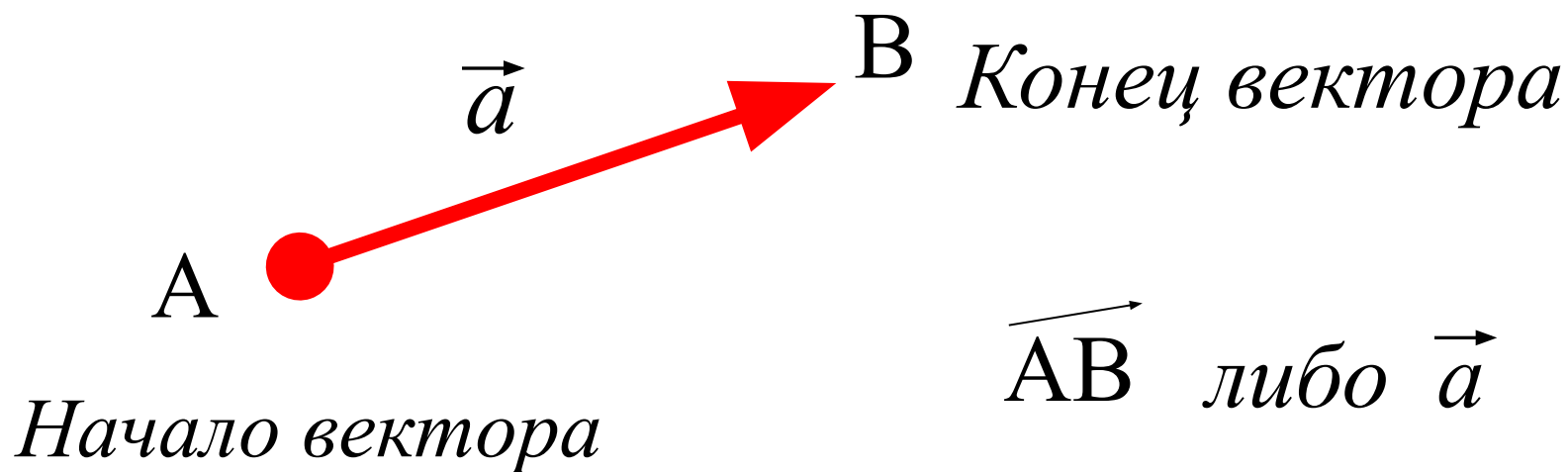


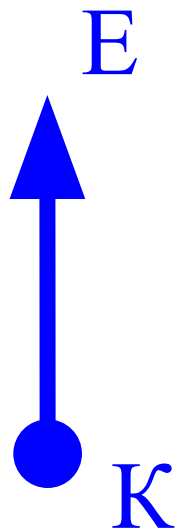
Векторы в пространстве

Понятие вектора

Отрезок, для которого указано, какая его граничная точка является началом, а какая - концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**



Длина вектора



Длиной вектора или модулем ненулевого вектора называется длина отрезка

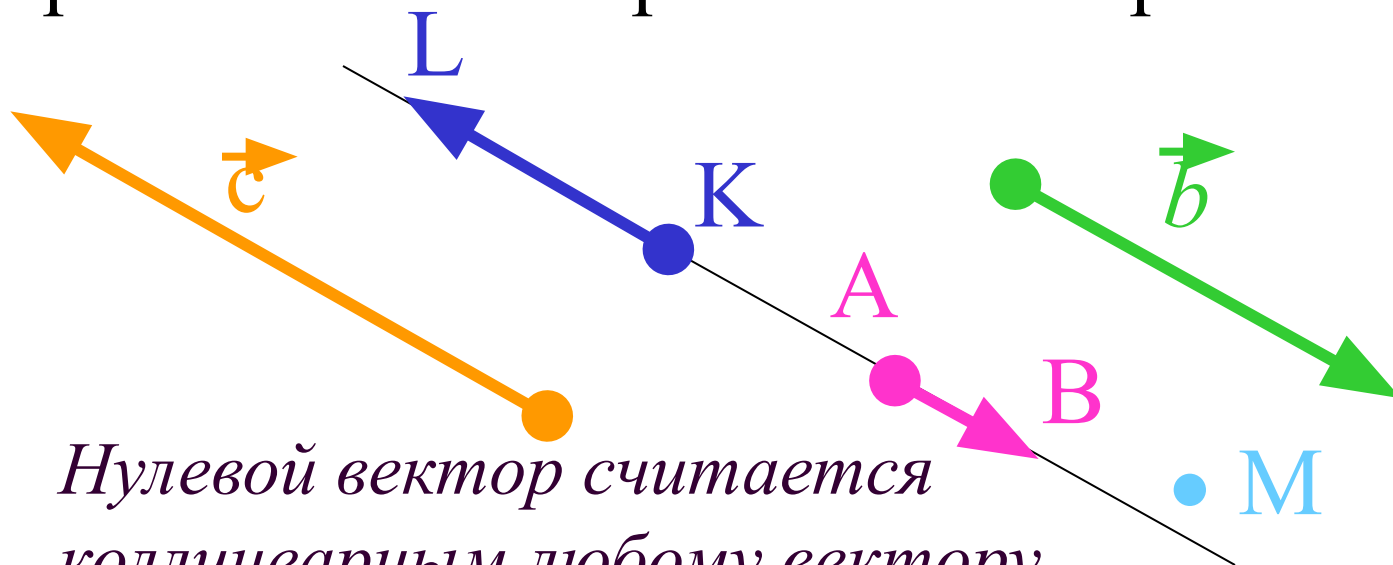
$$|\overrightarrow{KE}| = |KE| \quad \text{длина вектора } \overrightarrow{KE}$$

- $\overrightarrow{MM}$ вектор $\overrightarrow{MM}$ - нулевой вектор

$$|\overrightarrow{MM}| = 0$$

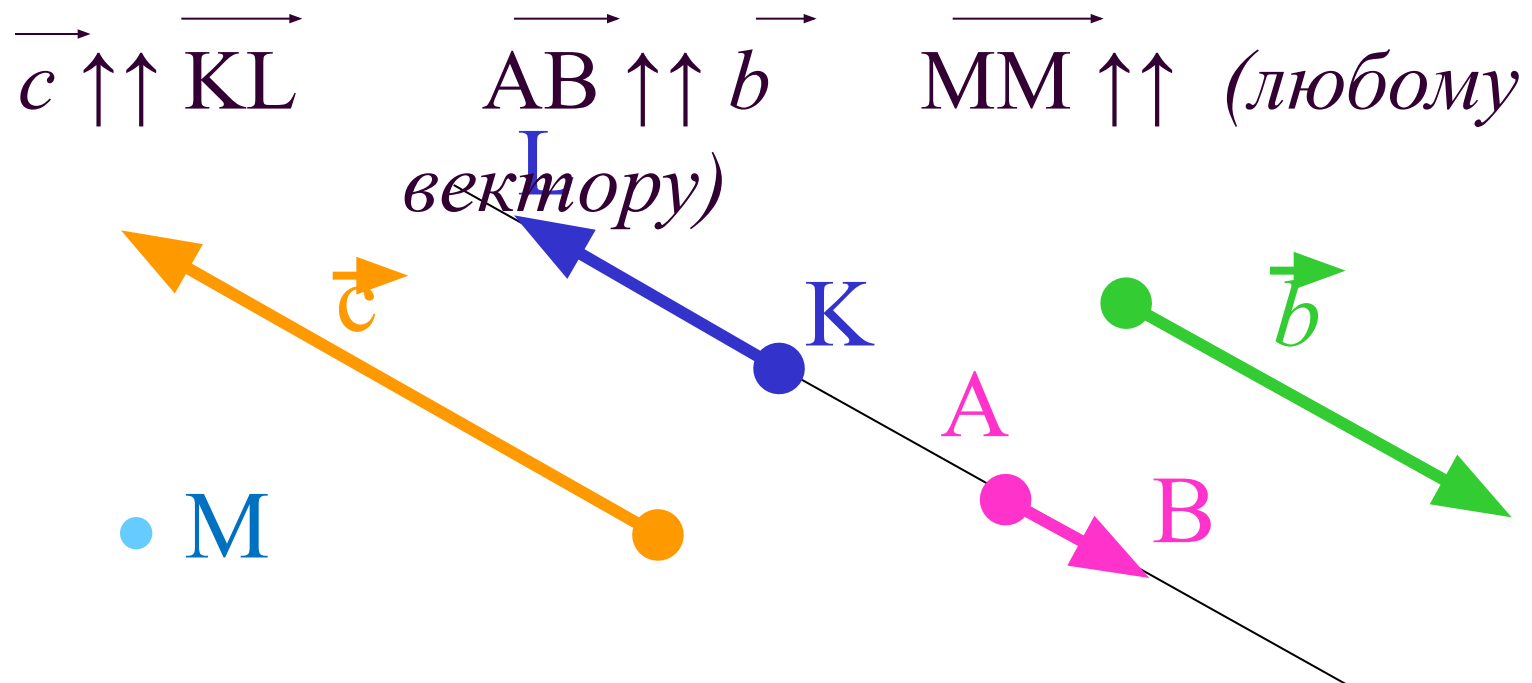
Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых



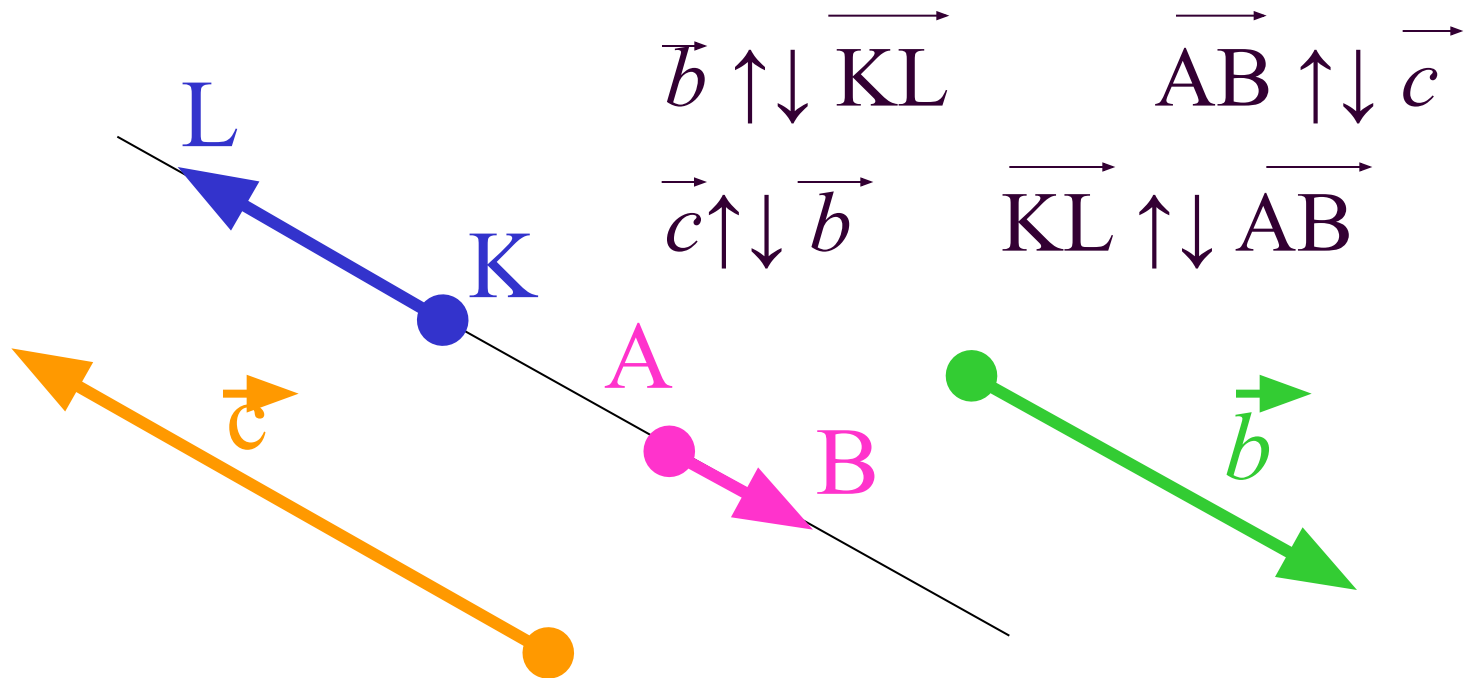
Сонаправленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление, называются **сонаправленными** векторами



Противоположно направленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление, называются **противоположно направленными** векторами

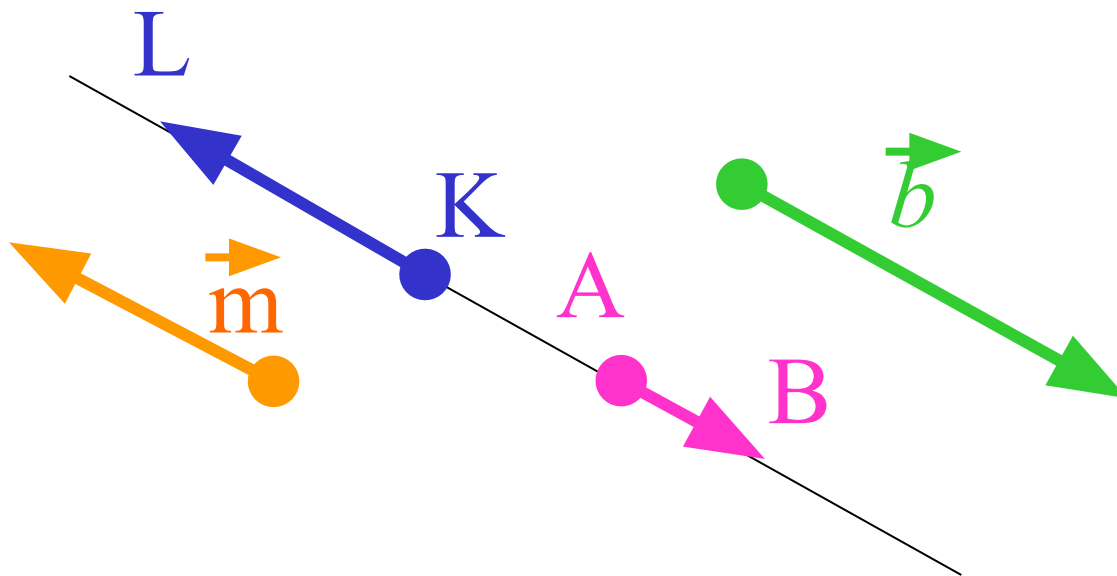


Равенство векторов

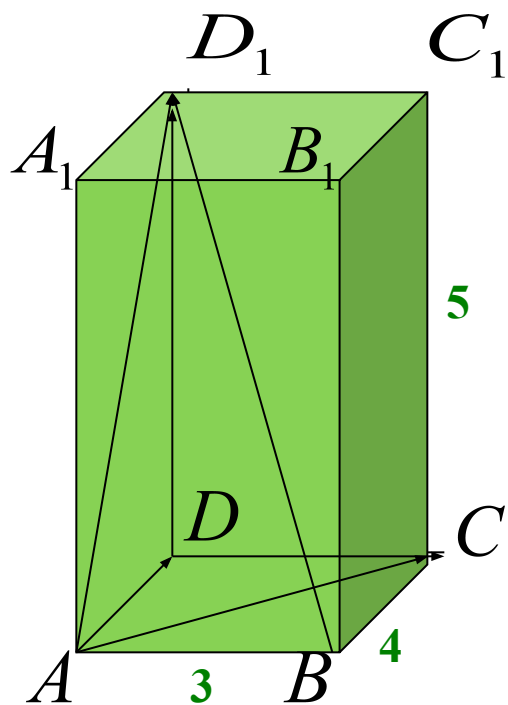
Векторы называются *равными*, если:

- 1) они сонаправлены ;
- 2) их длины равны.

$$\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}, \quad |\vec{m}| = |\overrightarrow{KL}| \text{ след-но } \vec{m} = \overrightarrow{KL}$$



Векторы в пространстве



$ABCA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед.
 $AB = 3, BC = 4, CC_1 = 5$.

Назовите векторы, равные векторам
 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC_1}$.

Назовите длины векторов :
 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD_1}$.

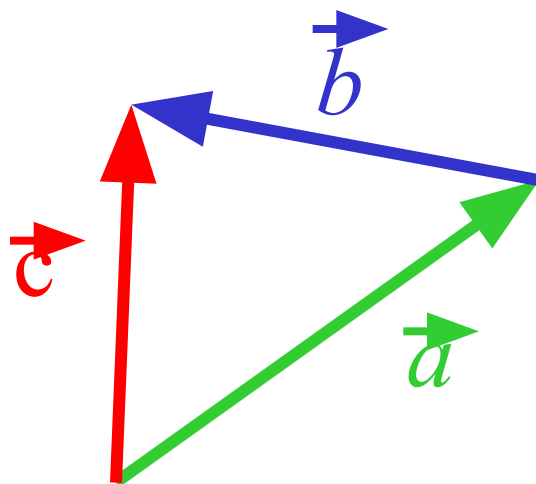
Сложение векторов

Правило треугольника

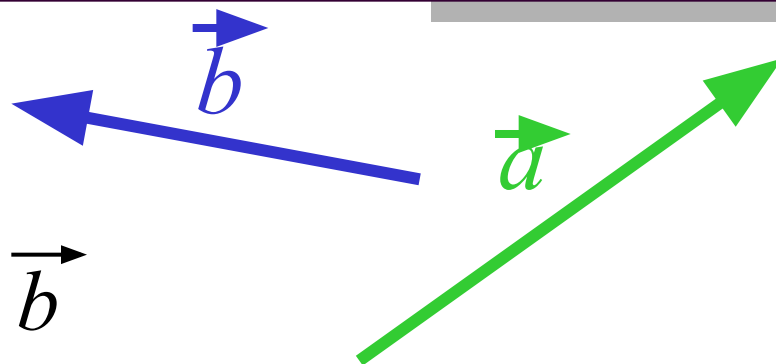
Дано: $\vec{a}$, $\vec{b}$

Построить: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Построение:



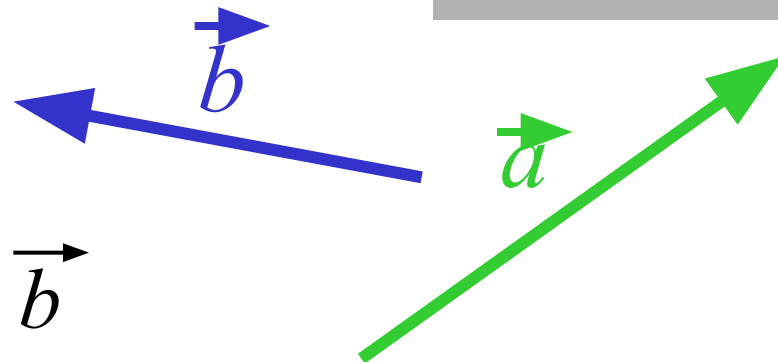
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$



Сложение векторов

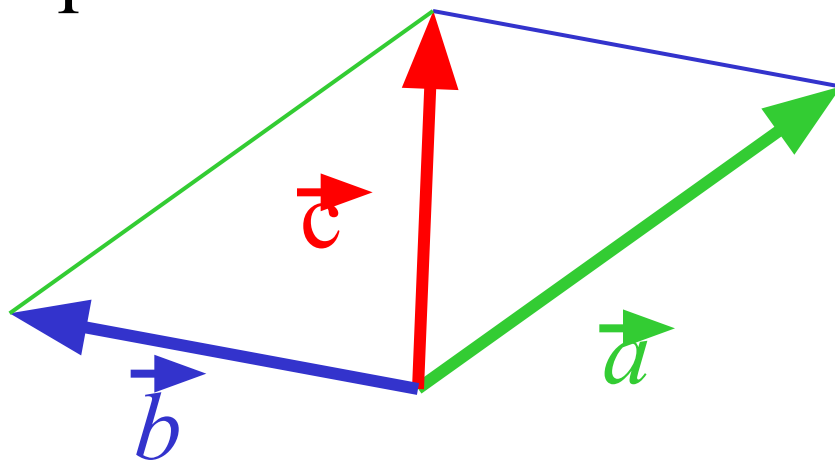
Правило параллелограмма

Дано: $\vec{a}$, $\vec{b}$



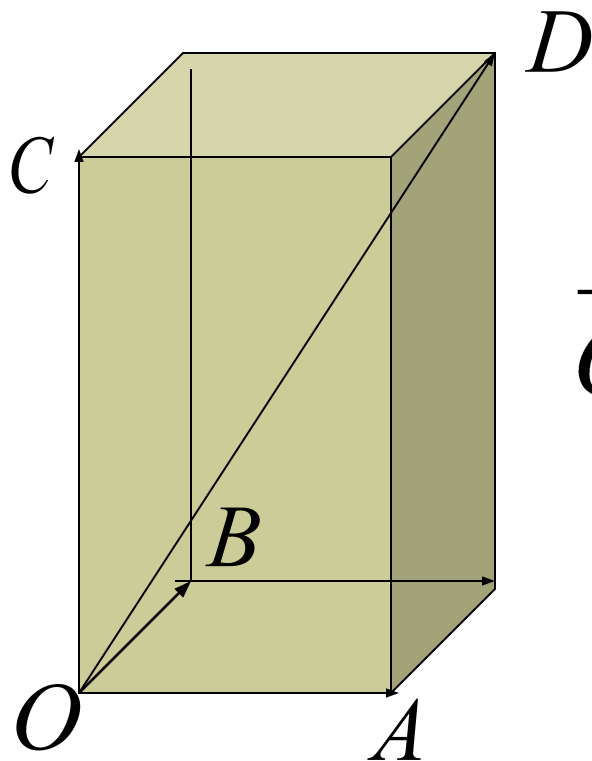
Построить: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Построение:



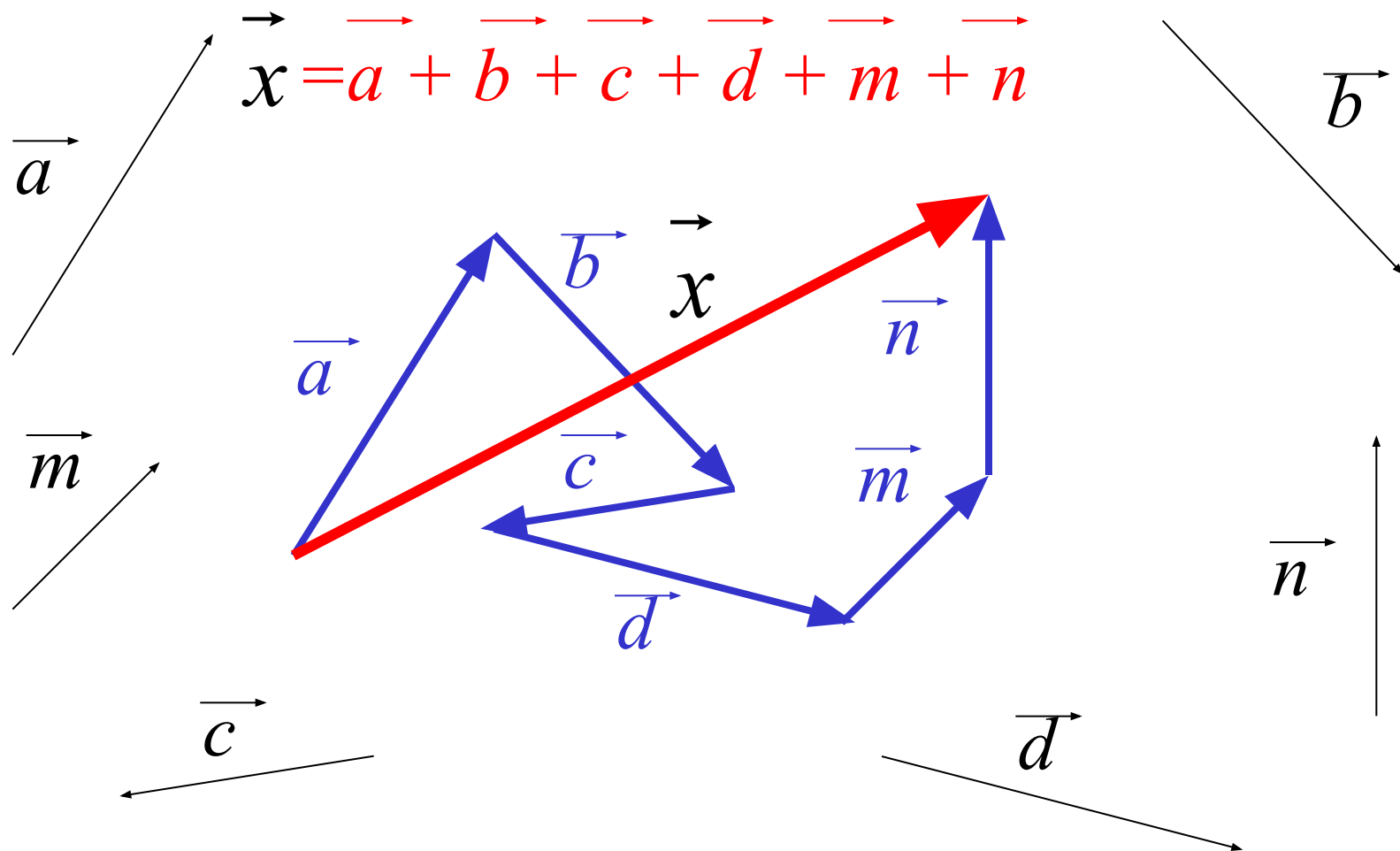
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Правило параллелепипеда



$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

Правило многоугольника

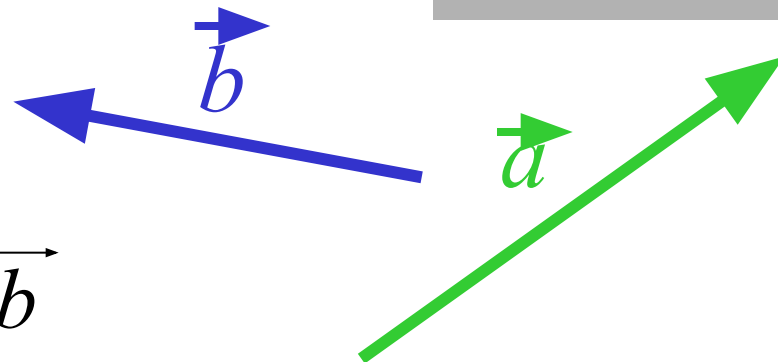
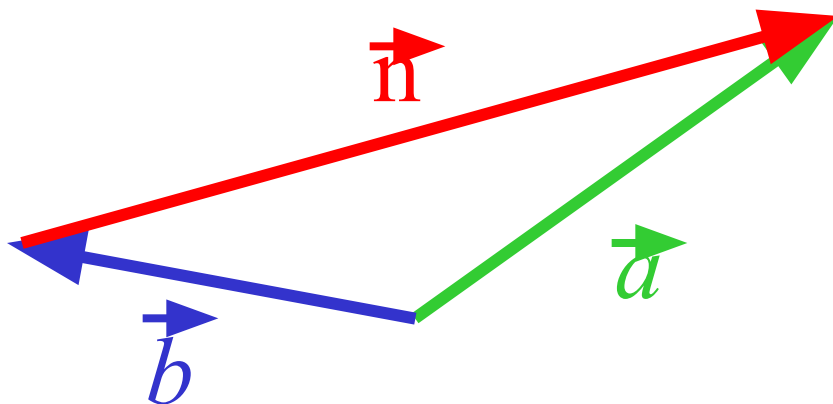


Вычитание векторов

Дано: $\vec{a}, \vec{b}$

Построить: $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$

Построение:

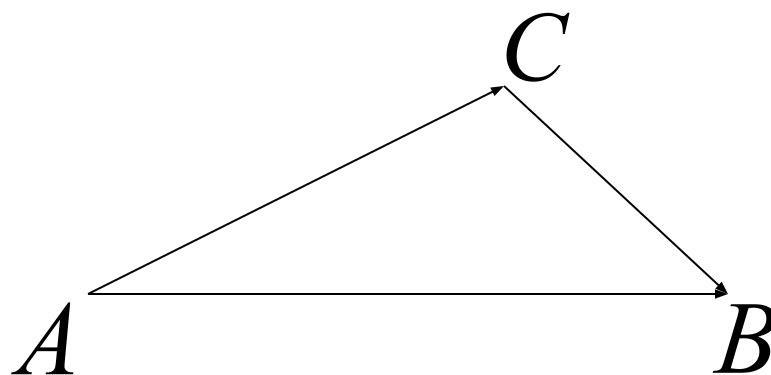
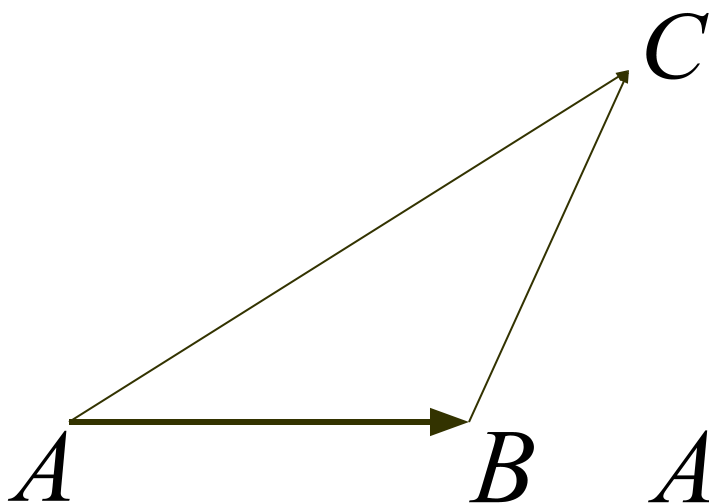


$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{n}$$

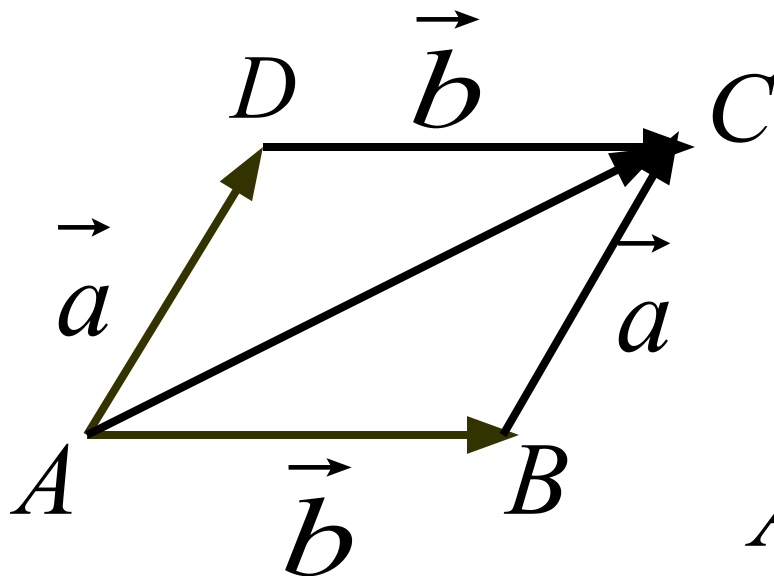
Сумма и разность векторов

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

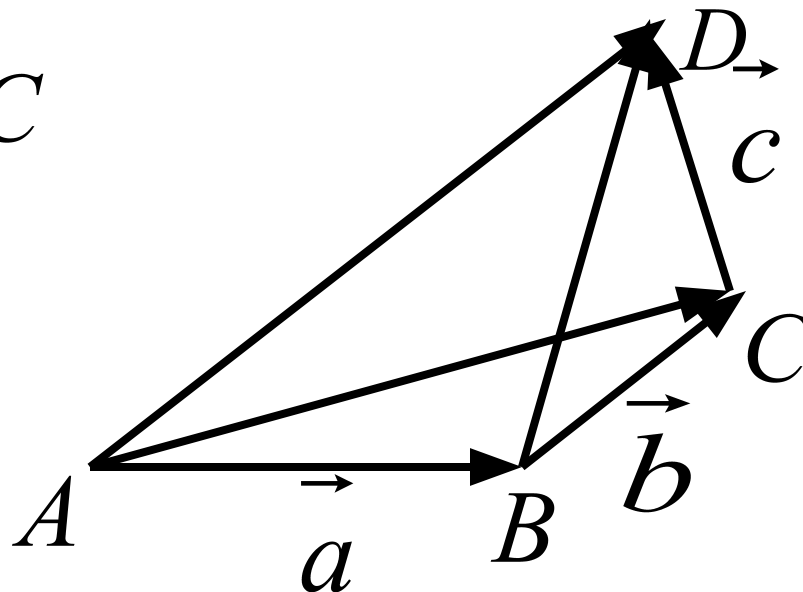


Законы сложения векторов



$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{a},$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНЫЙ
ЗАКОН



$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c},$$
$$\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН

[Назад](#)

Умножение вектора $\vec{a}$ на число k

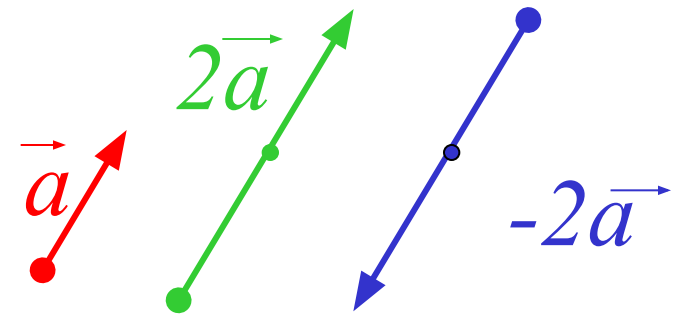
$$k \cdot \vec{a} = \vec{b},$$

$|\vec{a}| \neq 0$, k – произвольное число

$$|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|,$$

если $k \geq 0$, то $\vec{a} \uparrow \vec{b}$

если $k < 0$, то $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$



Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ справедливы равенства:

1°. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон),

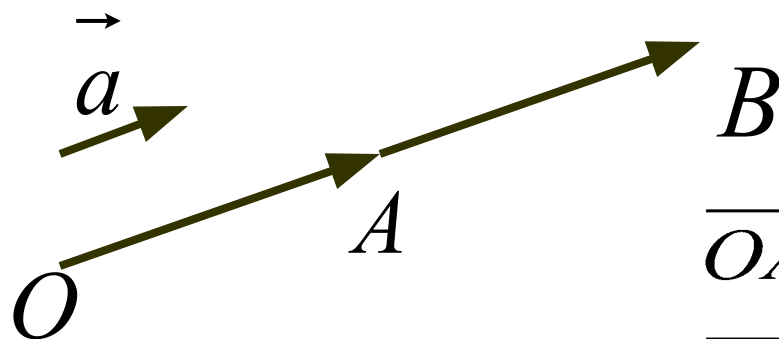
2°. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон),

3°. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон).

Умножение вектора на число

Сочетательный закон

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$$



$$\vec{OA} = 3\vec{a}, \vec{OB} = 6\vec{a},$$

$$\vec{OB} = 2 \cdot \vec{OA} = 2 \cdot (3\vec{a})$$

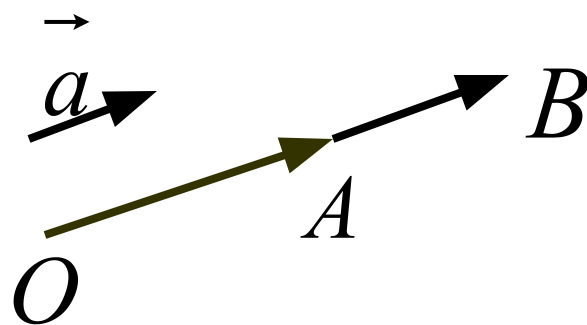
$$6\vec{a} = 2(3\vec{a})$$

$$(2 \cdot 3)\vec{a} = 2 \cdot (3\vec{a})$$

Умножение вектора на число

Первый распределительный закон

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$



$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$$

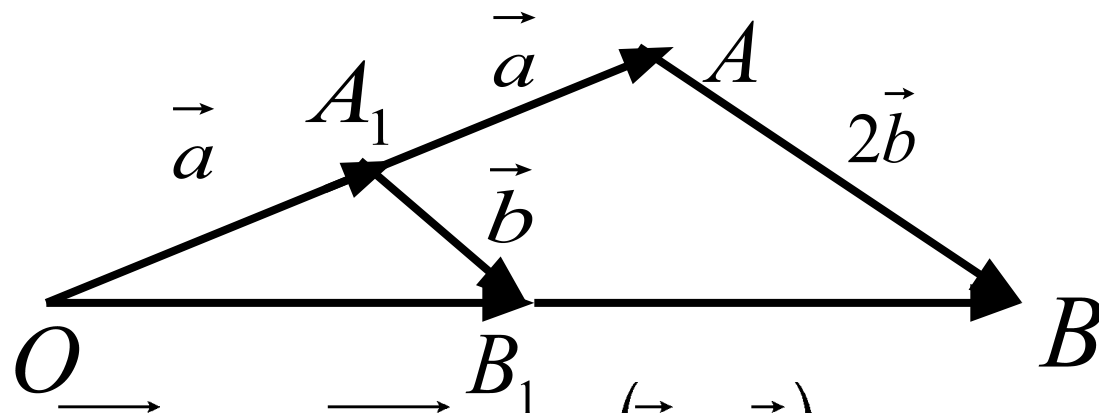
$$\overrightarrow{OB} = 5\vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$5\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}, \text{ тогда } (3 + 2)\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}$$

Умножение вектора на число

Второй распределительный закон

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$



$$1) \quad \vec{OB} = 2 \cdot \vec{OB_1} = 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}),$$

$$2) \quad \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}, \quad \vec{OB} = 2\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\text{следовательно} \quad 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

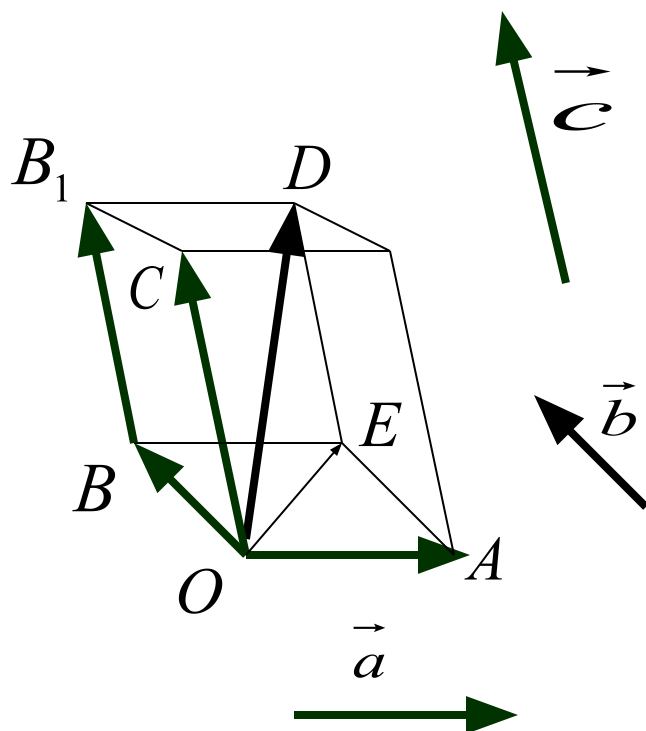
Компланарные векторы

Векторы называются *компланарными*, если при откладывании их от одной точки они будут лежать в одной плоскости.

Замечания

- Если хотя бы один из трёх векторов — нулевой, то три вектора считаются **компланарными**.
- Тройка векторов, содержащая пару коллинеарных векторов, **компланарна**.

Компланарные векторы



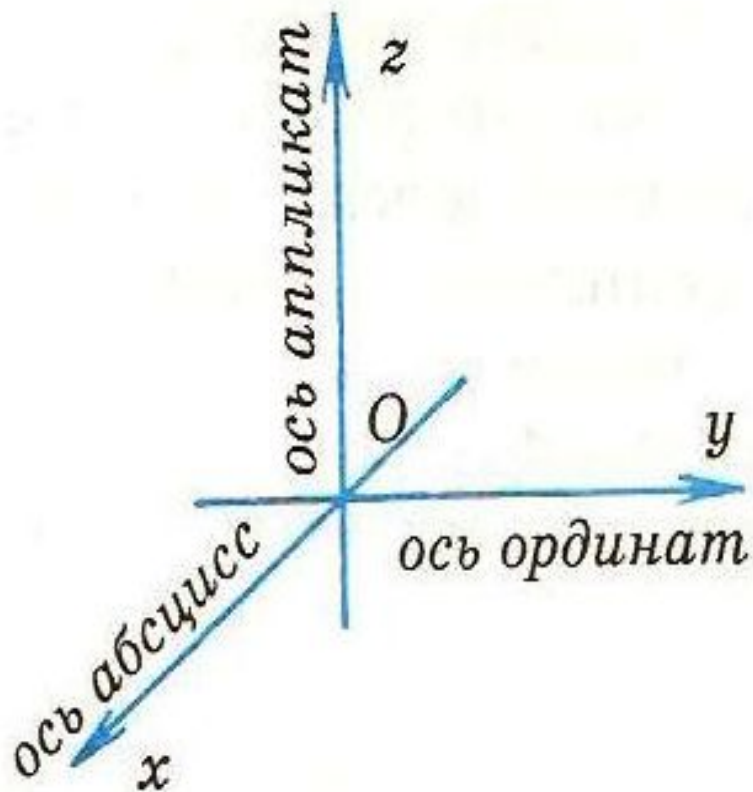
Компланарные векторы

$\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$.

Некомпланарные векторы

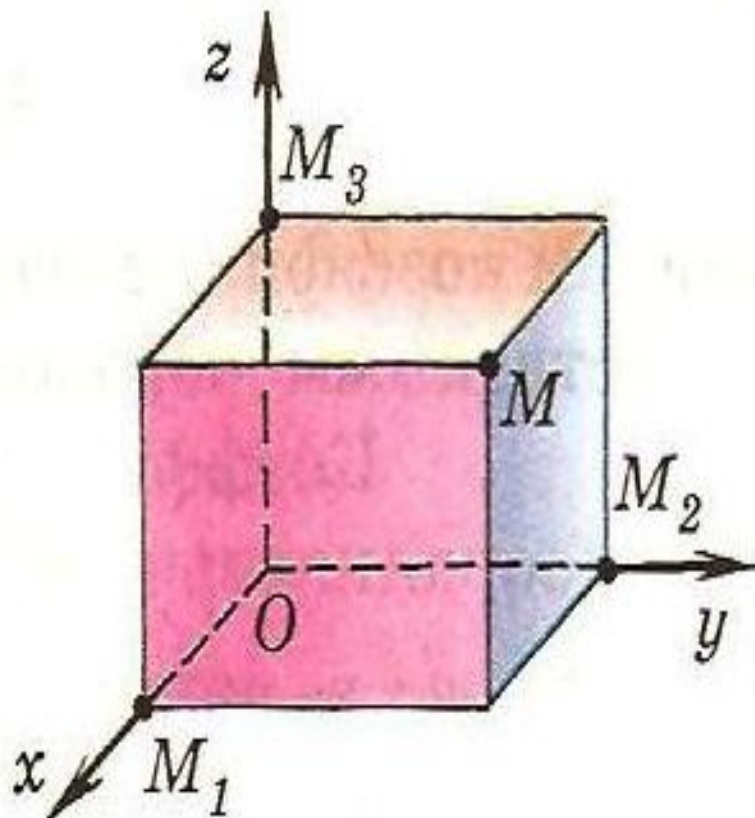
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

Прямоугольная система координат



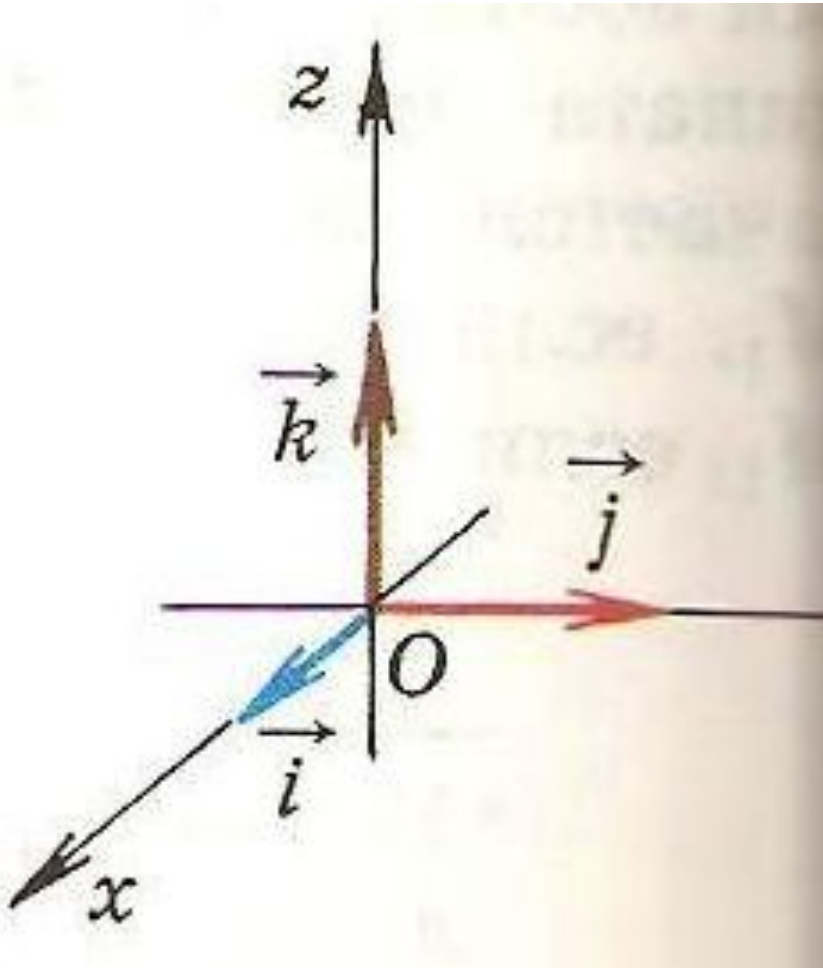
- Тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат.
- Впервые введена Р. Декартом (1596-1650)

Координаты точки



- Каждая точка в пространстве задаётся тройкой чисел (x, y, z) называемых координатами точки в пространстве

Координаты вектора



- Векторы ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)
единичные векторы
- Любой вектор можно
разложить по
координатным
векторам

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

Длина вектора

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2)$$

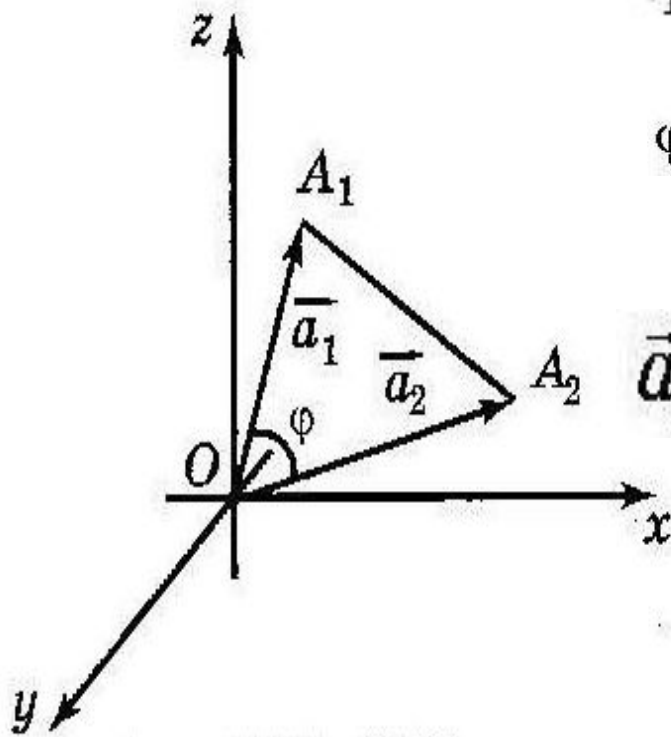
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$|\overline{A_1 A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi,$$

φ — угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.



$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Свойства скалярного произведения. Угол между векторами.

$$1. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} .$$

$$2. \quad (t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b}) .$$

$$3. \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} .$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$