

2.3 Ускорение материальной точки

При неравномерном движении скорость частицы может меняться как по величине, так и по направлению. Быстрота изменения скорости определяется *ускорением*, которое равно первой производной от скорости по времени

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \dot{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \quad (2.3.1)$$

Проекция вектора ускорения на декартовую ось x равна

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \ddot{x}$$

Для a_y и a_z надо сделать замены $x \rightarrow y$ и $x \rightarrow z$.

Выделим из ускорения нормальную и тангенциальную составляющие. Для этого подставим в (2.3.1) формулу для скорости

$$\vec{v} = v \vec{\tau}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v \frac{d(\vec{\tau})}{dt}$$

Обозначим $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$; $\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$ (2.3.2)

Тогда $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ (2.3.2)

$\vec{a}_\tau$ - тангенциальное ускорение

$\vec{a}_n$ - нормальное ускорение

Тангенциальное ускорение направлено вдоль единичного вектора $\vec{e}_\tau$, поэтому оно направлено по касательной к траектории и характеризует изменение модуля скорости.

При этом если $a_\tau > 0$, то модуль скорости со временем увеличивается, а вектор $\vec{v}$ тангенциального ускорения направлен в ту же сторону, что и вектор скорости $\vec{v}$.

Если $a_\tau < 0$, то модуль скорости со временем уменьшается, а векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}_\tau$ направлены в противоположные стороны.

При равномерном движении $a_\tau = 0$ тангенциального ускорения нет.

Нормальное ускорение не изменяет модуль скорости, оно меняет только направление скорости.

$$a_n = v \tau = \frac{v^2}{R} n \quad (2.3.4)$$

С учетом полученных выражений для тангенциального и нормального ускорений, вектор полного ускорения принимает окончательный вид

$$\mathbf{a} = \cancel{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} \quad (2.3.5)$$

Поскольку $\mathbf{n} \perp \boldsymbol{\tau}$ è $|\mathbf{n}| = |\boldsymbol{\tau}| = 1$, то модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{(\cancel{v})^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \quad (2.3.6)$$

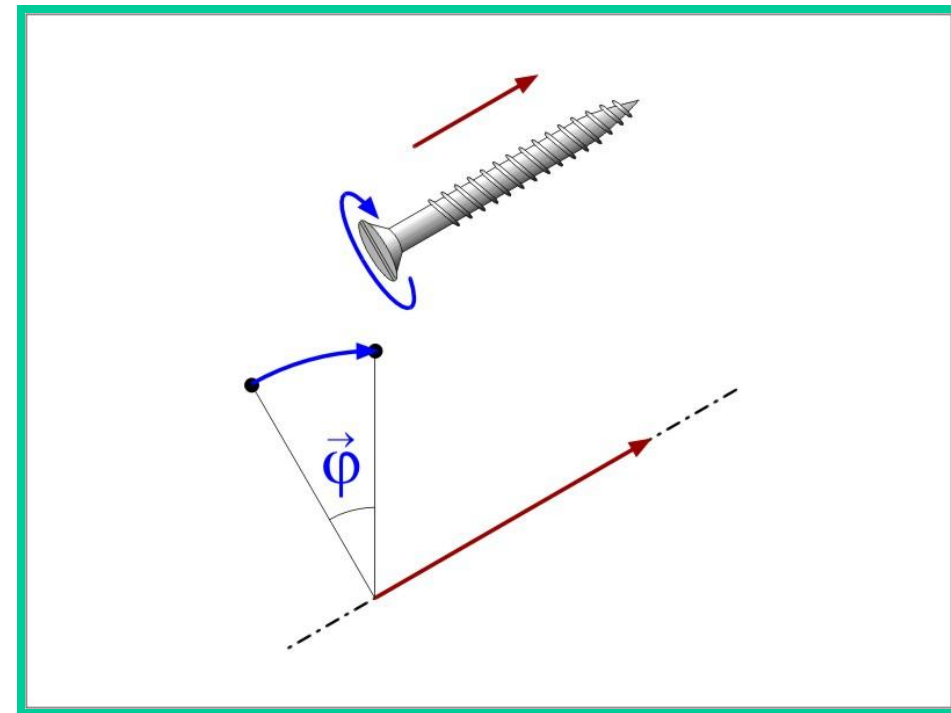
2.4 Кинематика вращательного движения

2.4.1 Угловая скорость

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Для указания направления поворота совместим **правый винт** с осью поворота так, чтобы его головка вращалась в направлении движения точек тела по окружности.

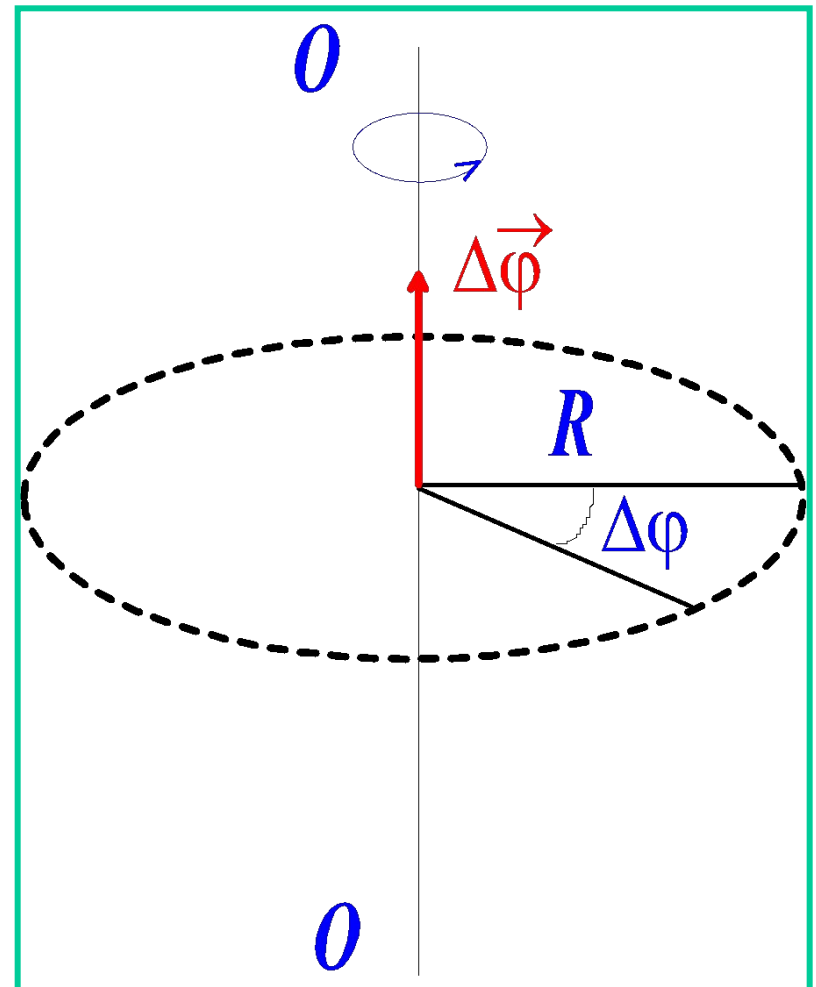
Это правило называется *правилом правого винта*:

вращение головки правого винта по часовой стрелке вызывает его перемещение в сторону острия



Пусть некоторая точка тела движется по окружности радиуса R и за время Δt поворачивается на угол $\Delta\phi$.

Данный поворот можно описать вектором $\Delta\vec{\phi}$, длина которого равна углу поворота, а направление совпадает с направлением оси вращения в сторону острия правого винта.

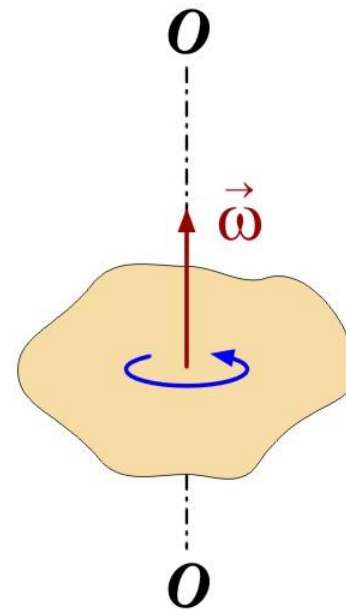


Угловой скоростью называется величина, равная первой производной угла поворота по времени

$$\overset{r}{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overset{r}{\phi}}{\Delta t} = \frac{d\overset{r}{\phi}}{dt} \quad (2.4.1)$$

Угловая скорость направлена вдоль оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта. Угловая скорость $\overset{r}{\omega}$ характеризует быстроту вращения тела. *Единицей ее измерения* является

$$\left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right)$$



Вращение с постоянной угловой скоростью называется *равномерным*. Его можно охарактеризовать периодом и частотой вращения.

Период вращения T – это время, за которое точка совершает один полный поворот на угол 2π

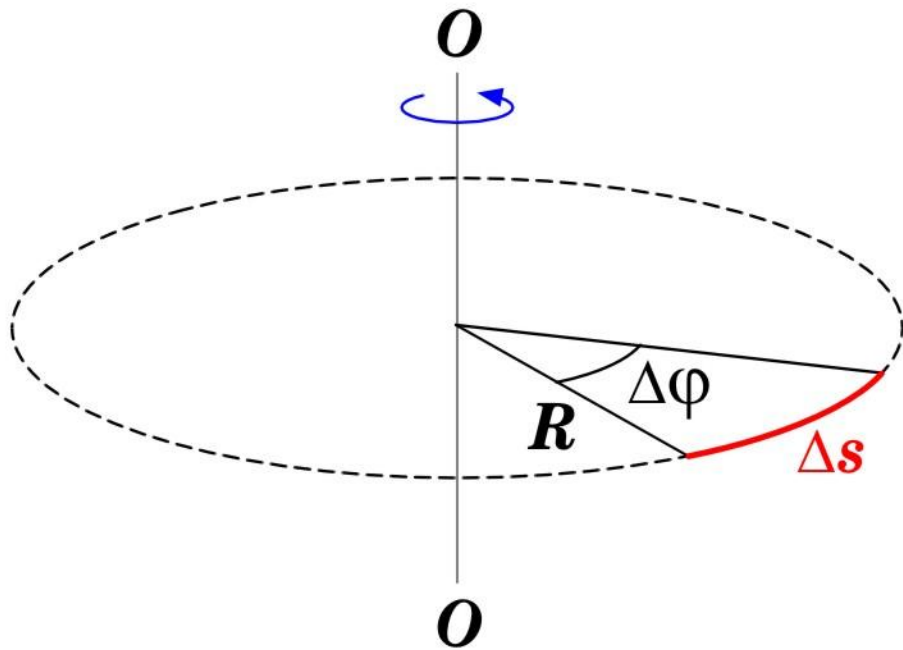
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.4.2)$$

Частота вращения ν равна числу полных поворотов за единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.4.3)$$

Единицей измерения частоты является $\left(\frac{1}{\text{сек}} \right) = \text{Гц}$

Найдем связь между угловой и линейной скоростями. Пусть за малый промежуток времени тело повернулось на угол $\Delta\varphi$. Точка, находящаяся на расстоянии R от оси, пройдет путь $\Delta s = R\Delta\varphi$. Поэтому модуль ее линейной скорости равен

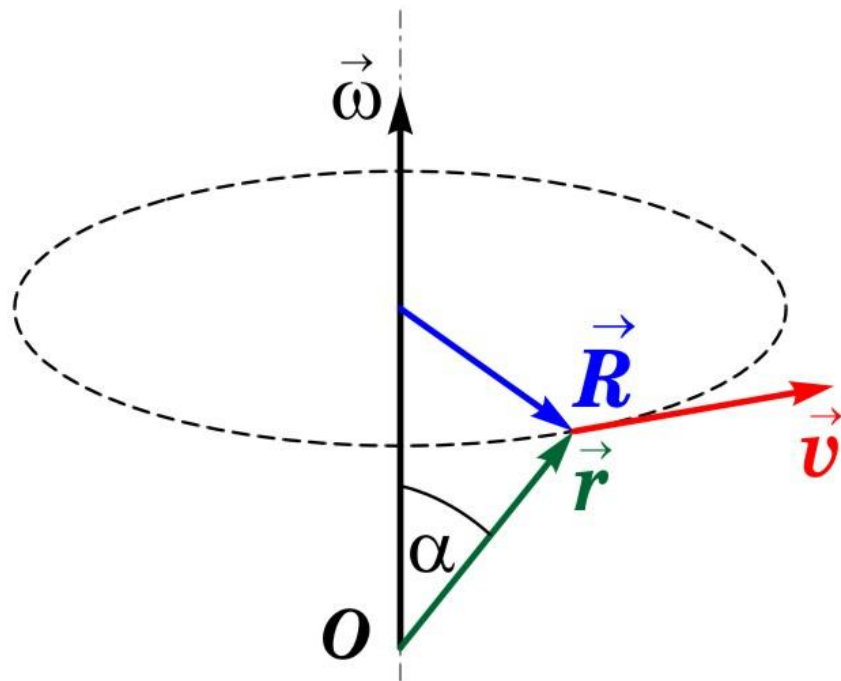


$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \quad (2.4.4)$$

$$\omega = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R$$

Из определения векторного произведения следует, что направление вектора $[\dot{\omega} \dot{r}]$ совпадает с направлением вектора скорости $\dot{v}$, а модуль равен $\omega r \sin \alpha = \omega R$. Поэтому с учетом (2.4.2) можем записать

$$\dot{v} = [\dot{\omega} \dot{r}] \quad (2.4.5)$$



Три вектора

$$\dot{v}, \dot{\omega}, \ddot{R}$$

взаимно перпендикулярны друг к другу

$$\dot{v} \perp \dot{\omega} \perp \ddot{R}$$

2.4.2 Угловое ускорение

При неравномерном вращении вектор угловой скорости может менять как свою величину, так и свое направление за счет поворота оси вращения.

Пусть за время Δt вектор $\vec{\omega}$ получил приращение $\Delta \vec{\omega}$

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости вводится *угловое ускорение*

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (2.4.6)$$

Угловое ускорение имеет размерность *рад/сек²*

Если $\varepsilon > 0$, то вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен в ту же сторону, куда направлен и вектор $\vec{\omega}$. Если $\varepsilon < 0$, то эти вектора направлены навстречу друг другу.

Запишем полное ускорение точки вращающегося тела в виде (2.3.2), как сумму нормального и тангенциального ускорений

$$\underline{a} = \underline{a}_\tau + \underline{a}_n$$

Найдем выражения для этих составляющих ускорения

$$\underline{a}_\tau = \underline{v} \times \underline{\tau} = \frac{d(\omega R)}{dt} \underline{\tau} = R \frac{d\omega}{dt} \underline{\tau} = R \varepsilon \underline{\tau} \quad (2.4.7)$$

$$\underline{a}_n = a_n \underline{n} = \frac{v^2}{R} \underline{n} = \omega^2 R \underline{n} = -\omega^2 \underline{R}$$

В последнем равенстве стоит знак (-), потому что вектор нормали $\underline{n}$, направлен к центру кривизны, а вектор $\underline{R}$ направлен от этого центра. Модули ускорений равны

$$a_\tau = R\varepsilon \quad ; \quad a_n = \omega^2 R; \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

3. Динамика материальной точки

В основе классической механики лежат три закона динамики, сформулированные **Ньютоном** в **1687** г. Эти законы являются обобщением опытных фактов о поведении макроскопических тел, движущихся со скоростями много меньшими скорости света.

3.1 Первый закон Ньютона.

Инерциальные системы отсчета

В разных системах отсчета движение одного и того же тела носит разный характер. Но относительно некоторых систем движение тел оказывается особенно простым. Эти системы отличаются от других тем, что в них *тело не подверженное воздействию других тел движется прямолинейно и равномерно*. Такие системы называются *инерциальными системами отсчета*.

Представление о существовании инерциальных систем ввел **Галилей**.

Казалось бы, опыт противоречит этому представлению и говорит об обратном – все движущиеся тела рано или поздно останавливаются, если их не подталкивать.

Поэтому **Аристотель** считал, что “естественным” состоянием тел является покой, а состояние движения требует постоянного воздействия силы.

Галилей же предположил, что трение, являющееся причиной остановки движения тел, надо рассматривать как силу, которую в принципе можно исключить. Тогда “естественным” состоянием тел становится не только покой, но и движение с постоянной скоростью, если на тела не действуют внешние силы.

Строго говоря, тел не подверженных влиянию других тел, в природе в принципе не существует, хотя бы потому, что *все тела притягивают друг друга гравитационными силами*. Но в ряде случаев влиянием этих сил можно пренебречь.

Например, *гелиоцентрическая* (*гелиос* по греч. – **Солнце**) система отсчета, связанная с **Солнцем**, с высокой степенью точности может считаться инерциальной.

С меньшим основанием можно рассматривать как инерциальную систему отсчета, связанную с **Землей** (*геоцентрическая система*), поскольку **Земля** движется с ускорением за счет вращения как вокруг **Солнца**, так и вокруг своей оси. Но это ускорение сравнительно мало и при решении многих практических задач им можно пренебречь.

Итак, **Галилей** пришел к выводу, что если на тело не действует никакая сила, то оно движется с постоянной скоростью. Каков при этом вид траектории тела в работах **Галилея** не уточняется.

Декарт и **Ньютон** считали, что эта траектория должна быть прямой линией.

Итак, первый закон Ньютона (*закон инерции*) утверждает существование инерциальных систем и формулируется следующим образом:

всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, до тех пор пока воздействие со стороны других тел не изменит это состояние.

Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно, тоже является инерциальной. Поэтому *существует бесконечное множество инерциальных систем.*

Первый закон **Ньютона** говорит, что лишь внешнее воздействие может изменить скорость тела и сообщить ему ускорение. Всякое тело как бы *“противится”* изменению своего состояния движения. Это свойство тел называют *“инертностью”*.

Опыт показывает, что одно и то же воздействие разным телам сообщает разные ускорения, следовательно, *инертность разных тел разная.*

Мерой инертности, то есть ее количественной характеристикой, является масса тела.

Масса тела определяется из сравнения с массой некоторого избранного тела, принятого за эталон. В роли эталона выступает *платино-иридиевое тело*, хранящееся в *Севре* (местечко около *Парижа*). Его масса считается равной *1 кг в международной системе единиц СИ.*

Масса обладает *свойством аддитивности.* Это значит, что масса составного тела равна сумме масс отдельных его частей. Однако, данное свойство справедливо лишь в рамках классической механики.

В релятивистской механике аддитивность массы не имеет места.

Для количественного описания внешних воздействий вводится понятие **силы**.

Сила – это векторная величина, выступающая мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

3.2 Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона является **основным законом динамики**. Он говорит о том, как меняется механическое движение тела под действием приложенной к нему силы. Опыт показывает, что:

ускорение тела пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально его массе

второй закон Ньютона

$$a = \frac{F}{m} \quad (3.2.1)$$

Второй закон **Ньютона**, также как и первый закон, *справедлив только в инерциальных системах отсчета*.

Из **(3.2.1)** следует, что когда сила равна нулю, ускорение тоже равно нулю. Это совпадает с утверждением первого закона **Ньютона**. Поэтому первый закон является частным случаем второго. Но, несмотря на это, первый закон формулируется независимо от второго, так как он *постулирует существование инерциальных систем отсчета*, что не является очевидным.

В классической механике считается, что масса тела не зависит от его движения, поэтому уравнение **(3.2.1)** можно переписать в виде

$$\overset{r}{F} = m \overset{r}{a} = m \frac{d\overset{\cdot}{v}}{dt} = \frac{d(m\overset{\cdot}{v})}{dt} = \frac{d\overset{\cdot}{p}}{dt}$$

где $\overset{\cdot}{p} = m \overset{\cdot}{v}$ - *импульс тела*.

Таким образом

$$\overset{r}{F} = \frac{d\overset{r}{p}}{dt} \quad (3.2.2)$$

Отсюда следует другая формулировка **2-го закона Ньютона**: *сила равна скорости изменения импульса тела.*

Формула (3.2.2) имеет более широкую область применимости, чем формула (3.2.1), поскольку она, в отличие от (3.2.1), справедлива также для тел с переменной массой и для тел, движущихся с около световыми скоростями.

Опыт показывает, что выполняется принцип независимости сил :

если на тело действуют одновременно несколько сил, то каждая из них сообщает телу такое ускорение, как если бы других сил не было.

Единицей измерения силы в системе **СИ** (метр-секунда-килограмм) является *ньютон*, равный силе, которая массе **1** кг сообщает ускорение **1** м/с² в направлении действия силы

$$N = 1 \frac{кг \cdot м}{с^2}$$

В системе **СГС** (сантиметр-грамм-секунда) *единицей измерения силы* является *дина*, равная силе, которая массе **1** г сообщает ускорение **1** см/с²

$$1 \text{ дин} = 10^{-5} N$$

В системе **МКС** (метр-килограмм-секунда) *единицей измерения силы* является *килограмм-сила (кГ)*, равная силе тяжести, действующей на массу **1** кг в том месте Земли, где $g = 9.8066 \text{ м/с}^2$, поэтому

$$1 \text{ кГ} = 9.8066 N$$

3.3 Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если одно тело действует на другое тело с некоторой силой $\vec{F}_1$, то и другое тело в свою очередь тоже действует на первое тело с некоторой силой $\vec{F}_2$.

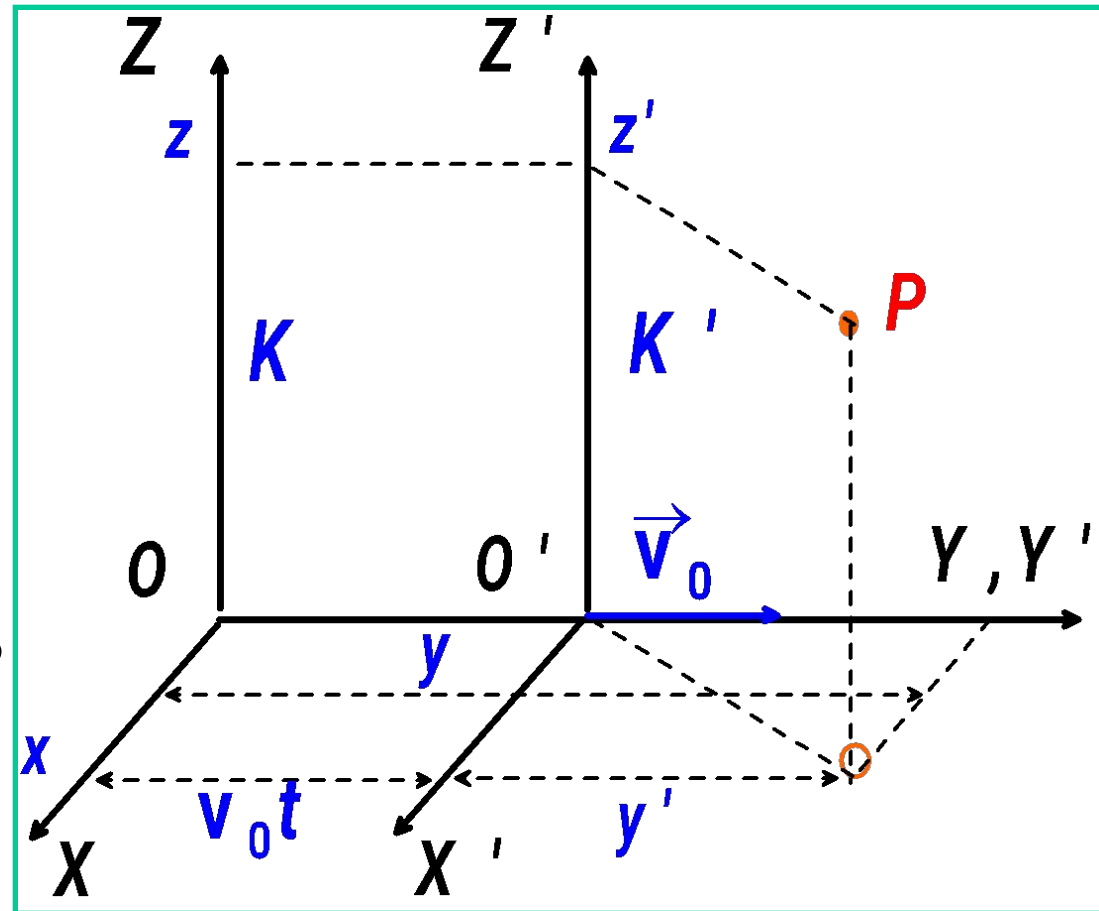
Опыт показывает, что *силы, с которыми действуют тела друг на друга, всегда равны по величине и противоположны по направлению* (третий закон Ньютона)

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (3.3.1)$$

3.4 Принцип относительности Галилея

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью $\vec{v}_0$. Систему K будем считать неподвижной.

Тогда система K' будет двигаться относительно системы K прямолинейно и равномерно. Выберем оси X, Y, Z системы K и оси X', Y', Z' системы K' , так, чтобы оси Y и Y' совпадали, а оси X и X' , а также Z и Z' были параллельны друг другу.



Найдем связь между координатами x, y, z некоторой точки P в системе K и координатами x', y', z' той же точки в системе K' .

Пусть в начальный момент времени начала координат обеих систем совпадали. Тогда, как следует из рисунка, в следующие моменты времени координаты двух систем будут связаны соотношениями

преобразования
Галилея

$$\begin{aligned}x &= x' \\y &= y' + v_0 t \\z &= z' \\t &= t'\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

Равенство времен говорит о том, что *время в классической механике считается абсолютным и течет одинаково во всех инерциальных системах отсчета.*

Продифференцируем по времени обе части (3.4.1). В результате находим связь между скоростями точки P в системах отсчета K и K'

$$v_x = v'_x$$

$$v_y = v'_y + v_0 \quad (3.4.2a)$$

$$v_z = v'_z$$

Или в векторном виде

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}' + \dot{\mathbf{v}}_0 \quad (3.4.2b)$$

Эти соотношения дают *правило сложения скоростей в классической механике*. Формула (3.4.2b) справедлива при произвольном выборе направлений координатных осей систем K и K' , тогда как формулы (3.4.2a) выполняются только при выборе осей, указанном на рисунке.

Покажем, что из преобразований **Галилея** вытекает
прежнее утверждение о том, что любая система отсчета,
движущаяся относительно некоторой инерциальной
системы с постоянной скоростью, тоже является
инерциальной.

Для этого продифференцируем по времени соотношение
(3.4.2b). Учитывая, что скорость $\mathbf{v}_0$ постоянна, получаем

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}' \quad (3.4.3)$$

Следовательно, ускорение тела во всех системах отсчета,
движущихся друг относительно друга прямолинейно и
равномерно, одно и то же. Поэтому, если одна из этих систем
инерциальная (то есть при отсутствии сил, когда $\dot{\mathbf{a}} = 0$), то и
остальные также будут инерциальными ($\dot{\mathbf{a}}' = 0$).

$$\dot{\mathbf{a}} = 0$$
$$\dot{\mathbf{a}}' = 0$$

Умножая (3.4.3) на массу тела, получим равенство сил

$$\dot{\vec{F}} = \dot{\vec{F}}'$$

Таким образом, силы, действующие на частицу во всех инерциальных системах отсчета одинаковые.

Поэтому основное уравнение динамики (3.2.1) не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Значит, *механические явления во всех инерциальных системах протекают одинаково и никакими механическими опытами нельзя установить находится ли инерциальная система в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения*

принцип относительности Галилея

3.5 Границы применимости классической механики

В течение **200** лет после создания механика **Ньютона** считалась абсолютно строгой теорией. Для объяснения любых физических явлений их сводили к механическим процессам, подчиняющимся законам **Ньютона**.

Однако, на рубеже **19-20** веков обнаружили факты, которые не укладывались в рамки классической механики. Рассмотрим некоторые из таких фактов.

1) Вопреки предположению **Ньютона**, массы тел оказываются не постоянными, а зависящими от скорости их движения **v**. Согласно специальной теории относительности **Эйнштейна** эта зависимость дается выражением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

где **c** = $3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме, **m₀** - масса покоящегося тела.

Лишь когда **v/c** << 1 можно считать, что **m** = **m₀**.

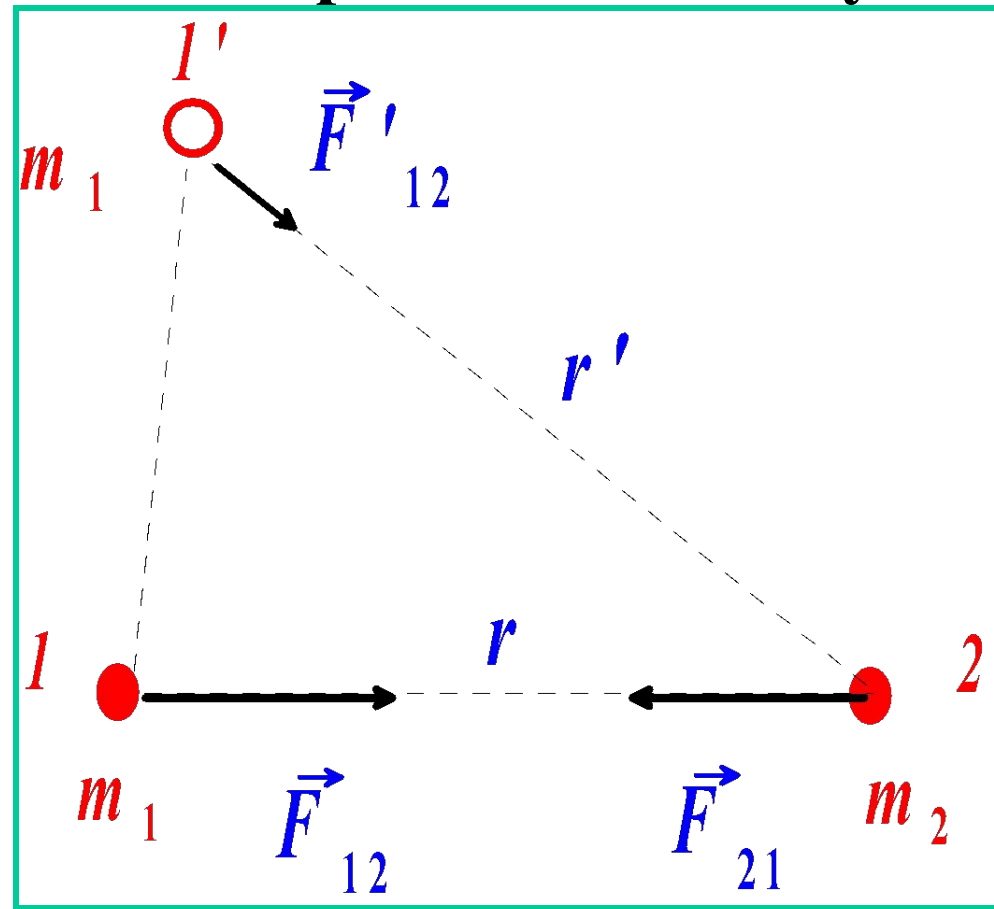
2) В механике **Ньютона** считается, что силы, с которыми действуют тела друг на друга передаются мгновенно. Опыт же показывает, что взаимодействия распространяются с конечной скоростью, равной скорости света в пустоте. Это приводит к нарушению **3-го закона Ньютона**.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим **2** частицы с массами **m_1** и **m_2** , расположенными на расстоянии **r** . По закону всемирного тяготения они притягиваются друг к другу с силой

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Данное взаимодействие осуществляется посредством гравитационных полей, созданных вокруг каждой частицы.

Пусть первоначально частицы покоились. Тогда силы притяжения $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$, действующие на них будут равны по величине и противоположны по направлению. Пусть затем **1** частица со скоростью, близкой к скорости света, сместилась в новое положение **1'**. Теперь на **1** частицу со стороны **2** частицы будет действовать новая сила $\vec{F}'_{12}$, несколько меньшая по модулю, так как $r' > r$. На **2** же частицу, до тех пор пока возмущение поля, вызванное смещением **1** частицы, не достигнет ее положения, будет действовать прежняя сила $\vec{F}_{21}$.



Поэтому, пока **1** частица двигалась и еще в течение некоторого времени, после того как она достигнет точку **1'**, **3** закон **Ньютона** будет нарушен. Это нарушение связано с запаздыванием взаимодействия.

Следовательно, *классическая механика справедлива лишь для случая контактных взаимодействий или при взаимодействии покоящихся тел.*

3) В микромире элементарные частицы (электроны, позитроны, протоны,...) движутся со скоростями, близкими к скорости света, поэтому механика **Ньютона** к ним не применима. Их поведение может быть описано лишь при учете релятивистских и квантовых эффектов.

Итак, *классическая механика является механикой тел больших масс (по сравнению с массой атомов), движущихся с малыми скоростями (по сравнению со скоростью света).*