Математика
Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

1. Решение НЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами методом неопределённых коэффициентов.

Для НЛДУ с постоянными коэффициентами существует более простой метод нахождения частного решения $\tilde{y}$, чем метод вариации произвольных постоянных.

Частное решение НЛДУ зависит от вида правой части уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$.

1. Если $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$

где $P_n(x) -$ многочлен n-го порядка.

Возможны следующие случаи:

1) α не является корнем характеристического уравнения $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$,

частное решение $\tilde{y}$ ищем в виде:

$$\tilde{y} = Q_n(x)e^{\alpha x} = \left(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n\right)e^{\alpha x}.$$

$$\tilde{y}' = Q_n'(x)e^{\alpha x} + Q_n(x)\alpha e^{\alpha x},$$

$$\tilde{y}'' = Q_n''(x)e^{\alpha x} + Q_n'(x)\alpha e^{\alpha x} +$$

$$+ Q_n'(x)\alpha e^{\alpha x} + Q_n(x)\alpha^2 e^{\alpha x},$$

$$Q_n''(x)+2Q_n'(x)\alpha+Q_n(x)\alpha^2+a_1Q_n'(x)+$$

$$+a_1Q_n(x)\alpha+a_2Q_n(x)=P_n(x)$$

$$Q_n''(x)+Q_n'(x)(2\alpha+a_1)+$$

$$+Q_n(x)(\alpha^2+a_1\alpha+a_2)=P_n(x) \qquad (*)$$

Слева и справа от знака равенства – многочлены степени n $\left(P_n(x), Q_n(x)\right)$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему $(n+1)$ уравнений для определения коэффициентов

$$A_0, A_1, ..., A_n.$$

Пример .

Найти общее решение НЛДУ

$$y'' - 5y' + 6y = e^x .$$

Решение.

Для ОЛДУ $k^2 - 5k + 6 = 0,$

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 2, \quad y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} .$$

Для $f(x) = e^x \quad \alpha = 1.$

Так как $k_1, \ k_2 \neq \alpha \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = Ae^x$

Найдем А. $\tilde{y}' = Ae^x$, $\tilde{y}'' = Ae^x$.

Подставим в уравнение:

$$Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = e^x, \quad 2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}e^x$$

Общее решение НЛДУ: $y = y_0 + \tilde{y}$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^x.$$

2) α - простой (однократный) корень характеристического уравнения.

Частное решение искать в форме $\tilde{y} = Q_n(x)e^{\alpha x}$ нельзя, т.к. в равенстве $(*)$ $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0.$

Слева от знака равенства – многочлен степени $n-1$, справа – степени n

Тождество не получается ни при каких

$$A_0, A_1, ..., A_n$$

Частное решение $\tilde{y}$ ищем в виде:

$$\tilde{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x}$$

3) α - двукратный корень характеристического уравнения.

Частное решение искать в форме $\breve{y} = Q_n(x)e^{\alpha x}$ нельзя, т.к. в равенстве $(*)$

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0, \qquad 2\alpha + a_1 = 0$$

Слева от знака равенства – многочлен степени $n-2$, справа – степени n

Чтобы получить тождество многочленов,

частное решение $\breve{y}$ ищем в виде:

$$\breve{y} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$$

Пример .

Найти общее решение НЛДУ

$$y'' - 8y' + 16y = e^{4x}.$$

Решение.

Для ОЛДУ $k^2 - 8k + 16 = 0,$

$$k_1 = 4, \quad k_2 = 4, \quad y_0 = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}.$$

Для $f(x) = e^{4x}$ $\quad \alpha = 4.$

Так как $k_1 = k_2 = \alpha = 4$

$$\breve{y} = x^2 A e^{4x}$$

Найдем А.

$$\tilde{y}' = 2xAe^{4x} + x^2A4e^{4x} = e^{4x}\left(2Ax + 4Ax^2\right),$$

$$\tilde{y}'' = 4e^{4x}\left(2Ax + 4Ax^2\right) + e^{4x}\left(2A + 8Ax\right) =$$

$$= e^{4x}\left(8Ax + 16Ax^2 + 2A + 8Ax\right) =$$

$$= e^{4x}\left(16Ax^2 + 16Ax + 2A\right),$$

$$e^{4x}\left(16Ax^2 + 16Ax + 2A\right) - 8e^{4x}\left(2Ax + 4Ax^2\right) +$$

$$+16x^2Ae^{4x} = e^{4x},$$

$$\cancel{16Ax^2} + \cancel{16Ax} + 2A - \cancel{16Ax} - \cancel{32Ax^2} + \cancel{16Ax^2} = 1$$

$$2A = 1, \quad A = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = \frac{1}{2}x^2 e^{4x}$$

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + \frac{1}{2}x^2 e^{4x}.$$

2. Если

$$\boxed{f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x}$$

где $P_n(x), Q_m(x) -$ многочлены.

Возможны следующие случаи:

1) если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$\tilde{y} = U_p(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_p(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

где $U_p(x), V_p(x) -$ многочлены,

степень которых равна наивысшей степени многочленов $P_n(x), Q_m(x)$, $p = \max(m, n)$.

2) если $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения, то

$$\breve{y} = x \cdot \left(U_p(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V_p(x) e^{\alpha x} \sin \beta x \right)$$

Замечание.

Вид частного решения сохраняется в случае, когда один из многочленов $P_n(x), Q_m(x)$ равен нулю.

Пример .

Найти общее решение НЛДУ

$$y'' - 4y' + 4y = \cos x.$$

Решение.

Для ОЛДУ $\quad k^2 - 4k + 4 = 0,$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Для $\quad f(x) = \cos x \quad \alpha + i\beta = 0 + i1.$

Так как $\quad k_{1,2} = 2 \neq i$

$\Rightarrow \quad \tilde{y} = A\cos x + B\sin x$

Найдем А и В.

$$\tilde{y}' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$\tilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x,$$

$$-A\cos x - B\sin x - 4\left(-A\sin x + B\cos x\right) +$$
$$+4\left(A\cos x + B\sin x\right) = \cos x$$

$$\left(-A - 4B + 4A\right)\cos x + \left(-B + 4A + 4B\right)\sin x = \cos x$$

$$\begin{cases} 3A - 4B = 1, \\ 4A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{3}{25}, B = -\frac{4}{25}$$

$$\breve{y} = \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x,$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x.$$

Пример .

Найти общее решение НЛДУ

$$y'' + y = 3\sin x.$$

Решение.

Для ОЛДУ $\quad k^2 + 1 = 0,$

$$k_{1,2} = \pm i, \qquad y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Для $\quad f(x) = 3\sin x \qquad \alpha + i\beta = 0 + i1.$

Так как $\; k_{1,2} = \pm i \;$ совпадает с $\quad \alpha + i\beta = i$

$$\Rightarrow \quad \tilde{y} = x\left(A\cos x + B\sin x\right)$$

Найдем А и В.

$$\tilde{y}' = A\cos x + B\sin x - xA\sin x + xB\cos x =$$

$$= \left(A + Bx\right)\cos x + \left(B - Ax\right)\sin x,$$

$$\tilde{y}'' = B\cos x + \left(A + Bx\right)\sin x -$$

$$- A\sin x + \left(B - Ax\right)\cos x =$$

$$= \left(B + B - Ax\right)\cos x - \left(A + Bx + A\right)\sin x,$$

$$\left(2B - Ax\right)\cos x - \left(2A + Bx\right)\sin x +$$

$$+ Ax\cos x + Bx\sin x = 3\sin x,$$

$$2B\cos x - 2A\sin x = 3\sin x.$$

$$\begin{cases} -2A = 3, \\ 2B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{3}{2}, B = 0$$

$$\tilde{y} = -\frac{3}{2}x\cos x$$

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{3}{2}x\cos x.$$

Т. ***Принцип суперпозиции решений.***

Пусть $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)$,

$\tilde{y}_1$ - частное решение $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x)$,

$\tilde{y}_2$ - частное решение $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$,

тогда частное решение НЛДУ равно сумме этих двух решений $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$

2. Решение НЛДУ высших порядков.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x),$$

где $a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \; f(x) -$

непрерывные функции или постоянные.

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

Т. Метод вариации произвольных постоянных

Частное решение НЛДУ ищется в виде:

$$\breve{y} = c_1(x)\,y_1 + c_2(x)\,y_2 + \ldots + c_n(x)\,y_n$$

где $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ –

функции, определяемые из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Метод неопределенных коэффициентов

1. Если $\boxed{f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}}$

возможны следующие случаи:

1) α не является корнем характеристического уравнения.

Частное решение $\breve{y}$ ищем в виде:

$$\breve{y} = Q_n(x)e^{\alpha x} = \left(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n\right)e^{\alpha x}.$$

2) α - корень характеристического уравнения кратности m.

Частное решение $\breve{y}$ ищем в виде:

$$\breve{y} = x^m Q_n(x) e^{\alpha x}$$

Пример .

Найти общее решение НЛДУ

$$y^{(4)} - y = x^3 + 1.$$

Решение.

Для ОЛДУ $\quad k^4 - 1 = 0,$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i,$$

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Для $\quad f(x) = x^3 + 1 \quad \alpha = 0 \neq k_1, k_2, k_3, k_4.$

$$\Rightarrow \quad \tilde{y} = Q_3(x) e^{0x} = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Найдем $A_0, A_1, A_2, A_3.$

$$\tilde{y}' = 3A_0x^2 + 2A_1x + A_2,$$

$$\tilde{y}'' = 6A_0x + 2A_1, \qquad \tilde{y}''' = 6A_0, \qquad \tilde{y}^{(4)} = 0,$$

$$-A_0x^3 - A_1x^2 - A_2x - A_3 = x^3 + 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{cases} -A_0 = 1, \\ A_1 = 0, \\ A_2 = 0, \\ A_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \qquad \tilde{y} = -x^3 - 1.$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - x^3 - 1.$$

2. Если

$$\boxed{f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x}$$

Возможны следующие случаи:

1) если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$\breve{y} = U_p(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_p(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

где $U_p(x), V_p(x) -$ многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P_n(x), Q_m(x),\quad p = \max(m, n).$

2) если $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности m, то

$$\tilde{y} = x^m \left(U_p(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V_p(x) e^{\alpha x} \sin \beta x \right)$$

***Пример*.**

Найти общее решение НЛДУ

$$y^{(4)} - y = 6\sin x.$$

Решение.

Для ОЛДУ $\qquad k^4 - 1 = 0,$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i,$$

$$y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Для $\qquad f(x) = 6\sin x \qquad \alpha = 0, \beta = 1.$

$\alpha + i\beta = i$ совпадает с корнем $k_3 = i$

$$\tilde{y} = x\left(A\cos x + B\sin x\right)$$

Найдем А и В.

$$\tilde{y}' = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x,$$

$$\tilde{y}'' = (B + B - Ax)\cos x - (A + Bx + A)\sin x,$$

$$\tilde{y}''' = (-3A - Bx)\cos x - (3B - Ax)\sin x,$$

$$\tilde{y}^{(4)} = (-4B + Ax)\cos x + (4A + Bx)\sin x,$$

$$(-4B + Ax)\cos x + (4A + Bx)\sin x -$$

$$- Ax\cos x - Bx\sin x = 6\sin x,$$

$$-4B\cos x + 4A\sin x = 6\sin x.$$

$$\begin{cases} 4A = 6, \\ -4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{3}{2}, B = 0$$

$$\breve{y} = \frac{3}{2} x\cos x$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x +$$

$$+ c_4 \sin x + \frac{3}{2} x \cos x.$$

3. Системы линейных уравнений.

Определение.

$$
(1)\quad \begin{cases} y_1^{(p_1)} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n^{(p_1 - 1)}), \\ y_2^{(p_2)} = f_2(x, y_2, \ldots, y_n^{(p_2 - 1)}), \\ y_n^{(p_n)} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n^{(p_n - 1)}) \end{cases}
$$

Система ДУ (1) называется ***канонической*** порядка n, где $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Определение.

Если $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, то система (1) называется ***нормальной***. Она имеет следующий вид

$$
(2)\qquad \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}
$$

Решением системы (2) на (a,b) называется совокупность функций

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots\ ,\ y_n = y_n(x),$$

непрерывно дифференцируемых на (a,b) и обращающих каждое уравнение системы (2) в верное равенство.

Общее решение системы (2) – совокупность функций $y(x, c_1, c_2, \ldots c_n)$, зависящих от n произвольных постоянных интегрирования и обращающих систему (2) в систему верных равенств.

Утверждение

ДУ n-го порядка всегда можно свести к нормальной системе.

Систему ДУ, записанную в каноническом виде всегда можно свести к нормальному виду.

Обратно: система ДУ, как правило, но не всегда, сводится к ДУ n-го порядка, решая которое можно найти решение системы.

Пример.

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1 - 3y_2, \\ y_2'' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$
– каноническая система четвертого порядка.

Обозначим:

$y_1' = y_3$, $y_2' = y_4$.

Тогда

$$\begin{cases} y_1' = y_3, \\ y_2' = y_4, \\ y_3' = 2y_1 - 3y_2, \\ y_4' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$
– нормальная система четвертого порядка.

Задача Коши для нормальной системы

Даны система ДУ (2) и начальные условия

$y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}.$

Найти решение системы $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x).$

Решение.

1.

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, c_1, \ldots, c_n), \\ y_2 = y_2(x, c_2, \ldots, c_n), \\ y_n = y_n(x, c_1, \ldots, c_n) \end{cases}$$

2. $c_1, c_2, \ldots c_n$ из НУ

Пример решения системы ДУ ***методом исключения неизвестных.***

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = y \end{cases}$$

Решение.

из второго уравнения: $y = z'$

$$y' = z''$$

$$z'' - z = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Ответ. $z = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-x}$,

$$y = c_1 \cdot e^{x} - c_2 \cdot e^{-x}$$