

Лекция №5 «ПРЯМОЙ ИЗГИБ»

Изгиб — это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты. В большинстве случаев одновременно с изгибающими моментами возникают и поперечные силы; такой изгиб называют *поперечным*; если поперечные силы не возникают, изгиб называют *чистым*.

С геометрической точки зрения изгиб характеризуется -тем, что ось бруса, прямолинейная до деформации, при изгибе становится кривой линией (условно говорят— изогнутая ось бруса). Для кривого бруса изгиб связан с изменением кривизны его оси.

Деформация изгиба возникает при нагружении бруса силами, перпендикулярными к его продольной оси, и парами сил, действующими в плоскостях, проходящих через эту ось. В случае, если все нагрузки, а следовательно, и реакции связей, действуют в одной плоскости, изгиб называют **плоским**.

Ограничимся рассмотрением брусьев, поперечные сечения которых имеют по меньшей мере одну ось симметрии. Как известно, ось симметрии и перпендикулярная ей центральная ось являются **главными центральными осями** сечения.

Плоскость, проходящая через продольную ось бруса и одну из главных центральных осей его поперечного сечения, называется *главной плоскостью* бруса (иногда ее называют главной плоскостью инерции).

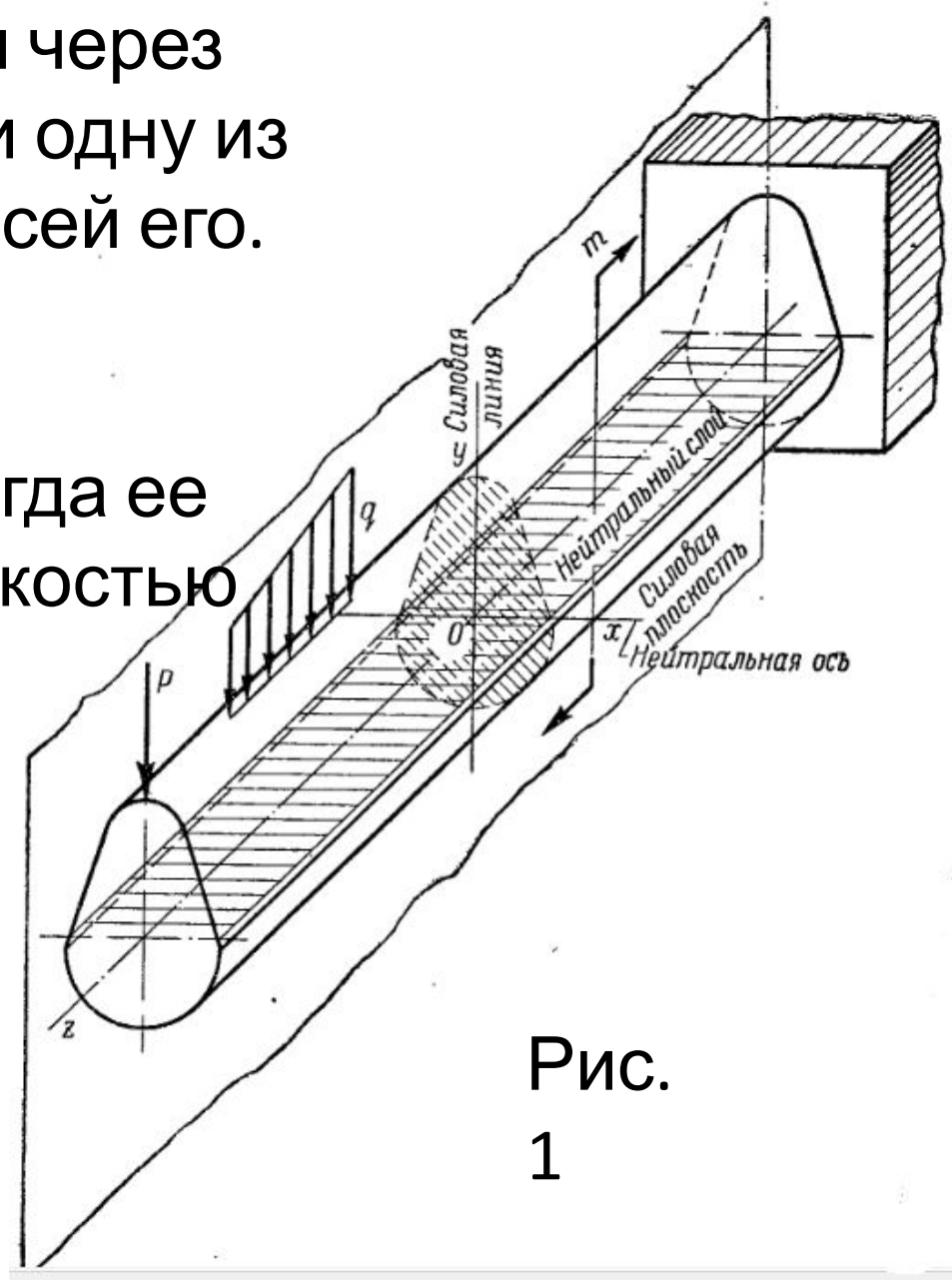


Рис.
1

В случае, если силовая плоскость, т. е. плоскость действия нагрузок, совпадает с одной из главных плоскостей (рис. 1), имеет место **прямой изгиб бруса**. Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения бруса называется **силовой линией**, из сказанного следует, что при прямом изгибе она совпадает с одной из главных центральных осей поперечного сечения.

*При **прямом изгибе** деформация происходит в силовой плоскости, т. е. в этой плоскости располагается изогнутая ось бруса.*

Применяя к брусу, изображенному на рис. 1, метод сечений и рассматривая условия равновесия отсеченной части, показанной отдельно на рис. 2, заключаем, что в общем случае прямого изгиба в поперечных сечениях бруса возникают два внутренних силовых фактора: *поперечная сила* Q_y и *изгибающий момент* M_x .

Действительно, внешние силы лежат в плоскости zOy и при этом перпендикулярны оси Oz , следовательно, их проекции на оси Ox и Oz также, как и моменты относительно осей Oy и Oz , равны нулю.

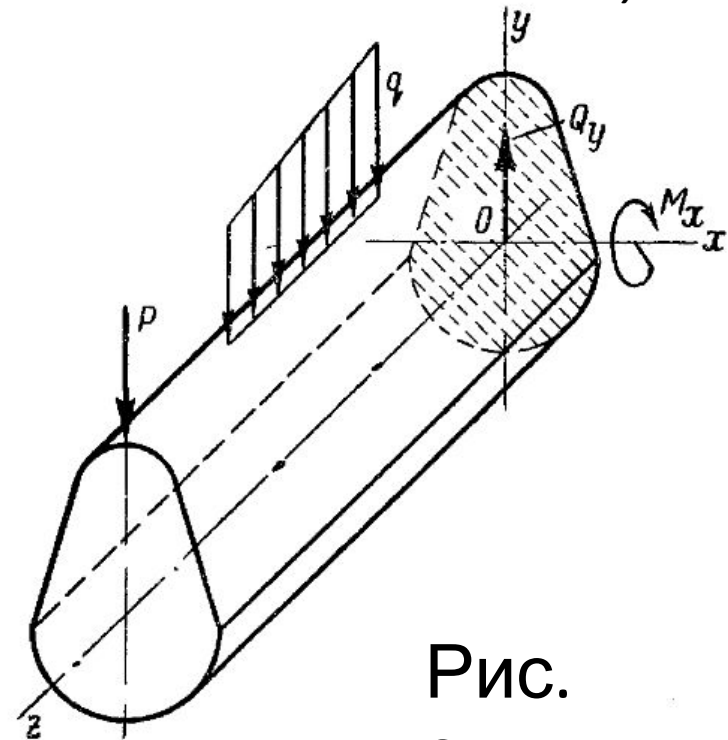


Рис.
2

Очевидно, при изгибе брус деформируется таким образом, что часть его волокон испытывает растяжение, а часть — сжатие. Волокна, расположенные в выпуклой части изогнутого бруса, растягиваются, а в вогнутой — сжимаются (рис. 3).

Границей между областями растяжения и сжатия является слой волокон, который лишь искривляется, не испытывая при этом ни растяжения, ни сжатия. Это так называемый *нейтральный слой*.

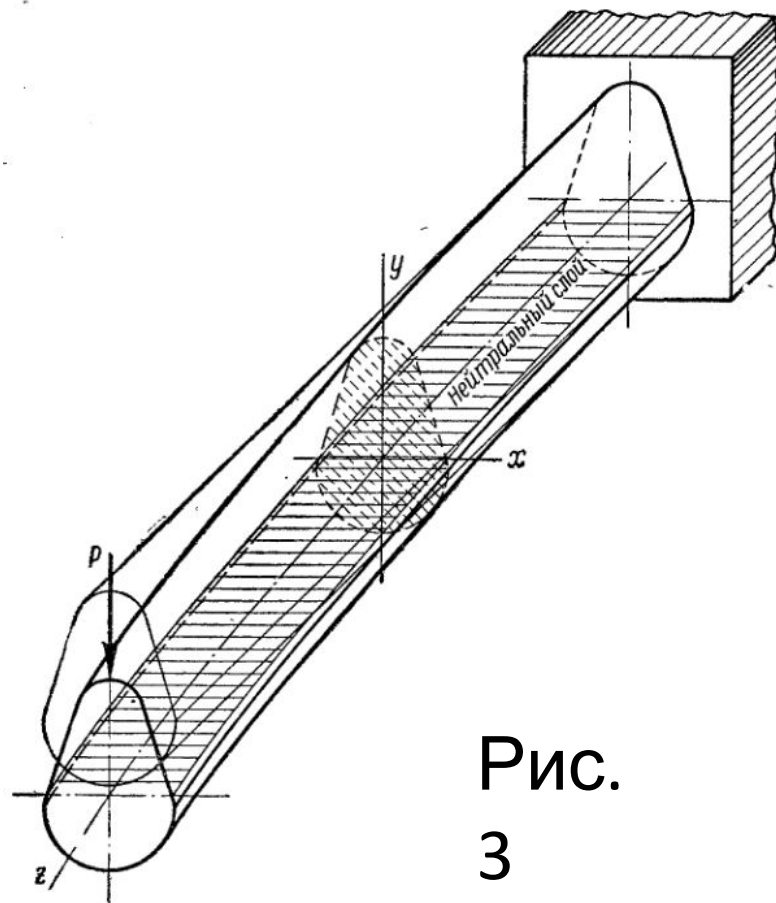


Рис.
3

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения бруса называется *нейтральной осью*, или *нулевой линией*.

Брусья, работающие на прямой изгиб, принято

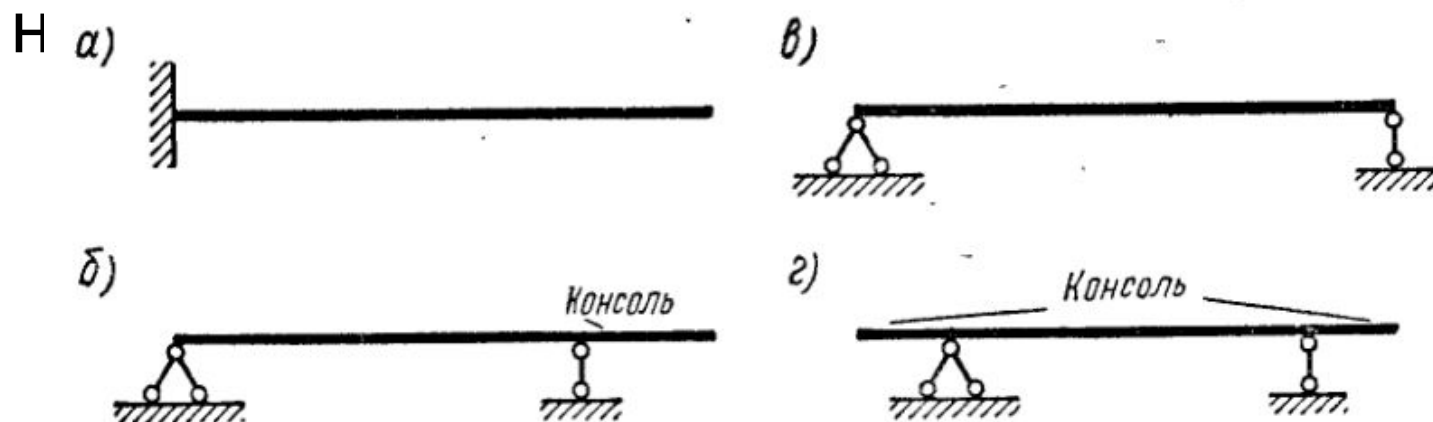


Рис.
4

Схемы основных типов статически определимых балок показаны на рис.4: а -простая консоль; б - двухопорная балка с одной консолью; в— двухопорная балка без консолей; г — двухопорная балка с двумя консолями.

ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ

Зависимости между внутренними силовыми факторами и напряжениями в поперечном сечении бруса

$$Q_y = \int_F \tau_{zy} dF$$

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF$$

Следовательно, в поперечных сечениях бруса в рассматриваемом случае изгиба возникают как касательные, так и нормальные напряжения.

Приведенные зависимости позволяют дать следующие определения поперечной силы и изгибающего момента:

Поперечной силой (Q_y) называется равнодействующая внутренних касательных сил, возникающих в поперечном сечении бруса.

Изгибающим моментом (M_x) называется результирующий момент внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении бруса, взятый относительно нейтральной оси этого сечения.

Приведенные зависимости между Q_y и M_x и напряжениями не могут быть использованы для вычисления поперечных сил и изгибающих моментов. Они определяются с помощью *метода сечений* через действующие на брус внешние силы.

Так же, как при изучении растяжения (сжатия) и кручения, для получения наиболее наглядного представления о характере изменения внутренних силовых факторов (Q_y и M_x) по длине бруса и для нахождения его опасных сечений будем строить соответствующие графики — **эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.**

На рис. 5 показаны бесконечно малый элемент, вырезанный из балки, и возможные направления поперечных сил в его торцовых (поперечных) сечениях. **Поперечные силы считаются положительными, если они стремятся повернуть элемент по часовой стрелке.**

Внешняя сила, стремящаяся повернуть отсеченную часть балки **по часовой стрелке** вокруг той точки оси, которая соответствует проведенному сечению, вызывает **положительную поперечную силу.**

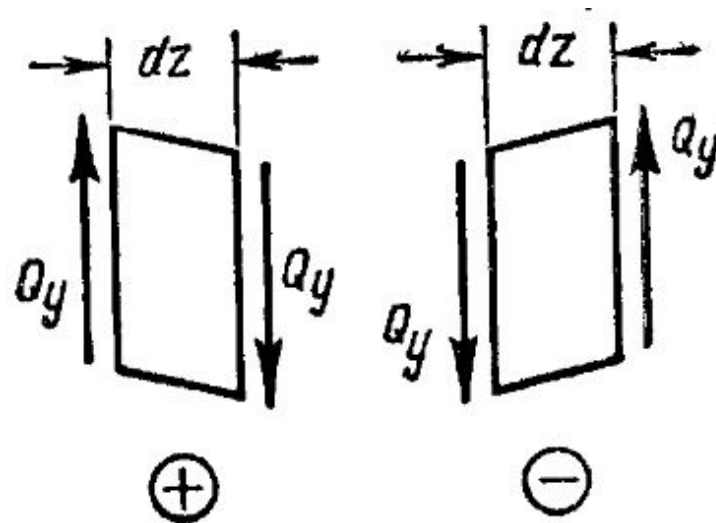


Рис.
5

Знак изгибающего момента связан с характером деформации бруса: изгибающий момент считается **положительным, если элемент бруса изгибается **выпуклостью вниз** (рис. 6), т. е. таким образом, что его **сжатые волокна находятся в верхней части**.**

Для определения знака изгибающего момента следует вообразить отсеченную часть балки заземленной в проведенном сечении (рис. 7а,б).

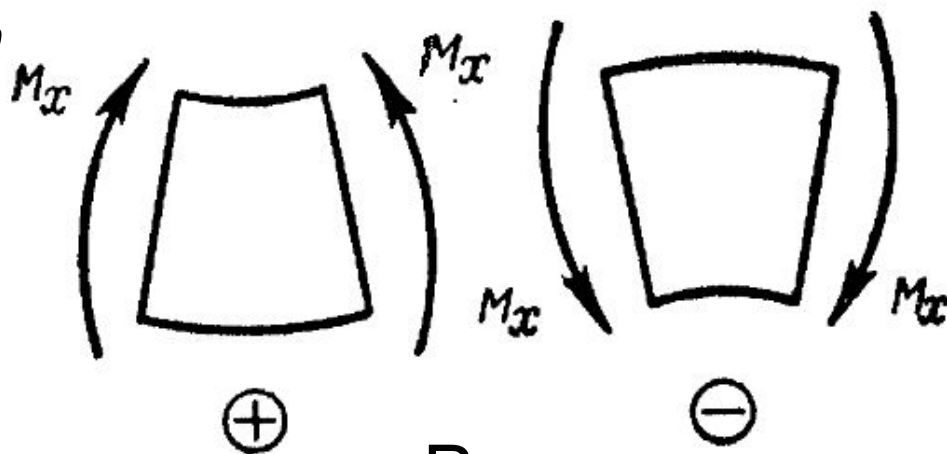


Рис.
6

Внешняя сила (момент), изгибающая эту часть *выпуклостью вниз*, т. е. таким образом, что сжатые волокна находятся сверху, дает *положительный изгибающий момент* (рис.7а).

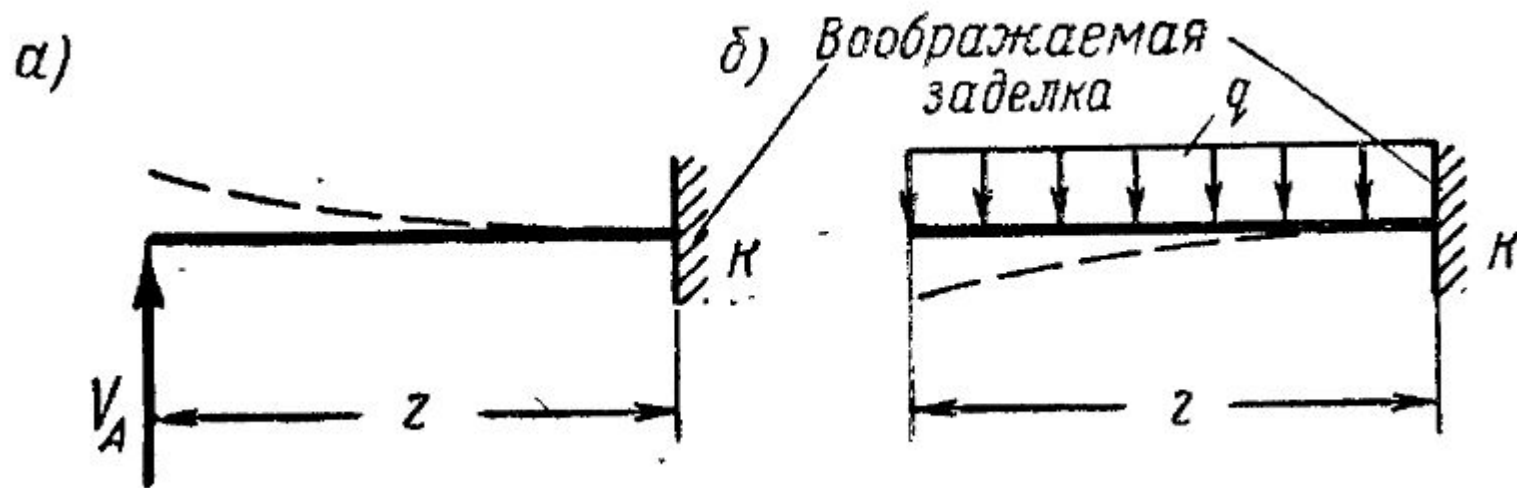


Рис.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов существенно упрощается при использовании дифференциальных зависимостей между интенсивностью распределенной нагрузки q , поперечной силой Q_y и изгибающим моментом M_x .

Для вывода этих зависимостей двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми равно dz , выделим из балки, изображенной на рис. 8 а, бесконечно малый элемент. Этот элемент в крупном масштабе показан отдельно на рис. 8 б

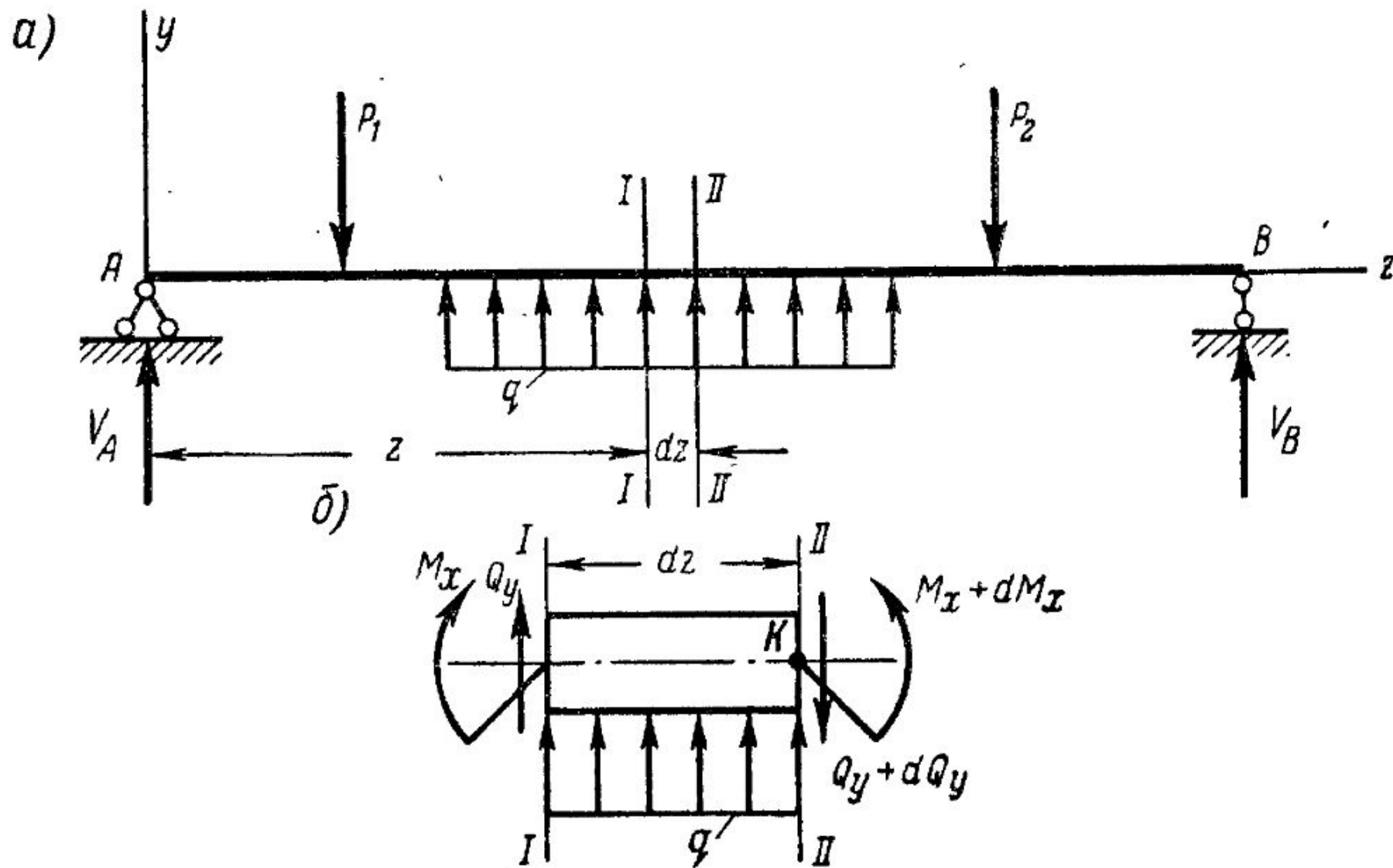


Рис.

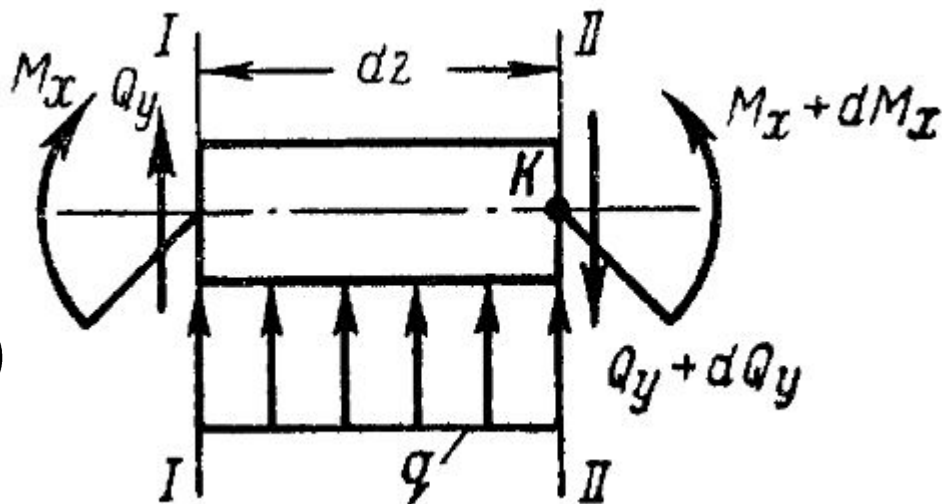
Действие левой и правой отброшенных частей балки на выделенный элемент заменяем поперечными силами и изгибающими моментами, возникающими в соответствующих сечениях. Так как выделенный элемент бесконечно мал и в его *пределах к балке не приложено внешних сосредоточенных сил и моментов*, значения поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях I-I и II-II могут различаться лишь на *бесконечно малые величины*. Пусть в сечении I-I поперечная сила и изгибающий момент равны соответственно Q_y и M_x , а в сечении II-II — $Q_y + dQ_y$ и $M_x + dM_x$. Составим уравнения равновесия для выделенного элемента.

Проектируя все силы на вертикальную ось, получаем

$$Q_y + qdz - (Q_y + dQ_y) = 0$$

откуда $\frac{dQ_y}{dz} = q$ (1)
а

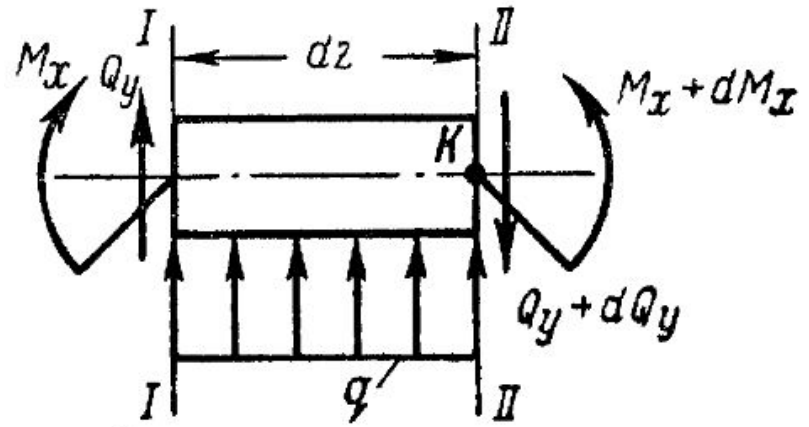
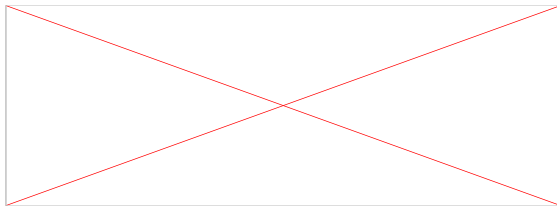
Это и есть первая из дифференциальных зависимостей, которая читается следующим образом: *производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.*



Составляя сумму моментов относительно точки **K**, получаем

$$M_x + Q_y dz + (q dz) \frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$

Пренебрегая величиной $\frac{q(dz)^2}{2}$ как бесконечно малой высшего порядка, имеем



Таким образом, получена вторая дифференциальная зависимость: *производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна поперечной силе.*

Из зависимостей (1) и (2) следует, что *интенсивность распределенной нагрузки равна второй производной от изгибающего момента по абсциссе сечения балки:*

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q$$

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Поперечные силы и изгибающие моменты являются функциями абсцисс поперечных сечений балки. Применяя метод сечений, мы сначала составляли аналитические выражения этих функций, а затем по полученным уравнениям строили соответствующие графики, т. е. эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Ниже приводится ряд правил, используемых при построении эпюр по характерным точкам.

Некоторые из них являются следствиями из дифференциальных зависимостей между q , Q_y и M_x , другие вытекают непосредственно из метода сечений.

1. Если на некотором участке балки отсутствует распределенная нагрузка, то эпюра Q — прямая, параллельная оси абсцисс, т.е. $Q = \text{const}$.

Действительно, $q = \frac{dQ}{dz}$, а в рассматриваемом случае производная $q=0$, следовательно, функция Q сохраняет постоянное значение.

Эпюра моментов на этом участке — наклонная прямая, что следует из зависимости $Q = \frac{dM}{dz}$. В данном случае производная (Q) постоянна, следовательно, сама функция (M) линейна.

2. Если на некотором участке балки имеется равномерно распределенная нагрузка, то эпюра Q — наклонная прямая, а эпюра M — парабола (кривая второго порядка). Рассуждаем аналогично случаю 1: если производная (q) постоянна, функция Q линейна. Используя зависимость между Q и M , заключаем, что если производная (Q) изменяется по линейному закону, то функция, дающая закон изменения M , квадратичная, т. е. имеет порядок на единицу выше.

3. Если на некотором участке:

- а) $Q > 0$, то изгибающий момент возрастает (слева направо);
- б) $Q < 0$, то изгибающий момент убывает;
- в) $Q = 0$, то изгибающий момент постоянен (чистый изгиб).

4. Если поперечная, сила, изменяясь по линейному закону, проходит через нулевое значение, то в соответствующем сечении изгибающий момент имеет **экстремальное** - (максимальное или минимальное) значение (равенство нулю первой производной является признаком экстремума функции). Касательная к эпюре M параллельна оси балки.

5. Под сосредоточенной силой на эпюре Q получается скачкообразное изменение ординат — скачок на величину приложенной внешней силы, а на эпюре M — резкое изменение угла наклона (излом) смежных участков эпюры.

6. В точках, соответствующих началу и концу участка, в пределах которого к балке приложена распределенная нагрузка, параболическая и прямолинейная части эпюры M сопрягаются плавно, конечно если на границах указанного участка не приложено сосредоточенных сил.

7. Если распределенная нагрузка направлена вниз, то парабола, представляющая собой эпюру M , обращена выпуклостью вверх, т. е. «навстречу» нагрузке.

8. В сечении на свободном или шарнирно опертом конце балки изгибающий момент равен нулю, если там не приложена сосредоточенная пара сил, а если она приложена — равен моменту этой пары. Поперечная сила в этом сечении равна внешней сосредоточенной силе (активной или реактивной).

9. Там, где к балке приложена сосредоточенная пара сил, на эпюре M получается скачкообразное изменение ординат — скачок на величину момента этой пары. На эпюре Q это не отражается.

10. В сечении, совпадающем с заделкой, Q и M численно равны соответственно опорной реакции и реактивному моменту.

НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

При *поперечном* прямом изгибе в поперечных сечениях балки возникают **нормальные и касательные напряжения**. В частном случае, когда поперечная сила равна нулю, имеет место *чистый* изгиб и в поперечных сечениях балки касательные напряжения отсутствуют. Этот случай рассмотрим в первую очередь. Для выяснения закона распределения **нормальных напряжений** по поперечному сечению балки и вывода формулы, определяющей величину напряжения в произвольной точке поперечного сечения, будем исходить из следующих **допущений**.

1. При чистом прямом изгибе справедлива гипотеза Бернулли, т. е. *поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и после деформации.*
2. *Волокна бруса при его деформации не надавливают друг на друга.*

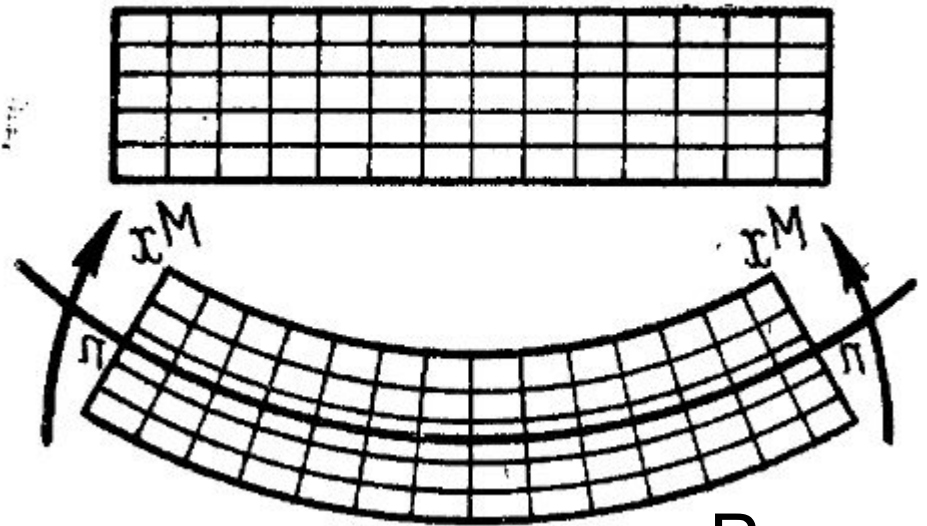
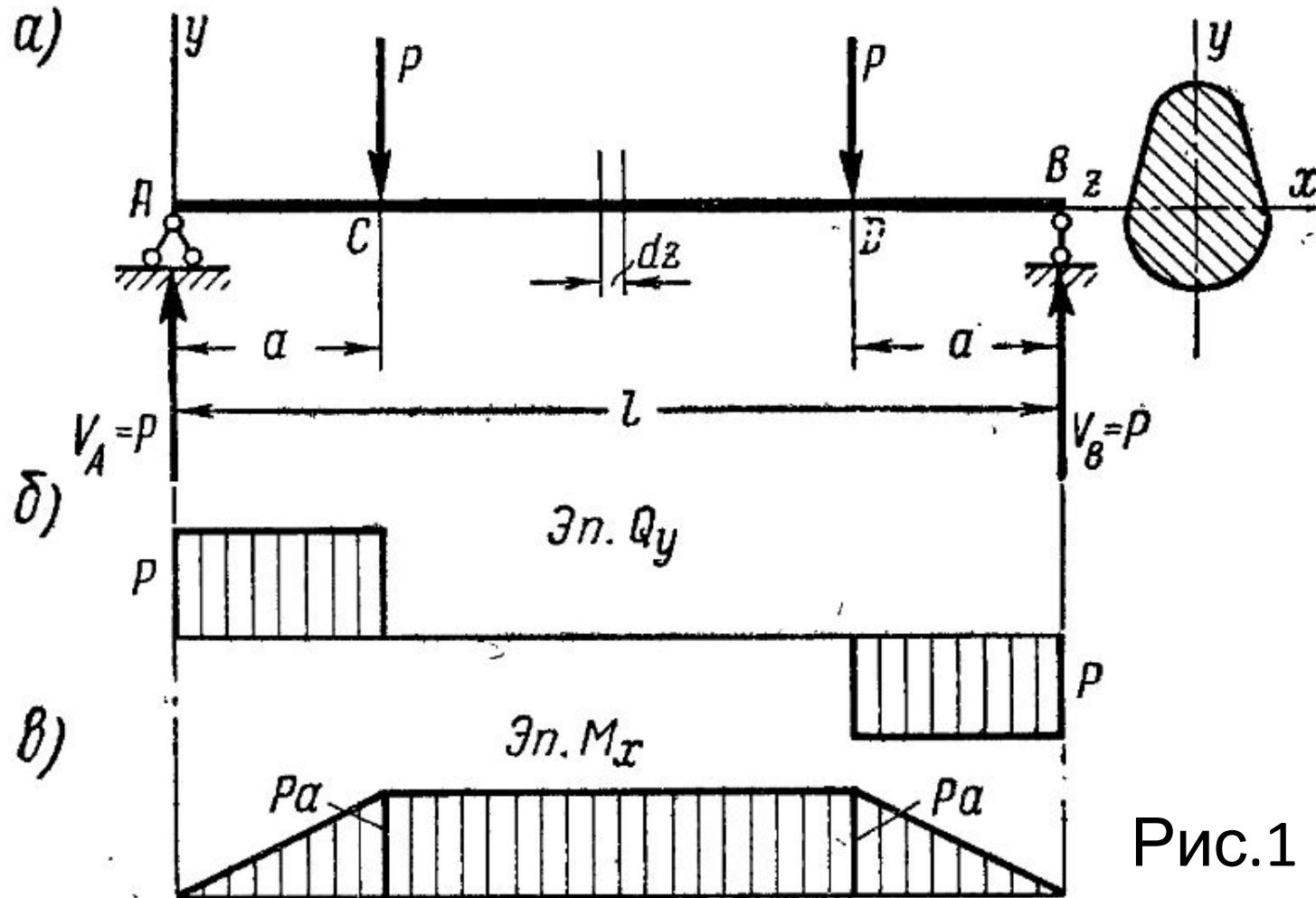


Рис.

Рассматривая деформацию резиновой модели бруса с нанесенной на его поверхности сеткой продольных и поперечных рисок, обнаруживаем, что поперечные, риски, оставаясь прямолинейными, поворачиваются на некоторые углы и их параллельность нарушается (рис. 9)

Эта картина деформации, наблюдаемая на поверхности бруса, в известной степени подтверждает справедливость гипотезы Бернулли. Кроме того, формула, получаемая на основе указанных допущений, совпадает с выведенной при помощи точных методов теории упругости без использования этих допущений.

Для вывода формулы, определяющей величину нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении балки, рассмотрим балку, изображ



Определив опорные реакции (в силу симметрии $V_A = V_B = P$) и построив эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 10), заключаем, что средняя часть балки (участок CD) находится в условиях *чистого изгиба*: поперечная сила во всех сечениях этого участка равна нулю.

Двумя бесконечно близкими поперечными сечениями выделим из этого участка элемент длиной dz (рис. 10). Отдельно (в крупном масштабе) этот элемент в деформированном состоянии изображен на рис. 11.

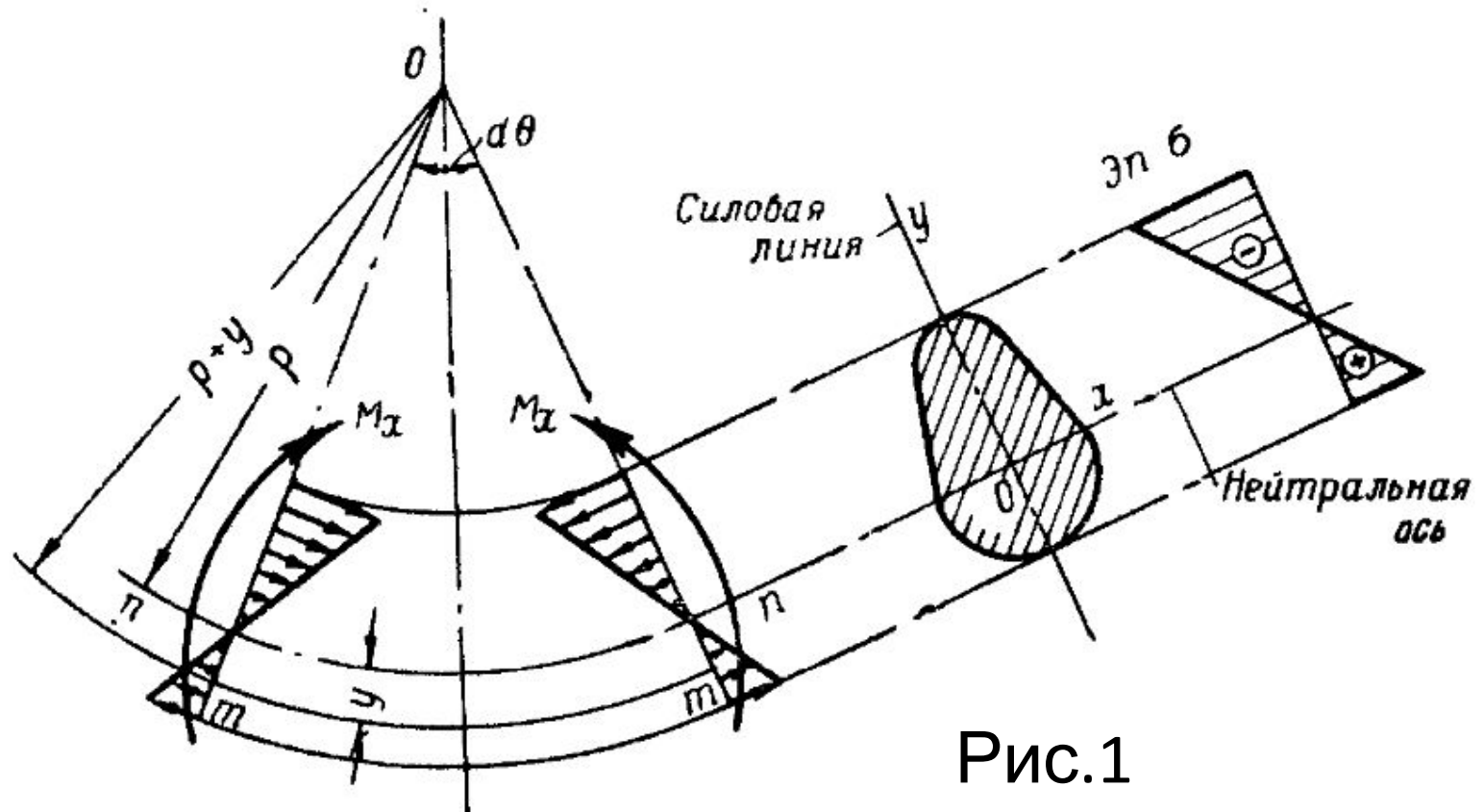


Рис.1

1

Длина волокон, лежащих в *нейтральном слое*, при изгибе не изменяется. Обозначим след нейтрального слоя на плоскости чертежа буквами *n-n*, а его радиус кривизны - r (см. рис. 11).

Определим линейную деформацию произвольного волокна, отстоящего на расстоянии y от нейтрального слоя. Длина этого волокна после деформации (длина дуги $m-m$) равна $(\rho + y)d\Theta$.

Учитывая, что до деформации все волокна имели одинаковую длину dz , получаем, что удлинение рассматриваемого волокна

$$\Delta(dz) = (\rho + y)d\Theta - dz$$

следовательно, его деформация (ε), равная отношению удлинения к первоначальной длине,

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{(\rho + y)d\Theta - dz}{dz}$$

Очевидно, $dz = \rho d\Theta$, так как длина волокна, лежащего в нейтральном слое, при деформации не изменилась. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{(\rho + y)d\Theta - \rho d\Theta}{\rho d\Theta}$$

откуда
а $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$

Для перехода от деформаций к напряжениям применим закон Гука (как везде, полагаем, что возникающие напряжения не превышают предела пропорциональности):

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3)$$

Подставляя в (3) $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$, получаем

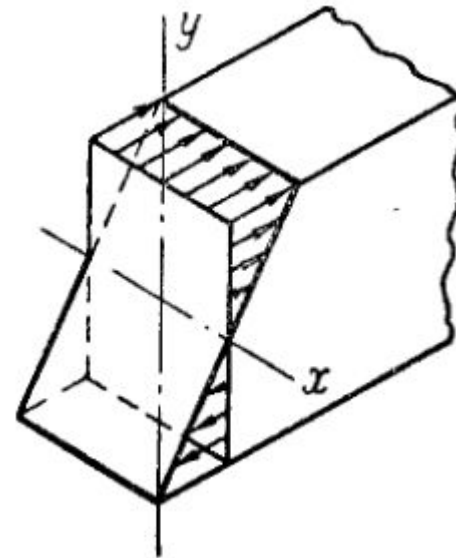
$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (4)$$

Возможность применения закона Гука в форме зависимости (3) обусловлена принятым допущением о не надавливании волокон балки друг на друга, т. е. предположением, что каждое из них находится в состоянии одноосного растяжения или сжатия. В противном случае следовало бы применить обобщенный закон Гука.

Выражение (4) показывает, что нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения прямо пропорционально ее расстоянию y от нейтральной оси, т. е. по высоте сечения нормальные напряжения изменяются по линейному закону. По ширине сечения они распределены равномерно (не зависят от координаты x).

Нормальные напряжения в торцовых поперечных сечениях выделенного элемента показаны на рис. 11. Там же показано его поперечное сечение, совмещенное с плоскостью чертежа, и дана эпюра нормальных напряжений. Растягивающие напряжения считаем положительными (знак плюс на эпюре), а сжимающие — отрицательными.

Условность этой и ей подобных эпюр, заключается в том, что ее ординаты, выражающие величины нормальных напряжений в соответствующих точках поперечного сечения, лежат в плоскости сечения, в то время как сами напряжения перпендикулярны этой плоскости. Большой наглядностью обладают пространственные эпюры, для бруса прямоугол пространственная эпюра по



И такая
12.

Рис.1

Нейтральная ось (она принята за координатную ось Ox) делит поперечное сечение бруса на две части (рис.11), в одной из которых (в нашем случае в нижней), возникают растягивающие, а в другой — сжимающие напряжения. В точках, лежащих на самой нейтральной оси, нормальные напряжения равны нулю. Исходя из этого нейтральной оси можно дать следующее определение:

нейтральной осью, или нулевой линией, называется геометрическое место точек поперечного сечения бруса, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Положение нейтральной оси определим из условия, что *при изгибе продольная сила в поперечном сечении равна нулю*. Зависимость между продольной силой и нормальными напряжениями записывается так:

$$N = \int_F \sigma dF$$

Подставляя вместо σ его значение по выражению (4) и приравнявая продольную силу нулю, получаем

$$N = \int_F \frac{E}{\rho} y dF = 0$$

Отношение $\frac{E}{\rho}$ величина постоянная и может быть вынесено за знак интеграла:

$$N = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$$

Очевидно, $\frac{E}{\rho} \neq 0$ (рассматриваем деформированный брус, т. е. радиус кривизны не равен бесконечности), следовательно,

$$\int_F y dF = 0$$

Но, как известно, этот интеграл представляет собой статический момент сечения относительно оси Ox (нейтральной оси), и он равен нулю, в случае, если эта ось *центральная*.

Силовая линия (ось O_y) совпадает с осью симметрии сечения, т. е. является одной из главных центральных осей. Нейтральная ось ей перпендикулярна и проходит, как мы установили, через центр тяжести сечения, т.е. это вторая *главная центральная ось*.

Для определения радиуса кривизны нейтрального слоя используем зависимость между изгибающим моментом и нормальными напряжениями. Элементарная нормальная сила равна σdF , ее момент относительно нейтральной оси $dM_x = (\sigma dF)y$ суммируя эти элементарные моменты по всей площади сечения, имеем

$$M_x = \int_F \sigma y dF$$

Подставляя сюда значение σ по выражению (4),
получаем

$$M_x = \int_F \sigma y dF = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF$$

Учитывая, что $\int_F y^2 dF = I_x$ получаем $M_x = \frac{EI_x}{\rho}$

или
и $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (5)$

Кривизна нейтрального слоя (изогнутой оси бруса) прямо пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна произведению модуля продольной упругости материала бруса на момент инерции его поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Произведение EI_x условно называют жесткостью сечения бруса при изгибе. Модуль E характеризует жесткость материала, а момент инерции I_x является геометрической характеристикой жесткости бруса при изгибе.

Подставляя найденное значение кривизны (5) в выражение (4) получаем

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = E \frac{M_x}{EI_x} y = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \quad (6)$$

Формула (6) дает величину нормального напряжения в произвольной точке поперечного сечения. Значения изгибающего момента M_x и расстояния рассматриваемой точки от нейтральной оси (координаты y) следует подставлять по абсолютной величине.

Будет ли напряжение в данной точке растягивающим или сжимающим, легко установить по характеру деформации балки, или, что то же самое, по эпюре изгибающих моментов, ординаты которой откладывают в сторону сжатых волокон балки.

Формула (6) выведена для случая **чистого прямого изгиба бруса**. При *поперечном* прямом изгибе предпосылки, положенные в основу ее вывода, нарушаются: поперечные сечения бруса за счет возникновения в них касательных напряжений искривляются (гипотеза Бернулли несправедлива); кроме того в этом случае имеет место, хотя и весьма незначительное, взаимное надавливание волокон.

Тем не менее, как показывают экспериментальные и точные теоретические исследования, эта формула дает значения нормальных напряжений и для случая поперечного изгиба с точностью, вполне достаточной для практических расчетов.

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Балки рассчитывают на прочность по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. При поперечном изгибе балок наряду с нормальными, как известно, возникают и касательные напряжения, но они в подавляющем большинстве случаев невелики и при расчетах на прочность не учитываются.

А. Расчет балок из пластичных материалов

Прочность балки из *пластичного* материала обеспечена, если **наибольшие по абсолютной величине **нормальные напряжения**, возникающие в опасном поперечном сечении, **не превышают допустимых**. Для балки, поперечные размеры, которой по всей длине постоянны, опаснее сечение то, в котором возникает наибольший по модулю изгибающий **момент**. Наибольшие нормальные напряжения возникают в **точках** опасного поперечного сечения, **максимально удаленных от нейтральной оси**. Будем называть эти точки **опасными**.**

Величину максимального напряжения найдем по формуле (6), подставляя в нее вместо текущей координаты y значение y_{max} — расстояния от опасной точки до нейтральной оси. Тогда условие прочности запишется так:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{I_x} y_{max} \leq [\sigma] \quad (7)$$

Здесь $[\sigma]$ — допускаемое напряжение, принимаемое при статическом нагружении таким же, как и в случае растяжения (сжатия) бруса из того же материала.

В случае, если поперечное сечение балки симметрично относительно нейтральной оси, оказывается возможным привести формулу (7) к более удобному виду. Для указанных сечений $y_{max} = \frac{h}{2}$, где h — высота сечения (его габаритный размер в направлении, перпендикулярном нейтральной оси), следовательно,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{I_x} \frac{h}{2} = \frac{M_x^{\max}}{\frac{I_x}{\frac{h}{2}}}$$

Введем обозначение $W_x = \frac{I_x}{\frac{h}{2}}$

получим окончательно условие прочности в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq [\sigma] \quad (8)$$

Таким образом, мы ввели новую геометрическую характеристику поперечного сечения (W_x) представляющую собой отношение момента инерции относительно данной оси к половине высоты сечения. Эта геометрическая характеристика называется **осевым моментом сопротивления**, или **моментом сопротивления при изгибе**

Ее часто называют просто **моментом сопротивления**, в отличие от подобной геометрической характеристики, встречающейся при рассмотрении кручения бруса круглого поперечного сечения и называемой **полярным моментом сопротивления**. Очевидно, момент сопротивления имеет размерность длины в кубе (ж^3 , см^3 , мм^3).

Из формулы (8) следует, что *момент сопротивления — это геометрическая характеристика прочности бруса, работающего на прямой изгиб.*

Действительно, чем больше момент сопротивления, тем меньше напряжения, возникающие в поперечном сечении балки при данной нагрузке (изгибающем моменте), и тем большую нагрузку может безопасно выдержать балка при данной величине допускаемого напряжения (при данном материале).

Проектировочный

расчет

В случае проектного расчета определяется требуемая величина момента сопротивления:

$$W_x \geq \frac{M_x^{\max}}{[\sigma]}$$

Определение допускаемой нагрузки

Если цель расчета состоит в определении допускаемой нагрузки, то формула (8) преобразуется к виду

$$M_x^{\max} \leq W_x [\sigma]$$

Связь между допускаемыми значениями максимального изгибающего момента и действующей на балку нагрузки устанавливается по эпюре M_x .

Моменты сопротивления круга, кольца и прямоугольника найдем, воспользовавшись формулами для главных центральных моментов инерции этих сечений

Круг $W_x = \frac{I_x}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}$

или $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$

Кольцо $W_x = \frac{I_x}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}(1-c^4)}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3(1-c^4)}{32}$

или $W_x = \frac{\pi d^3(1-c^4)}{32} \approx 0,1d^3(1-c^4)$

Прямоугольни

к

$$W_x = \frac{I_x}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{h^3 b}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{h^2 b}{6}$$

Во избежание ошибок еще раз подчеркиваем, что в последней формуле h — размер стороны прямоугольника, перпендикулярной оси, относительно которой вычисляется момент сопротивления.

При применении для **балок из пластичных материалов** сечений, **симметричных относительно нейтральной оси**, обеспечивается **равенство** (по абсолютной величине) **наибольших растягивающих и сжимающих напряжений** (рис. 13). Для указанных материалов это, конечно, целесообразно, так как допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для

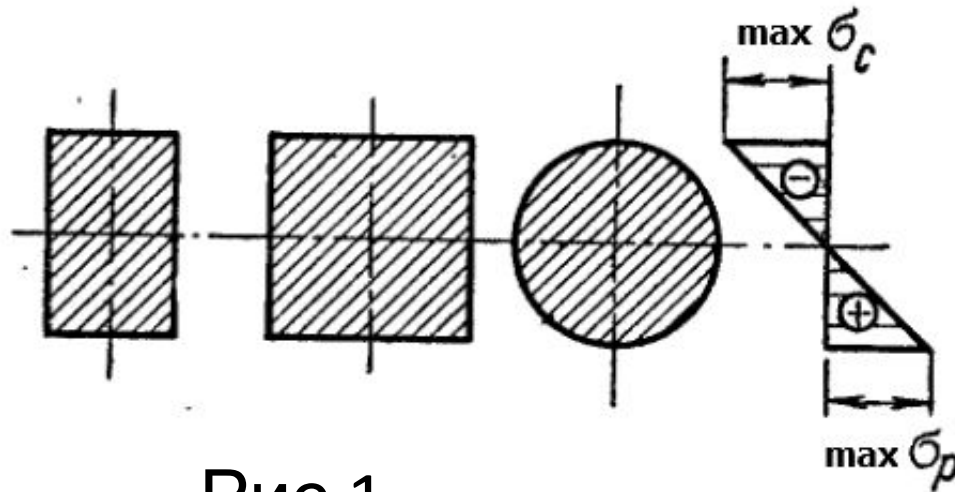
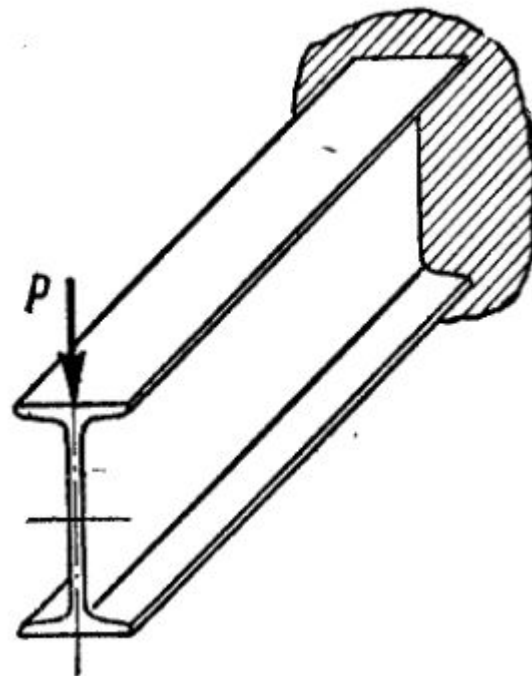


Рис.1

Нетрудно понять, что не все симметричные сечения одинаково рациональны:

Действительно, распределение нормальных напряжений таково, что та часть материала, которая расположена вблизи нейтральной оси, почти не используется. Это указывает, в частности, на **нерациональность круглого сечения** — при его применении большая часть материала бруса оказывается в мало-нагруженной области. **Немногом выгоднее квадратное сечение.** Наилучшее решение вопроса о **рациональном использовании материала** дает применение **двутаврового сечения.**

В двутавровой балке **основная часть материала сосредоточена в полках**, т. е. в зоне наилучшего его использования (в зоне наибольших напряжений). Роль стенки балки, воспринимающей сравнительно небольшую часть изгибающего момента, состоит главным образом в обеспечении монолитной работы сечения как единого целого.



Поскольку **момент сопротивления** является **геометрической характеристикой прочности** изгибаемого бруса, очевидно, следует стремиться к тому, чтобы при данной затрате материала он был **максимален**. При заданной длине балки затрата материала (масса балки) прямо пропорциональна площади поперечного сечения. Следовательно, **чем больше W_x и меньше F , тем рациональнее форма сечения балки**. Для количественной оценки рациональности сечения удобна безразмерная характеристика

$$w_x = \frac{W_x}{\sqrt{F^3}}$$

которую называют **удельным осевым моментом сопротивления**.

Например, для круга $w_x=0,141$; для кольца (при $s=0,7$) $w_x=0,294$; для двутавра № 10 (по ГОСТ 8239—56) $w_x=0,913$; для № 20 $w_x=1,35$.

Необходимо иметь в виду, что при изменении положения сечения по отношению к действующей нагрузке прочность балки существенно изменяется, хотя площадь сечения и остается неизменной.

Например, для двутавра № 20а в случае а допустимая нагрузка больше, чем в случае б в 7,3 раза (рис. 14).

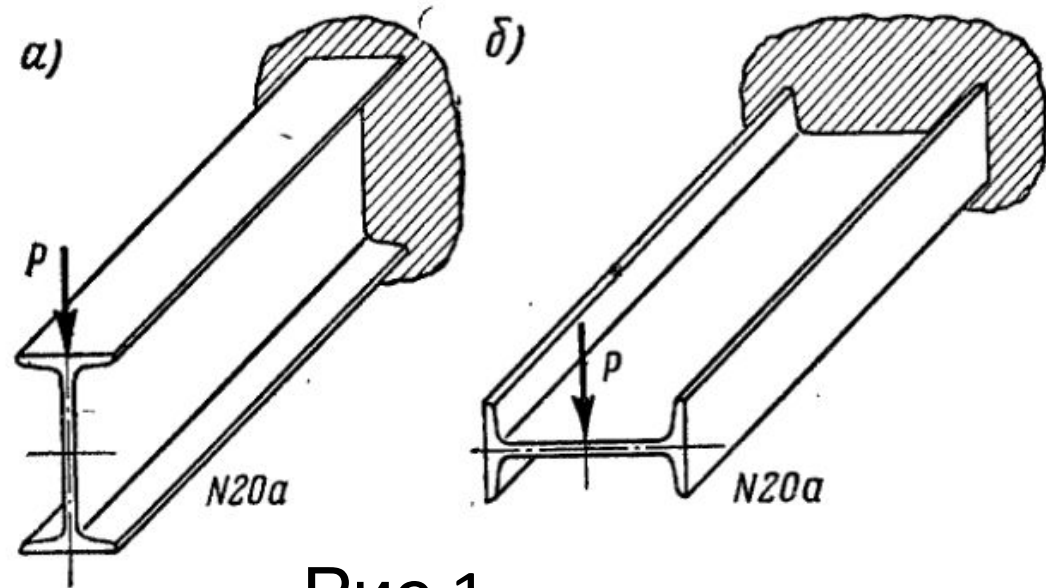


Рис.1

Расчет балок из хрупких материалов

Хрупкие материалы находят применение для изготовления некоторых работающих на изгиб элементов машиностроительных конструкций. В частности, из серого чугуна отливают различного рода рамы, станины, подшипниковые подвески и т. д.

Как известно, серый чугун работает на сжатие значительно лучше, чем на растяжение, отношение соответствующих допускаемых напряжений

$$\frac{[\sigma_{uc}]}{[\sigma_{ut}]} = 3 \div 4,5$$

Очевидно, применение сечений, симметричных относительно нейтральной оси, в рассматриваемом случае нерационально — материал в сжатой зоне бруса будет значительно недогружен, что приведет к его излишней затрате, а значит, к увеличению массы конструкции.

Для балок из хрупких материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, целесообразно применять сечения, несимметричные относительно нейтральной оси, например тавровое, несимметричное двутавровое, П-образное (рис.15). При этом необходимо располагать сечение таким образом, чтобы большая часть балки находилась в растянутой зоне (рис.15).

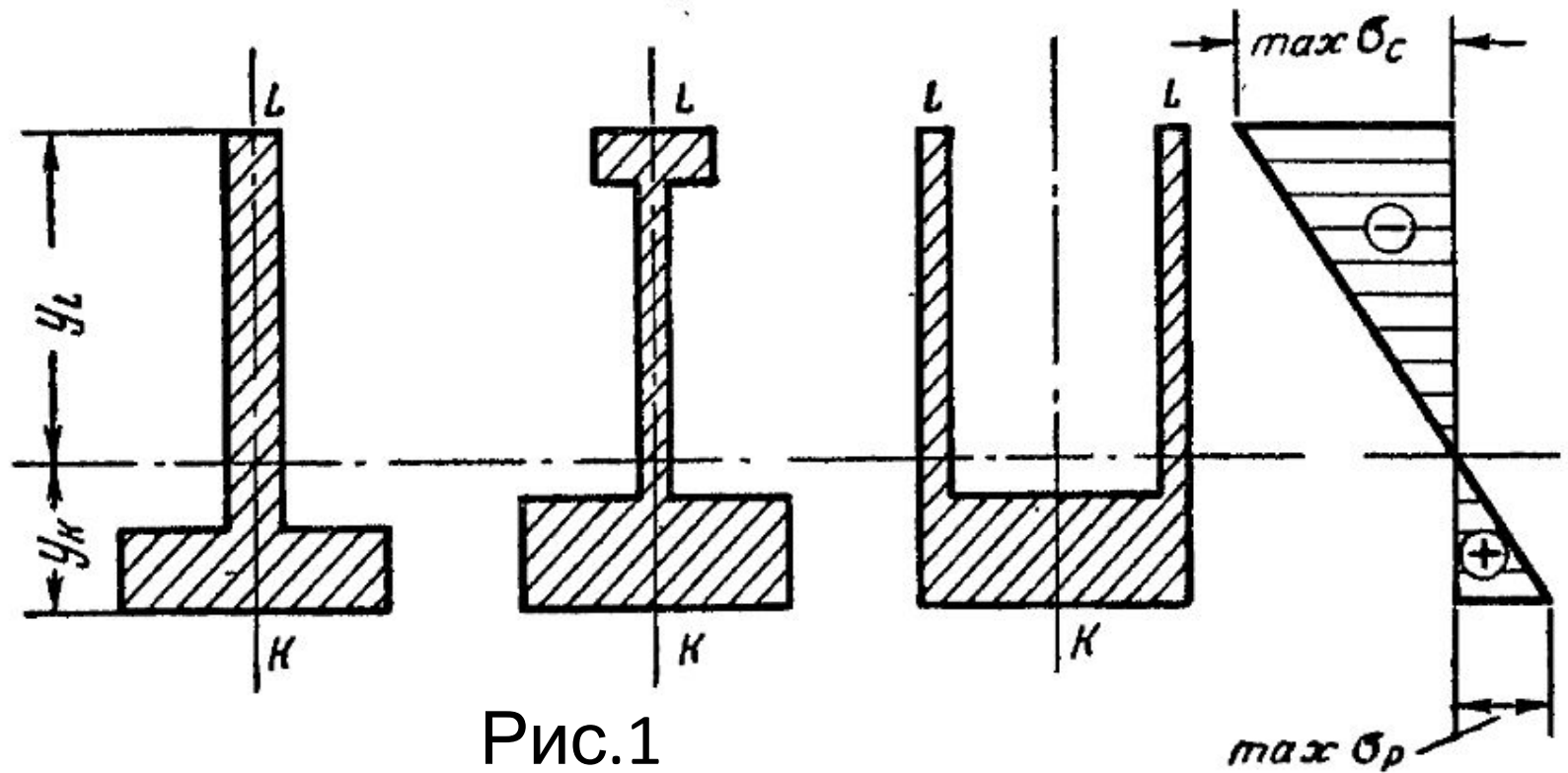


Рис.1

Рациональное и ⁵нерациональное расположения сечения чугуновой тавровой балки показаны на рис.16. При указанных на чертеже расстояниях от нейтральной оси до крайних точек сечения допускаемая нагрузка в случае **а** в 2,22 раза больше, чем в случае **б**.

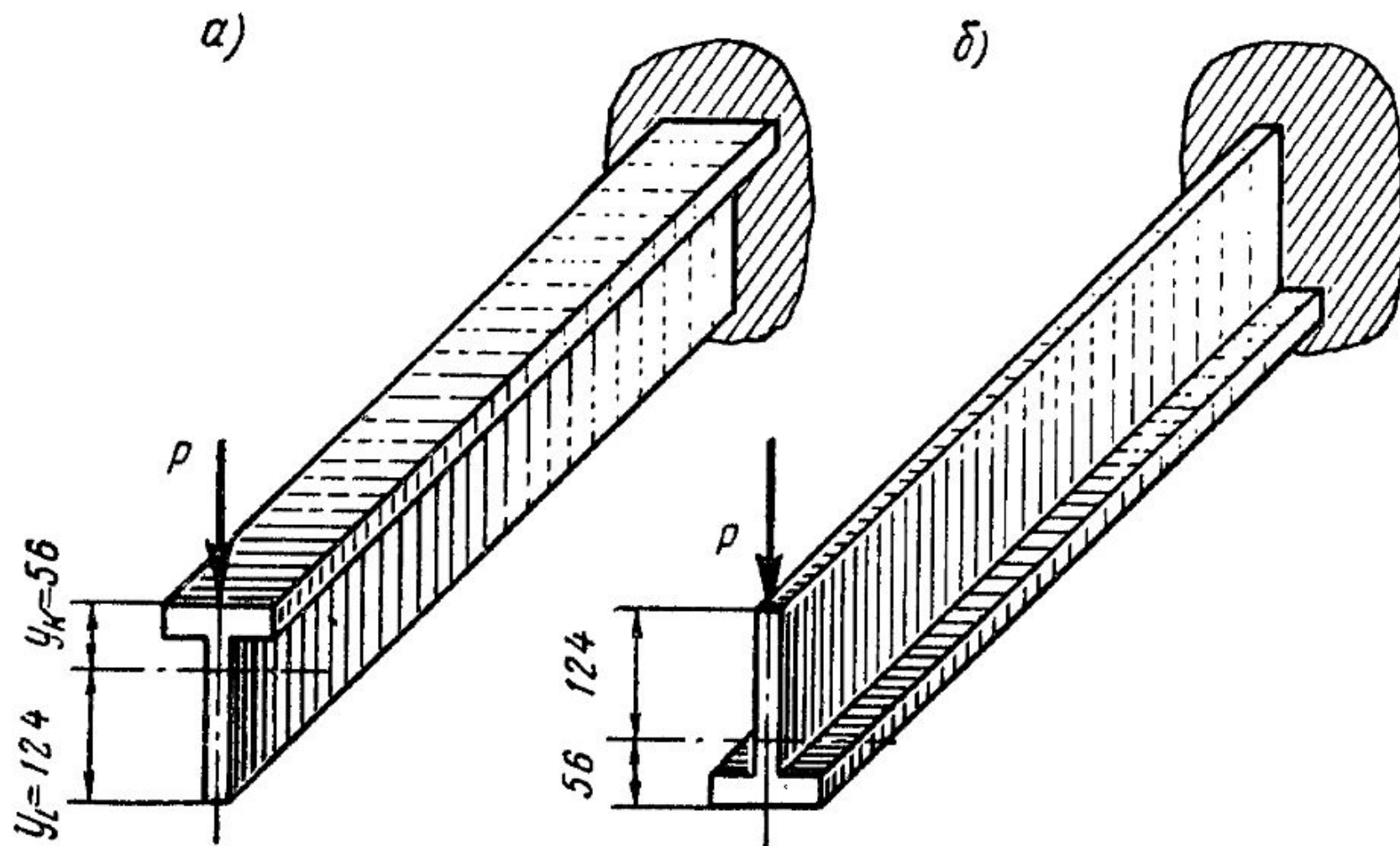


Рис.1
6

Очевидно, следует стремиться к тому, чтобы максимальные растягивающие и максимальные сжимающие напряжения в опасном поперечном сечении балки были одновременно равны соответствующим допускаемым напряжениям, т.

е.
$$\sigma_{\max}^p = [\sigma_p] \qquad \sigma_{\max}^c = [\sigma_c]$$

При этом материал балки будет использован наиболее рационально. Но

$$\sigma_{\max}^p = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_k$$

$$\sigma_{\max}^c = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_L$$

где y_k и y_L — расстояния от нейтральной оси соответственно до наиболее удаленных точек растянутой и сжатой зон сечения (см. рис. 15,16)

Следовательно, для обеспечения указанного условия наиболее рационального использования материала сечение должно иметь такую конфигурацию, при которой

$$\frac{y_k}{y_L} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \quad (9)$$

Соотношение (9) выполняется далеко не всегда, поэтому условие прочности чугунной балки выражается двумя неравенствами

$$\sigma_{\max}^p = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_k \leq [\sigma_p] \quad \sigma_{\max}^c = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_L \leq [\sigma_c]$$

Если $\frac{y_k}{y_L} > \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$, опасными являются точки
растяну той зоны, максимально удаленные от
нейтральной оси, и для расчета на прочность
достаточно использовать только формулу

$$\sigma_{\max}^p = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_k \leq [\sigma_p]$$

Аналогично, при $\frac{y_k}{y_L} < \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$ достаточно
выполнить

расчет по формуле $\sigma_{\max}^c = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_L \leq [\sigma_c]$

Все сказанное о расчете чугунной балки относилось к случаю, когда эпюра изгибающих моментов на всем ее протяжении однозначна. В случае, если эпюра M_x имеет участки разных знаков (например, для схемы нагружения, представленной на рис. 17), следует расположить сечение изгибающим образом, чтобы там, где изгибающий момент по абсолютной величине максимален (сечение I-I на рис.17), большая часть материала (например, полка таврового сечения) находилась в растянутой зоне.

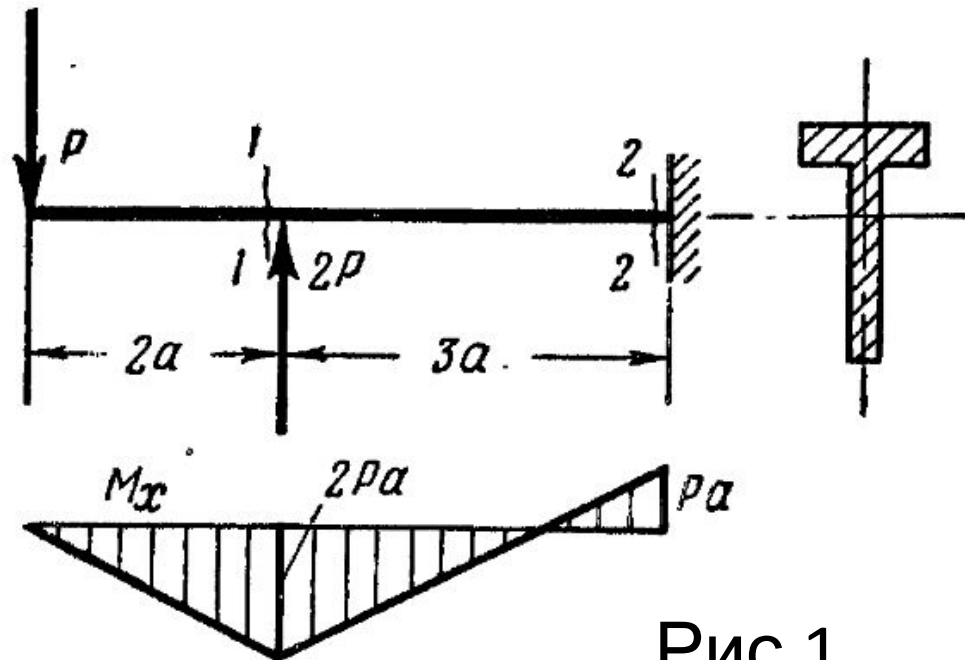
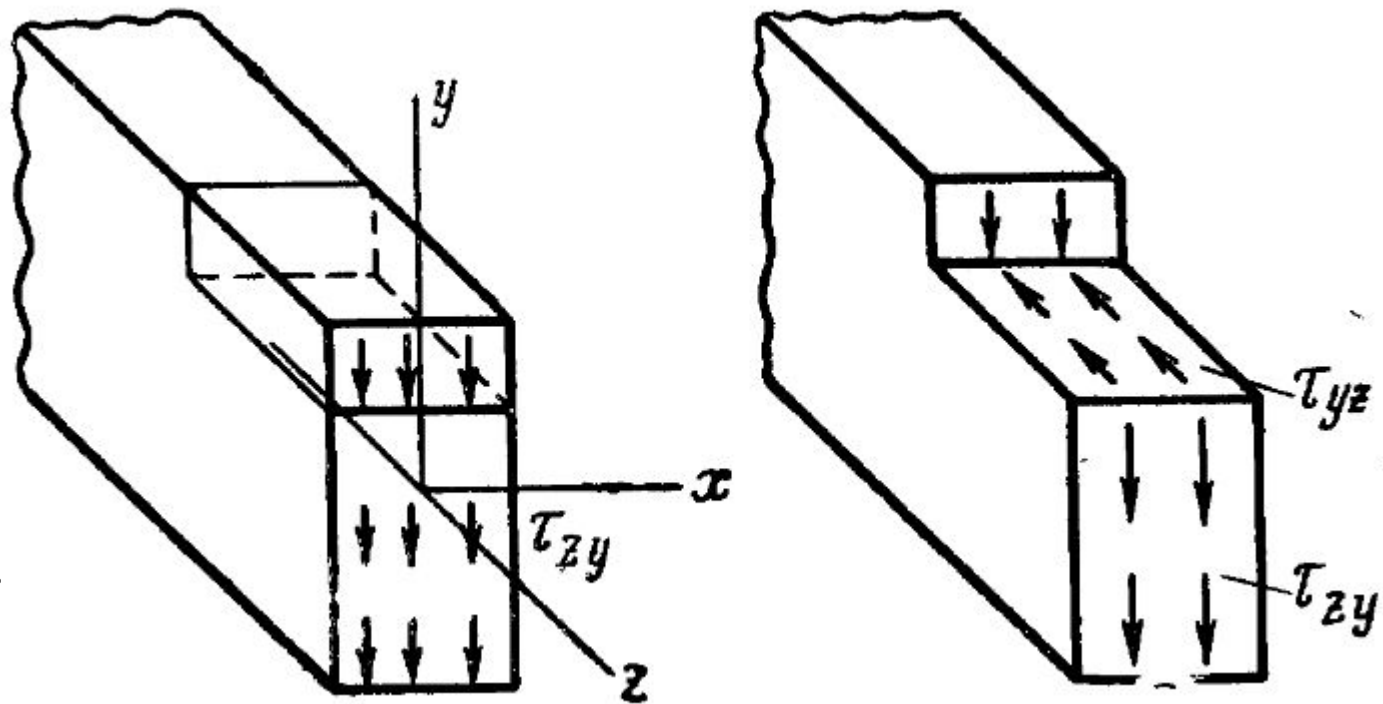


Рис.1

Касательные напряжения при прямом поперечном изгибе

В поперечных сечениях балок, как было установлено выше, при *чистом* изгибе возникают только нормальные, а при *поперечном* изгибе — как нормальные, так и касательные напряжения. Из закона парности касательных напряжений следует, что в продольных сечениях балки, параллельных нейтральному слою, также возникают касательные напряжения (рис. 18). Для данной точки балки касательное напряжение (τ_{zy}), возникающее на площадке поперечного сечения, равно касательному напряжению (τ_{yz}), возникающему на площадке продольного сечения, проведенного через ту же точку.

Рис.1
9



Наличие касательных напряжений в продольных сечениях балок подтверждается также и результатами следующего простого опыта. Представим себе две одинаково нагруженные двухопорные балки, одна из которых состоит из ряда отдельных положенных друг на друга и ничем не скрепленных брусьев (рис. 20).

Каждый из этих брусьев деформируется независимо от других (влияние сил трения между брусьями не учитываем), имея собственный нейтральный слой.

В результате деформации отдельные брусья, составляющие балку, взаимно

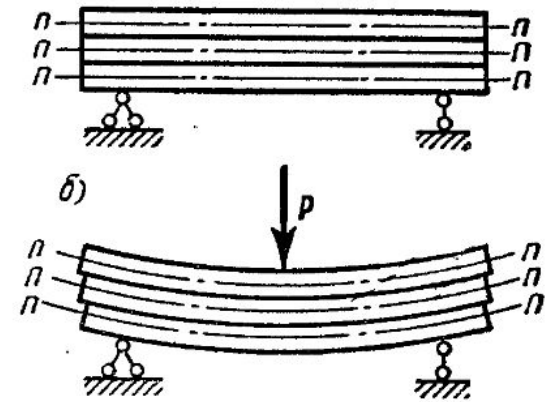
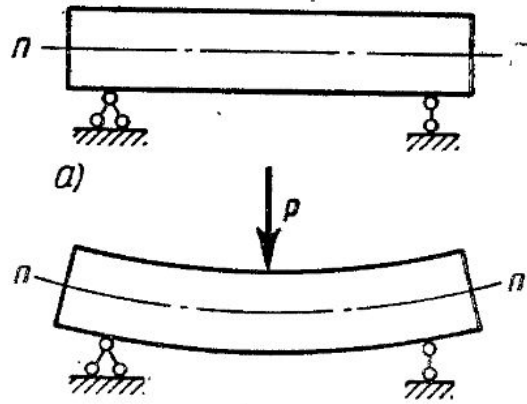


Рис.2

В деформированной балке взаимного сдвига ее продольных слоев не происходит; это и указывает на наличие в продольных плоскостях касательных напряжений, препятствующих этим сдвигам. Попутно заметим, что прогибы целой балки будут значительно меньше, чем балки, состоящей из отдельных брусьев.

Касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения бруса ($\tau = \tau_{zy}$) при прямом поперечном изгибе определяется по формуле (формула Журавского)

$$\tau = \tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^*}{I_x b} \quad (10)$$

Q_y — поперечная сила, возникающая в рассматриваемом поперечном сечении бруса;
 S_x — статический момент относительно нейтральной, оси поперечного сечения его части, расположенной по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси. Эта часть сечения заштрихована на рис.21

I_x — момент инерции всего поперечного сечения относительно его нейтральной оси;
 b — ширина поперечного сечения — размер в направлении, параллельном нейтральной оси (при переменной ширине сечения значение b надо брать на уровне исследуемой точки)

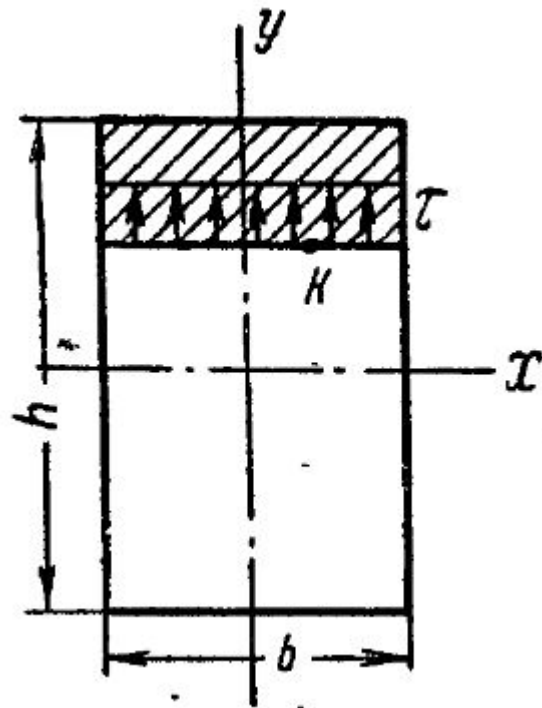


Рис.2

1

Из закона парности касательных напряжений следует, что формула (10) дает также значение касательного напряжения (τ_{yz}), возникающего в продольном сечении балки.

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В ряде случаев работающие на изгиб элементы машиностроительных и строительных конструкций должны быть рассчитаны не только на *прочность*, но и на *жесткость*. К деталям, рассчитываемым на жесткость, относятся, в частности, валы зубчатых и червячных передач и многие части металлорежущих станков.

Расчет на жесткость элемента конструкции, имеющего форму бруса, заключается в определении наибольших перемещений его поперечных сечений и сопоставлении их с допускаемыми, зависящими от назначения и условий эксплуатации данного элемента.

Расчет на жесткость и решение статически неопределимых задач при изгибе, очевидно, требует предварительного изучения вопроса о перемещениях поперечных сечений балок.

Рассмотрим простую консоль, нагруженную на свободном конце силой P , линия действия которой совпадает с одной из главных осей поперечного сечения балки (рис.22)

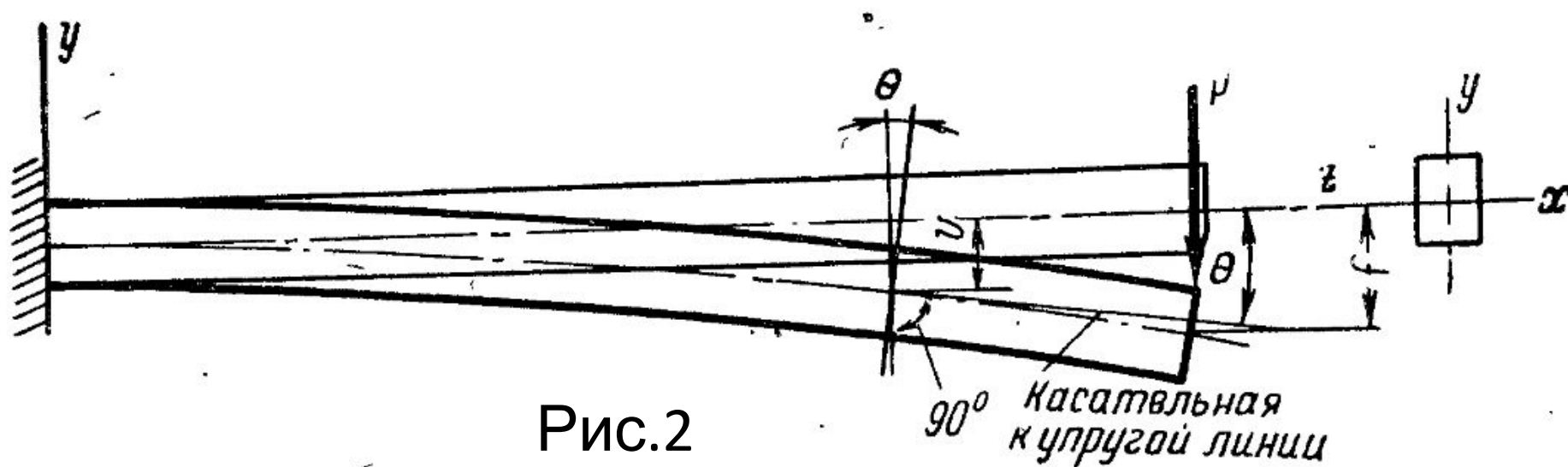


Рис.2

При деформации балки центры тяжести ее поперечных сечений получают линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются вокруг своих нейтральных осей. Допущение о малости перемещений позволяет считать, что направления линейных перемещений перпендикулярны к продольной оси недеформированного бруса. Эти перемещения принято называть **прогибами**. Прогиб произвольного сечения обозначим v , а наибольший прогиб — **стрелу прогиба** — f . Геометрическое место центров тяжести поперечных сечений деформированного бруса, т. е. ось изогнутого бруса, условно называют **изогнутой осью**, или чаще — **упругой линией**.

Эта линия плоская кривая, лежащая в силовой плоскости. Совпадение плоскости деформации с плоскостью действия нагрузки является характерной особенностью прямого изгиба. Более того, можно сказать, что именно по этой причине рассматриваемый случай изгиба называют *прямым*.

При повороте поперечные сечения остаются перпендикулярными к изогнутой оси бруса, что следует из справедливости гипотезы Бернулли. Следовательно, ***угол θ поворота поперечного сечения равен углу между касательной к упругой линии в данной точке и осью недеформированного бруса.***

Таким образом, **ордината упругой линии и угол наклона касательной**, проведенной к ней в данной точке, **полностью определяют линейное и угловое перемещения** соответствующего поперечного сечения балки, и, следовательно, отыскание этих перемещений сводится к исследованию формы упругой линии.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Упругую линию балки можно рассматривать как график некоторой функции, определяемой характером нагружения балки, ее размерами и материалом. Сама функция представляет собой текущую ординату упругой линии, а ее аргументом является абсцисса произвольного поперечного сечения балки, т. е.

$$v = \Phi(z) \quad (11)$$

Для определения этой функции воспользуемся зависимостью между кривизной оси бруса (кривизной нейтрального слоя) и изгибающим моментом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (12)$$

Из курса математики известно следующее выражение кривизны некоторой кривой:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (13)$$

Первая производная (v') от функции дает величину тангенса угла наклона касательной к графику этой функции. В пределах упругих деформаций балки эти углы весьма малы: порядка тысячных долей радиана. Действительно, при малых углах, как известно, можно считать, что тангенсы равны соответствующим углам, следовательно, при $\Theta = 0,01$ рад $\text{tg } \Theta = v' = 0,01$ и $(v')^2 = (0,01)^2 = 10^{-4}$

Таким образом, вместо точного выражения кривизны можно принять приближенное:

$$\frac{1}{\rho} \approx v'' = \frac{d^2 v}{dz^2}$$

обеспечивающее определение перемещений с точностью, вполне достаточной для практических расчетов.

Подставляя значение кривизны в соотношение (12), получаем

$$v'' = \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (13)$$

Выражение (13) называется **приближенным дифференциальным уравнением упругой линии**. Для балок постоянного сечения его обычно записывают в виде

$$EI_x v'' = M_x \quad (14)$$

Правая часть зависимости (14) представляет собой *уравнение* изгибающих моментов, т. е. аналитическое выражение закона изменения изгибающего момента по длине балки

$$M_x = EI_x \psi'' \quad (z = x \quad \psi = \Phi(x))$$

которое легко составить для любой статически определимой балки.

Знаки левой и правой частей выражений (13) и (14) совпадают при условии, что ось u направлена вверх (см. рис. 22), т. е. для линейных перемещений v направление вверх принято за положительное.

Итак, выражение второй производной исследуемой функции можно считать известным. Для нахождения первой производной, т. е. углов наклона касательных к упругой линии балки (углов поворота поперечных сечений), следует проинтегрировать левую и правую части выражения (14). В результате получим

$$EI_x v' = EI_x \operatorname{tg} \Theta \approx EI_x \Theta = \int M_x dz + c \quad (15)$$

Интегрируя затем зависимость (15), получаем

$$EI_x v = \iint (M_x dz) dz + Cz + D \quad (16)$$

Подставив сюда уравнение изгибающего момента, выполнив интегрирование и найдя постоянные интегрирования C и D найдем в развернутом виде выражение функции (11), а следовательно, получим возможность определить прогиб любого поперечного сечения балки. Аналогично из (15) можем определить угол поворота произвольного поперечного сечения.

Постоянные интегрирования определяют из так называемых **граничных условий**, зависящих от способов закрепления (вида и расположения опор) балки.

РАЦИОНАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ

В случаях, когда балка имеет несколько участков нагружения, уравнение (14) должно быть составлено для каждого участка в отдельности. **В результате двукратного интегрирования** этих уравнений каждое из полученных выражений будет содержать две постоянных интегрирования, т. е. ***общее число постоянных интегрирования будет равно удвоенному числу участков.*** Для определения этих постоянных, помимо граничных условий, вытекающих из характера опорных закреплений балки, используется условие **плавности и непрерывности упругой линии.**

Плавность упругой линии означает, что, если в уравнения углов поворота, составленные для двух смежных участков, подставить абсциссу сечения, являющегося их границей, то величины угловых перемещений из обоих уравнений должны получиться одинаковыми. Подобные условия, составленные для всех граничных сечений, дают зависимости между величинами постоянных интегрирования C_i .

Аналогично используется **условие непрерывности упругой линии**: прогибы для граничного сечения, получаемые из уравнений, составленных для смежных участков, должны быть одинаковы. В результате получаются зависимости между постоянными интегрирования D_i для отдельных участков.

Итак, всегда есть возможность составить достаточное количество уравнений для определения всех постоянных интегрирования, т. е. никаких принципиальных затруднений при нахождении величин C_i и D_i не возникает.

Трудности алгебраического характера весьма существенны: приходится совместно решать уравнения, общее число которых равно удвоенному числу участков. Даже для балки, имеющей всего два участка нагружения, это весьма громоздко.

Применяя некоторые специальные приемы интегрирования» можно обеспечить равенство постоянных интегрирования для всех участков, $\forall i$ результате независимо от числа участков общее количество постоянных интегрирования получается равным двум. Эти постоянные (C и D) представляют собой соответственно угол поворота и прогиб сечения, совпадающего с началом координат, умноженные на жесткость сечения (EJ_x), т.е.

$$C = EI_x \Theta_0 \quad (17)$$

$$D = EI_x v_0 \quad (18)$$

Условимся принимать начало координат всегда в центре тяжести крайнего левого сечения балки.

В зависимости от способа закрепления начального сечения может быть один из следующих трех вариантов значений C и D :

а) левый конец балки защемлен: $C=0$; $D=0$;

б) левый конец балки закреплен шарнирно: $C \neq 0$, $D=0$;

в) левый конец балки свободен: $C \neq 0$, $D \neq 0$.

В случае, если постоянные (одна или обе) не равны нулю, их значения определяются из условий закрепления балки.

Для того чтобы обеспечить получение лишь двух постоянных интегрирования независимо от числа участков, при интегрировании дифференциального уравнения упругой линии нужно применять следующие три приема (на обоснованиях и доказательствах не останавливаемся).

1. Слагаемое от сосредоточенного момента t в выражении для M_x записывать в виде $m(z-a)^0$, где a — абсцисса сечения, совпадающего с местом приложения момента m .
2. Интегрирование вести без раскрытия скобок.

3. Если на балке имеется равномерно распределенная нагрузка, не доходящая до сечения, прогиб (или угол поворота) которого определяется, то ее следует продлить до этого сечения и приложить противоположно направленную компенсирующую нагрузку той же интенсивности.

Если записывать уравнение изгибающих моментов для последнего (считая слева) участка балки, то оно будет содержать уравнения и для любого предыдущего участка. Эти уравнения получаются из уравнения для последнего участка путем исключения из него слагаемых, соответствующих нагрузкам, приложенным к балке правее рассматриваемого

ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

Наиболее общий метод определения перемещений в упругих системах— энергетический. В основу этого метода положено условие равенства работы внешних сил, приложенных к линейно деформируемой упругой системе, и энергии деформации системы. Работа статически приложенной внешней силы, как известно, равна половине произведения конечного значения силы на конечное значение соответствующего перемещения (теорема Клапейрона).

Работа произвольной системы внешних сил (рис. 23) равна полусумме произведений конечного значения каждой из сил на конечное значение соответствующего перемещения:

$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i \quad (19)$$

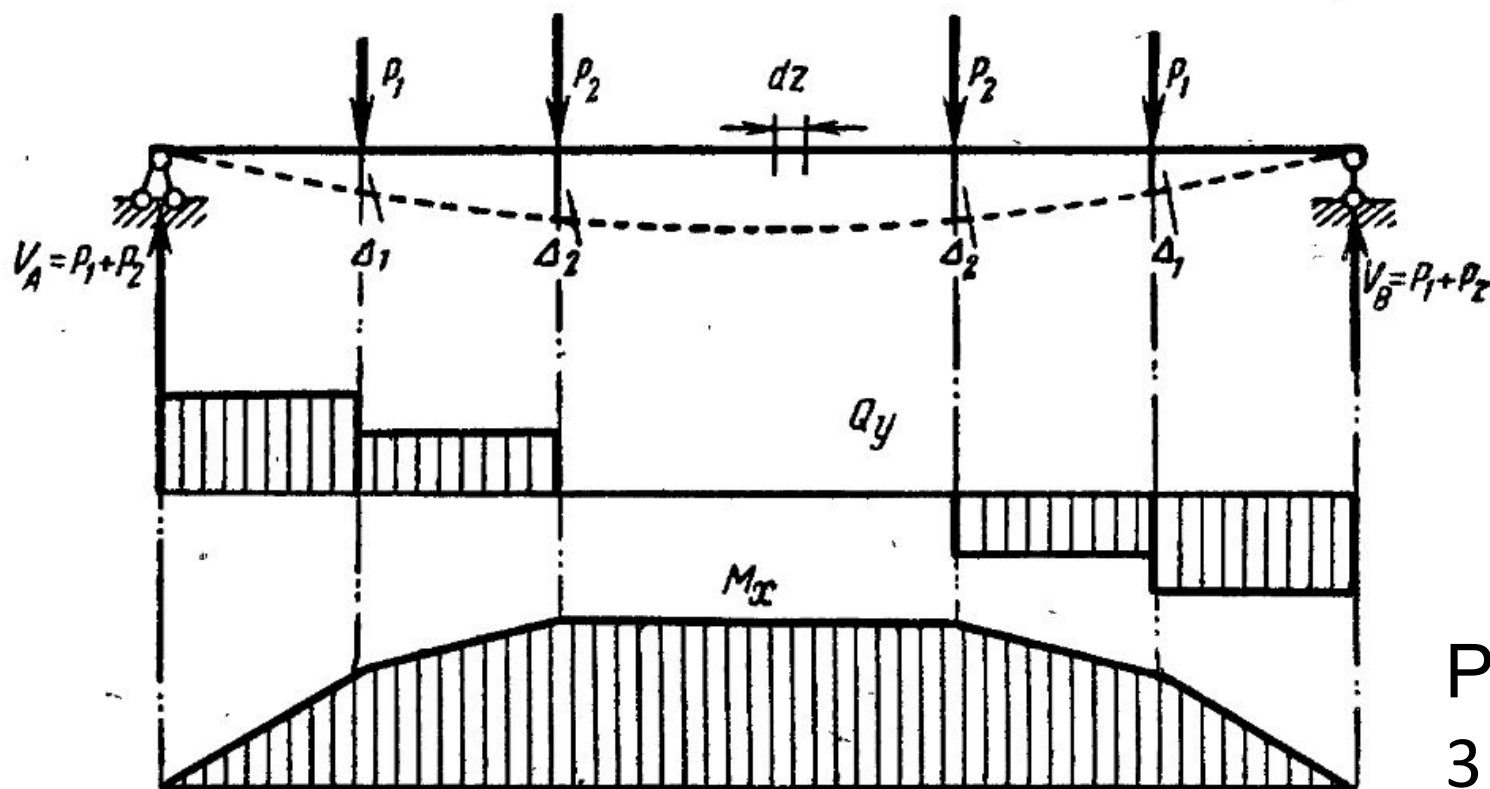


Рис.2
3

В дальнейшем будем всегда считать, не оговаривая этого специально, что речь идет именно о конечных значениях статически приложенных сил и соответствующих перемещений. При применении энергетического метода будем, как правило, обозначать как линейные, так и угловые перемещения буквой Δ с тем или иным индексом. Формула (19) представляет собой общее выражение теоремы Клапейрона для произвольной системы сил. **Обращаем внимание**, что было бы ошибочным считать эту зависимость составленной на основе принципа независимости действия сил — здесь каждая из сил умножается на перемещение, которое зависит от всех приложенных сил.

Для определения работы внутренних сил, численно равной потенциальной энергии деформации, выделим из балки (рис.23) в пределах участка, находящегося в условиях чистого изгиба, бесконечно малый элемент

Этот элемент в деформированном виде в крупном масштабе показан на рис. 24. В рассматриваемом случае внутренние силы в поперечных сечениях элемента приводятся к изгибающим моментам M_x .

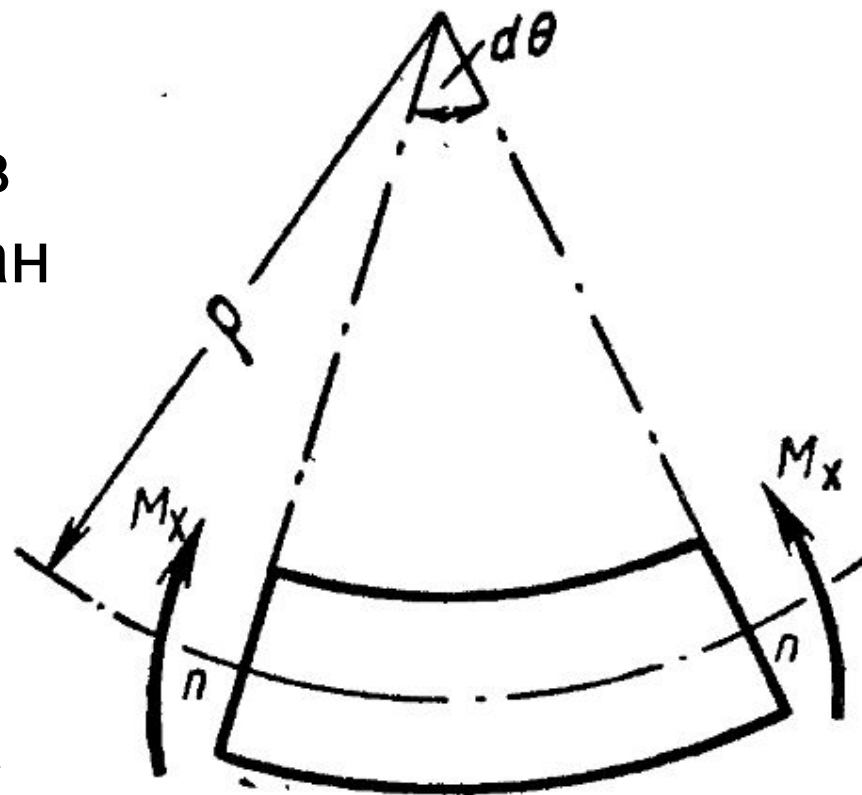


Рис.2

Из курса теоретической механики известно, что работа момента (пары сил) равна его произведению на соответствующий угол поворота. Здесь, учитывая статический характер приложения нагрузки, согласно теореме Клапейрона, надо взять половину указанного произведения:

$$dU = \frac{M_x d\Theta}{2} \quad (20)$$

Длина волокна $n-n$, лежащего в нейтральном слое, равна первоначальному размеру элемента dz , следовательно,

$$dz' = \rho d\Theta$$

или
$$d\Theta = \frac{1}{\rho} dz$$

По формуле

$$(12), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad \text{и} \quad d\Theta = \frac{M_x dz}{EI_x}$$

Подставляя это значение $d\theta$ в выражение (20), получаем

$$dU = \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} \quad (21)$$

Выражение (21) дает величину потенциальной энергии деформации изгиба бесконечно малого элемента балки. Оно получено для элемента, находящегося в условиях чистого изгиба.

При поперечном изгибе, помимо изгибающих моментов, возникают **поперечные силы**, но при определении энергии деформации ими в подавляющем большинстве случаев можно пренебречь и считать зависимость (21) применимой во всех случаях прямого изгиба.

Для вычисления энергии деформации балки в целом следует просуммировать значения dU по всей ее длине. При этом следует учесть, что закон изменения изгибающих моментов для отдельных участков балки различен, поэтому вычисление определенных интегралов надо вести отдельно для каждого участка длиной l_i , а затем результаты суммировать.

Окончательно формула для определения энергии деформации изгиба будет иметь вид

$$U = \sum_l \int \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} \quad (22)$$

С учетом поперечных сил формула для вычисления энергии деформации при прямом поперечном изгибе имеет вид

$$U = \sum_l \int \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \sum_l \int \frac{kQ_y^2 dz}{2GF} \quad (23)$$

Здесь k — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балки. Например, для прямоугольного сечения $k=1,2$.

Можно показать, что, как правило, второе слагаемое не превышает 2—3% от всей энергии деформации, а во многих случаях имеет ещё меньшее значение.