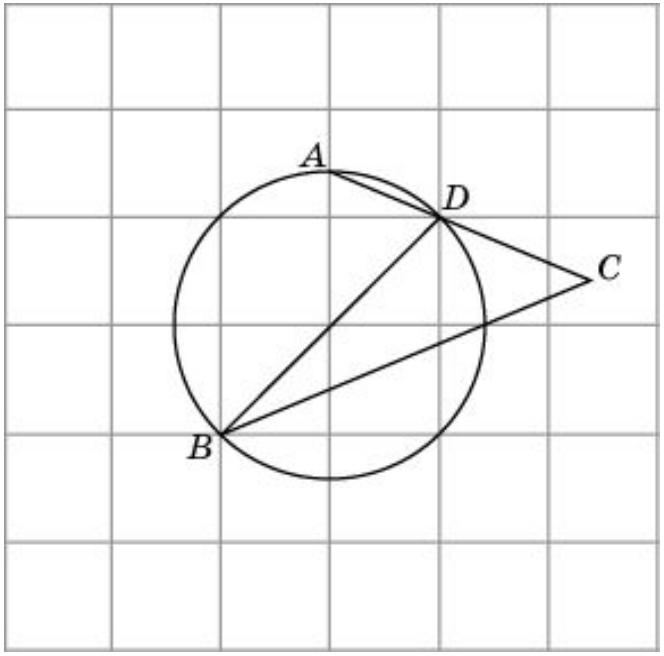
Окружность разделена точками A, B, C на дуги, градусные величины которых относятся как 11 : 3 : 4. Через точки A, B, C проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы образовавшегося треугольника.



Ответ: 80º, 60º, 40º.

Упражнение 19

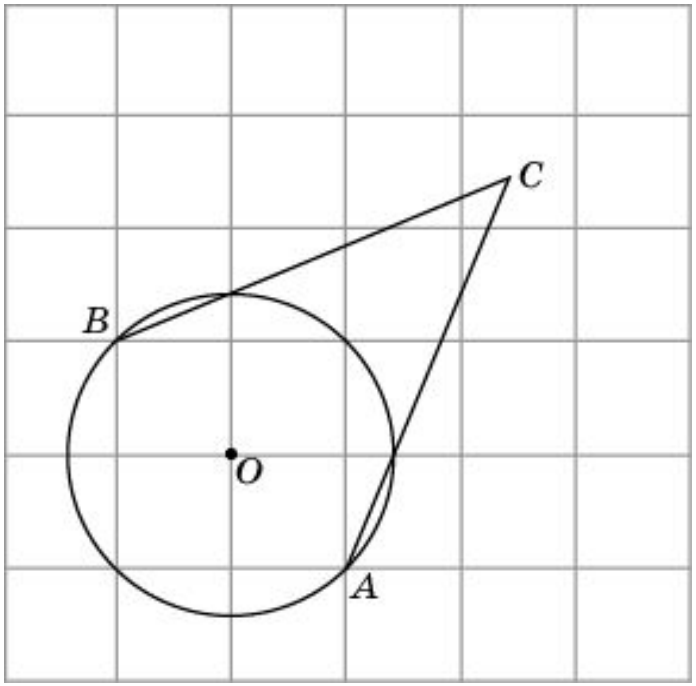
Найдите величину угла ACB.



Ответ: 45º.

Упражнение 20

Найдите величину угла ACB.



Ответ: 45°.