



Производная и дифференциал.

Производные высших порядков.

- n -ой производной (или производной n -го порядка) функции $f(x)$ в точке x называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка в точке x .

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)} \right)'$$

Обозначение:

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

$$y'' = (y')'$$

вторая производная

Обозначения:

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right), \quad \frac{dy'}{dx}$$

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{IV}, \quad y^V, \dots, \quad y^{(n)}$$

ИЛИ

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \quad y^{(5)}, \dots, \quad y^{(n)}$$

1. Найти производную второго порядка: $y = \arcsin \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\arcsin \frac{x}{2} \right)' = \left[(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \right] = \left(\frac{x}{2} \right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right)' = \left[\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2} \right] = -\frac{\left(\sqrt{4-x^2} \right)'}{4-x^2} =$$

$$= \left[\left(\sqrt{u} \right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \right] = -\frac{\left(4-x^2 \right)'}{\left(4-x^2 \right) \cdot 2 \cdot \sqrt{4-x^2}} = -\frac{-2x}{2 \cdot \left(4-x^2 \right) \cdot \sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{x}{\left(4-x^2 \right) \cdot \sqrt{4-x^2}}$$

2. Найти n -ую производную: $y = e^{2x}$

$$y' = (e^{2x})' = \left[(e^u)' = u'e^u \right] = (2x)' e^{2x} = 2e^{2x}$$

$$y'' = (2e^{2x})' = 4e^{2x}$$

$$y''' = (4e^{2x})' = 8e^{2x}$$

$$y^{IV} = (8e^{2x})' = 16e^{2x} \quad \text{и т.д.}$$

Ответ: $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$

3. Найти n -ую производную: $y = \ln x$

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \left[\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}\right] = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$y^{IV} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{2 \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$$

$$y^V = \left(-\frac{2 \cdot 3}{x^4}\right)' = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$$

и т.д.

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

4. Найти производную 10-го порядка: $y = \sin x$

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right)$$

$$y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right)$$

и т.д.

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$$

Тогда

$$y^{(10)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 10\right) = \sin(x + 5\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$$

Ответ: $y^{(10)} = -\sin x$

Производная высших порядков неявно заданной функции.

5. Найти y''' , если $x^2 + y^2 = 1$

$$1) \quad (x^2 + y^2)' = 1'$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad y'' &= \left(-\frac{x}{y} \right)' = -\frac{x' \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y} \right)}{y^2} = \\
 &= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad y''' &= \left(-\frac{1}{y^3} \right)' = \frac{(y^3)'}{y^6} = \frac{3y^2 \cdot y'}{y^6} = \frac{3 \cdot \left(-\frac{x}{y} \right)}{y^4} = -\frac{3x}{y^5}
 \end{aligned}$$

Производная высших порядков от функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

или

$$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}$$

6. Найти y''_{xx} , если

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \arctan t \end{cases}$$

$$x'_t = (\ln t)' = \frac{1}{t}$$

$$y'_t = (\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{1+t^2} : \frac{1}{t} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \left(\frac{t}{1+t^2} \right)' \cdot \frac{1}{\cancel{1/t}} = \frac{t' \cdot (1+t^2) - t \cdot (1+t^2)'}{(1+t^2)^2} \cdot t =$$

$$= \frac{1+t^2 - 2t^2}{(1+t^2)^2} \cdot t = \frac{(1-t^2) \cdot t}{(1+t^2)^2}$$

Ответ:

$$y''_{xx} = \frac{(1-t^2) \cdot t}{(1+t^2)^2}$$

7. Найти y''_{xx} в точке $t=1$, если

$$\begin{cases} x = t^2 + 3t + 1 \\ y = 2t^3 - 1 \end{cases}$$

$$x'_t = 2t + 3$$

$$y'_t = 6t^2$$

$$x''_t = 2$$

$$y''_t = 12t$$

$$= \frac{12t \cdot (2t + 3) - 6t^2 \cdot 2}{(2t + 3)^3} = \frac{12t \cdot (t + 3)}{(2t + 3)^3}$$

$$y''_{xx} \Big|_{t=1} = \frac{12 \cdot 4}{5^3} = \frac{48}{125}$$

Ответ: $y''_{xx} \Big|_{t=1} = \frac{48}{125}$

8. Найти y''_{xx} если
$$\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

Ответ: 2

Физический смысл второй производной

Среднее ускорение точки за время Δt :

$$a_{cp}(t_0; t) = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ускорением точки в момент времени t :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)$$

ИЛИ

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

- Ускорение прямолинейного движения точки в данный момент времени равно второй производной пути по времени.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t)$$

Пример 9. Найти скорость v и ускорение a свободно падающего тела, если зависимость расстояния от времени t дается формулой

$$(*) \quad s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0 \quad (s - (m), \quad t - (сек))$$

где $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$ — ускорение свободного падения, а

$$s_0 = s|_{t=0} \text{ — значение } s \text{ при } t=0$$

$$(**) \quad v = s'(t) = gt + v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = v|_{t=0}$$

$$a = v'(t) = s''(t) = g$$

Замечание. Обратно, если ускорение некоторого движения постоянно и равно g , то скорость выражается равенством (**), а расстояние- равенством (*) при условии, что

$$s|_{t=0} = s_0 \quad v|_{t=0} = v_0$$